

AFFINITÉS & ELLIPSES

2012

TABLE DES MATIÈRES

Affinités	§ 1
Affinité et aire	§ 2
Ellipse : définition	§ 3
Diamètres conjugués, axes	§ 4
Construction d'une ellipse	§ 5
Cercles de courbure	§ 6

EXERCICES

§ 1. AFFINITÉS

● Définition

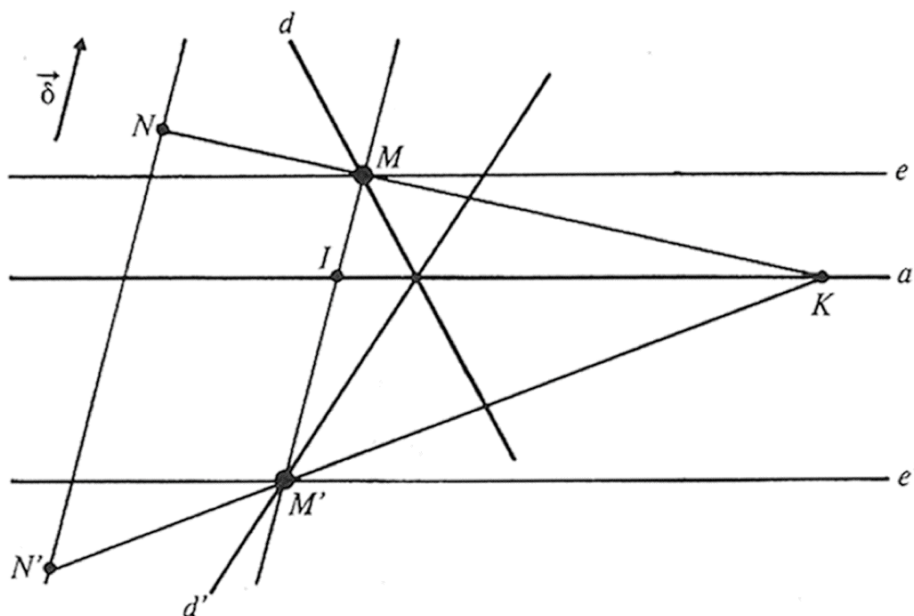
Soit une droite a , une direction donnée par un vecteur $\vec{\delta}$, différente de celle de a , et un nombre réel non nul λ .

On appelle **affinité** d'axe a , de direction $\vec{\delta}$ et de rapport λ , l'application de π vers π : (*)

1°) laissant fixes tous les points de a ;

2°) associant à tout point M non situé sur a le point M' tel que :

- M' est sur la droite de direction $\vec{\delta}$ passant par M ,
- $\vec{IM'} = \lambda \vec{IM}$, où I est le point d'intersection de la droite MM' et de a .



$$\frac{\vec{IM'}}{\vec{IM}} = \lambda$$

(*) π = plan dans lequel on travaille.

Remarques

- 1°) Une affinité est une application affine bijective.
- 2°) Si $\lambda = 1$, l'affinité est dite banale: c'est l'identité de π .
- 3°) La réciproque d'une affinité d'axe a , de direction $\vec{\delta}$ et de rapport λ , est l'affinité d'axe a , de direction $\vec{\delta}$ et de rapport $\frac{1}{\lambda}$.
- 4°) Si la direction $\vec{\delta}$ est perpendiculaire à celle de l'axe a , l'affinité est dite **orthogonale**.

Soit f une affinité d'axe a , de direction $\vec{\delta}$ et de rapport λ .

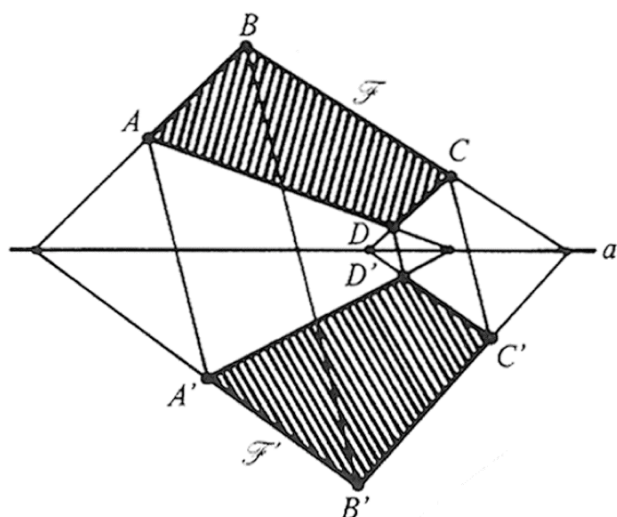
f est entièrement déterminée par la donnée de son axe a , d'un point M (non situé sur a) et de son image M' . L'image N' d'un point N se construit:

- en utilisant le fait que les droites NM et $N'M'$ se coupent sur a ;
- en sachant que le point N' appartient à la droite de direction $\vec{\delta}$ passant par N .

● Image d'une droite par f

- L'image par f d'une droite est une droite.
- L'axe a est fixe.
- Toute droite de direction $\vec{\delta}$ est invariante.
- Une droite parallèle à l'axe a pour image une parallèle à l'axe.
- Une droite non parallèle à l'axe et son image se coupent sur l'axe.

● Rapport des aires de deux figures affines



Soit $\mathcal{F}$ une figure fermée et $\mathcal{F}'$ son image par f .

On a:

$$\frac{\text{Aire de } \mathcal{F}'}{\text{Aire de } \mathcal{F}} = |\lambda|$$

§ 2. AFFINITÉ ET AIRE

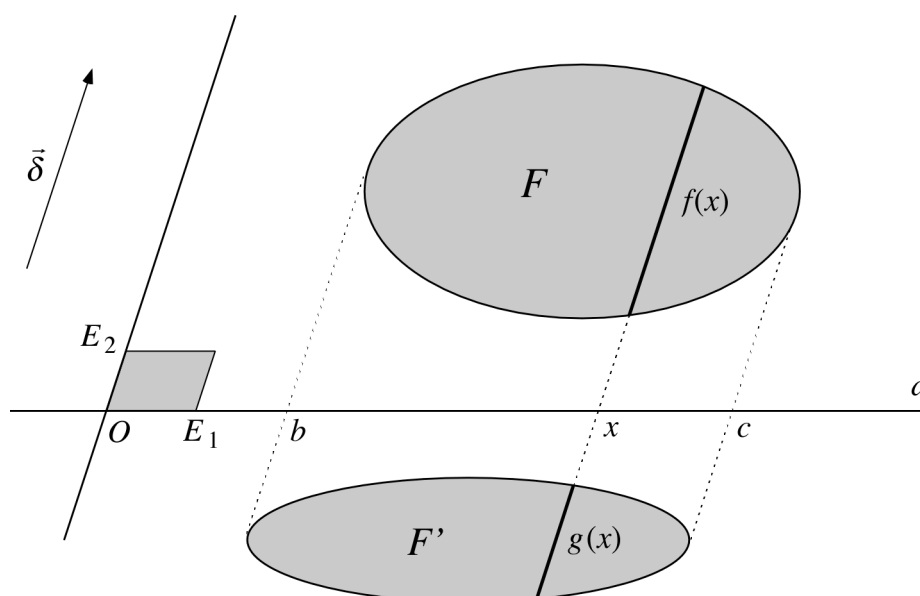
Théorème

Dans une affinité de rapport λ , les aires sont multipliées par $|\lambda|$.

Preuve (idée)

Soit F une région du plan et F' son image par une affinité d'axe a , de rapport λ et de direction $\vec{\delta}$. Montrons que $\text{aire}(F') = |\lambda| \text{aire}(F)$.

On introduit un repère (O, E_1, E_2) tel que $O \in a$, $E_1 \in a$ et $\overrightarrow{OE_2} \sim \vec{\delta}$.



En choisissant le parallélogramme construit sur OE_1 et OE_2 comme unité d'aire, on peut écrire :

$$\text{aire}(F) = \int_b^c f(x) dx$$

où $f(x)$ désigne la longueur, dans l'unité OE_2 , de la section de F par la parallèle à OE_2 d'abscisse x . De même, si $g(x)$ désigne la longueur de la section de F' par cette parallèle, on a :

$$\text{aire}(F') = \int_b^c g(x) dx$$

Or $g(x) = |\lambda| f(x)$. Ainsi :

$$\text{aire}(F') = \int_b^c |\lambda| f(x) dx = |\lambda| \int_b^c f(x) dx = |\lambda| \text{aire}(F)$$

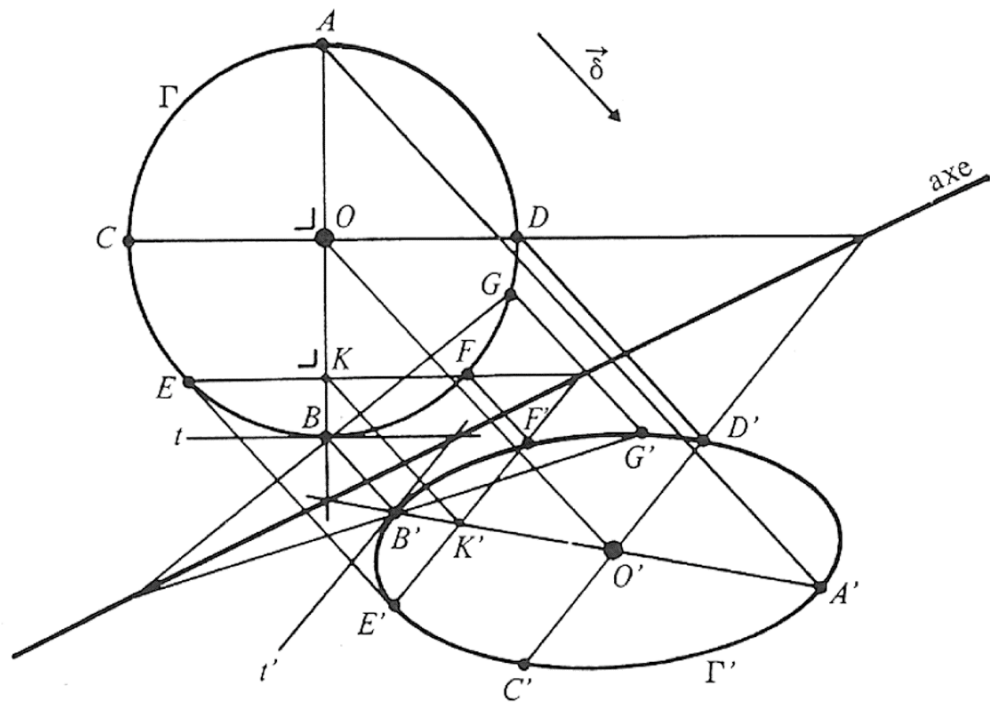
§ 3. ELLIPSE : DÉFINITION

● Image d'un cercle par une affinité

L'image d'un cercle Γ par une affinité f est une ellipse Γ' .

Remarque

Le cercle Γ est l'image de l'ellipse Γ' par l'affinité réciproque f^{-1} .



- L'image du centre du cercle Γ est le centre de l'ellipse Γ' .
- L'image d'un diamètre du cercle Γ est un diamètre de l'ellipse Γ' .
- L'image d'une tangente au cercle Γ est une tangente à l'ellipse Γ' .

§ 4. DIAMÈTRES CONJUGUÉS, AXES

● Diamètres conjugués

Les images, par une affinité f , de deux diamètres perpendiculaires d'un cercle Γ sont appelés **diamètres conjugués** de l'ellipse Γ' , image de Γ par f .

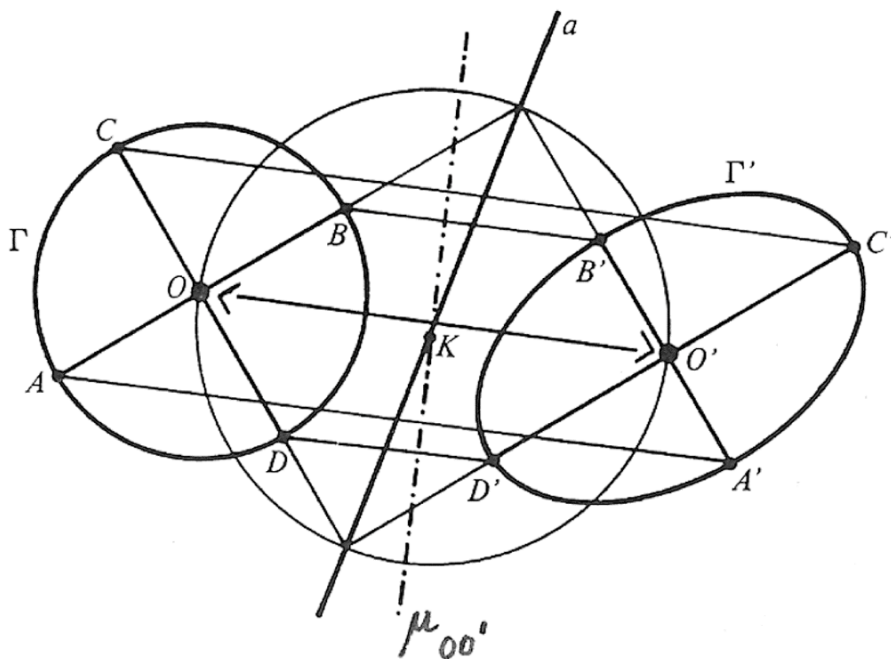
Chacun des diamètres d'une paire de diamètres conjugués de l'ellipse Γ' est axe de symétrie oblique de Γ' , la direction de cette symétrie étant celle de l'autre diamètre.

Les tangentes à l'ellipse aux extrémités d'un diamètre sont parallèles à son diamètre conjugué.

● Axes

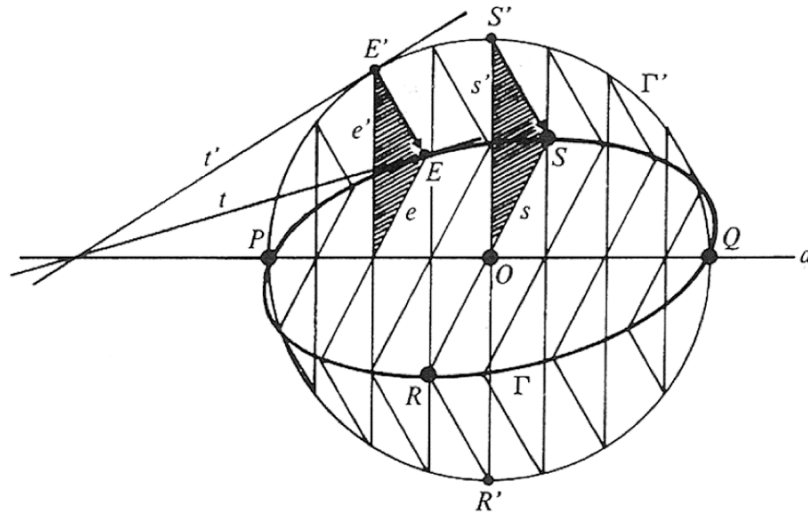
Les axes d'une ellipse sont ses deux diamètres conjugués perpendiculaires.

Si l'ellipse est l'image d'un cercle par une affinité, on construit ses axes en utilisant la construction suivante :



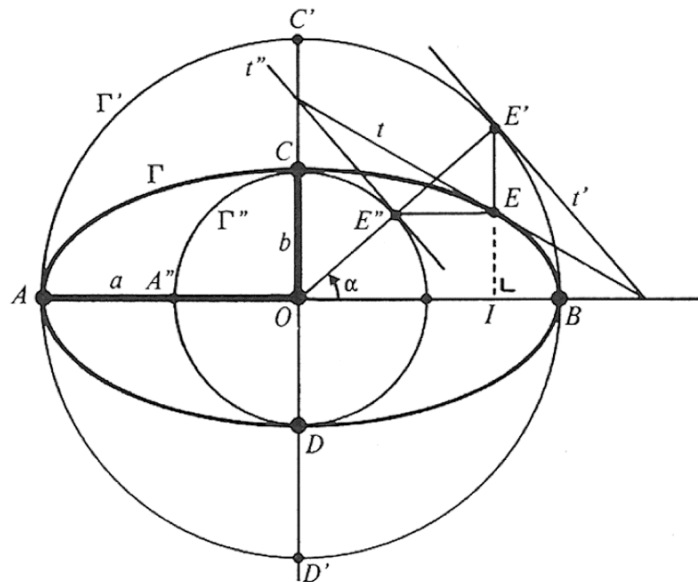
§ 5. CONSTRUCTION D'UNE ELLIPSE

1°) L'ellipse Γ est déterminée par deux diamètres conjugués PQ et RS .



L'ellipse Γ est l'image du cercle Γ' de diamètre PQ par l'affinité d'axe PQ envoyant S' sur S .

2°) L'ellipse Γ est déterminée par ses axes AB et CD .



L'ellipse Γ est l'image du cercle Γ' de diamètre AB par l'affinité d'axe AB envoyant C' sur C . Elle est aussi l'image du cercle Γ'' de diamètre CD par l'affinité d'axe CD envoyant A'' sur A .

§ 6. CERCLES DE COURBURE

Soit Γ une ellipse non circulaire dont l'équation relativement à un repère orthonormé porté par les axes est

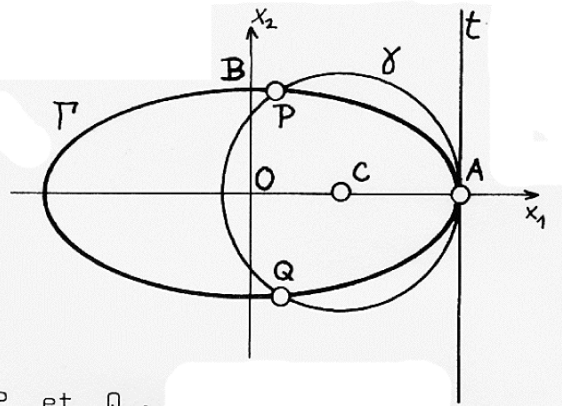
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Considérons le sommet

$A(a,0)$. Traçons un cercle

γ ayant même tangente que

Γ en A et la recoupant en P et Q .



Son centre C est sur l'axe Ox_1 .

La tangente à Γ en A fournit une approximation de l'ellipse au voisinage de ce point.

γ fournit également une approximation de Γ au voisinage de A d'autant meilleure que P et Q sont plus proches de A .

Déterminons le centre $C(\alpha, 0)$ tel que $P = Q = A$.

γ a pour équation $(x_1 - \alpha)^2 + x_2^2 - (a - \alpha)^2 = 0$.

P , Q et A sont donnés par le système :

$$\begin{cases} b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 b^2 = 0 \\ x_1^2 - 2\alpha x_1 + x_2^2 - a^2 + 2a\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \end{matrix} \quad \left| \begin{matrix} 1 \\ -a^2 \end{matrix} \right.$$

En remplaçant L_1 par $L_1 - a^2 L_2$, il vient

$$\begin{cases} (b^2 - a^2)x_1^2 + 2\alpha a^2 x_1 - a^2 b^2 + a^4 - 2a^3 \alpha = 0 \\ b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 b^2 = 0 \end{cases}$$

Il faut déterminer α de telle manière que $P = Q = A$.

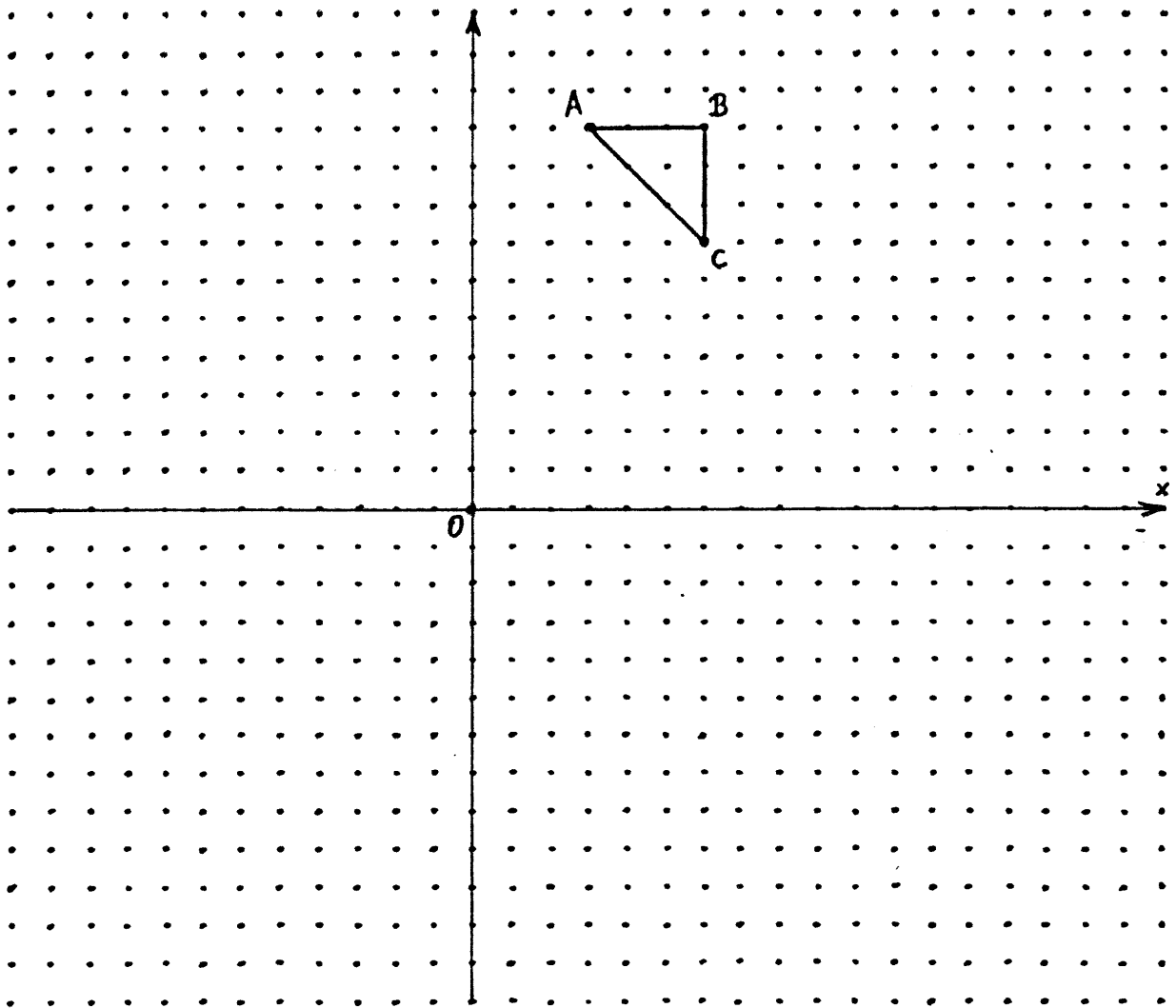
Or la première équation fournit l'abscisse p de P et Q d'une part et l'abscisse a de A d'autre part.

$$C'B = \frac{a^2}{b}$$

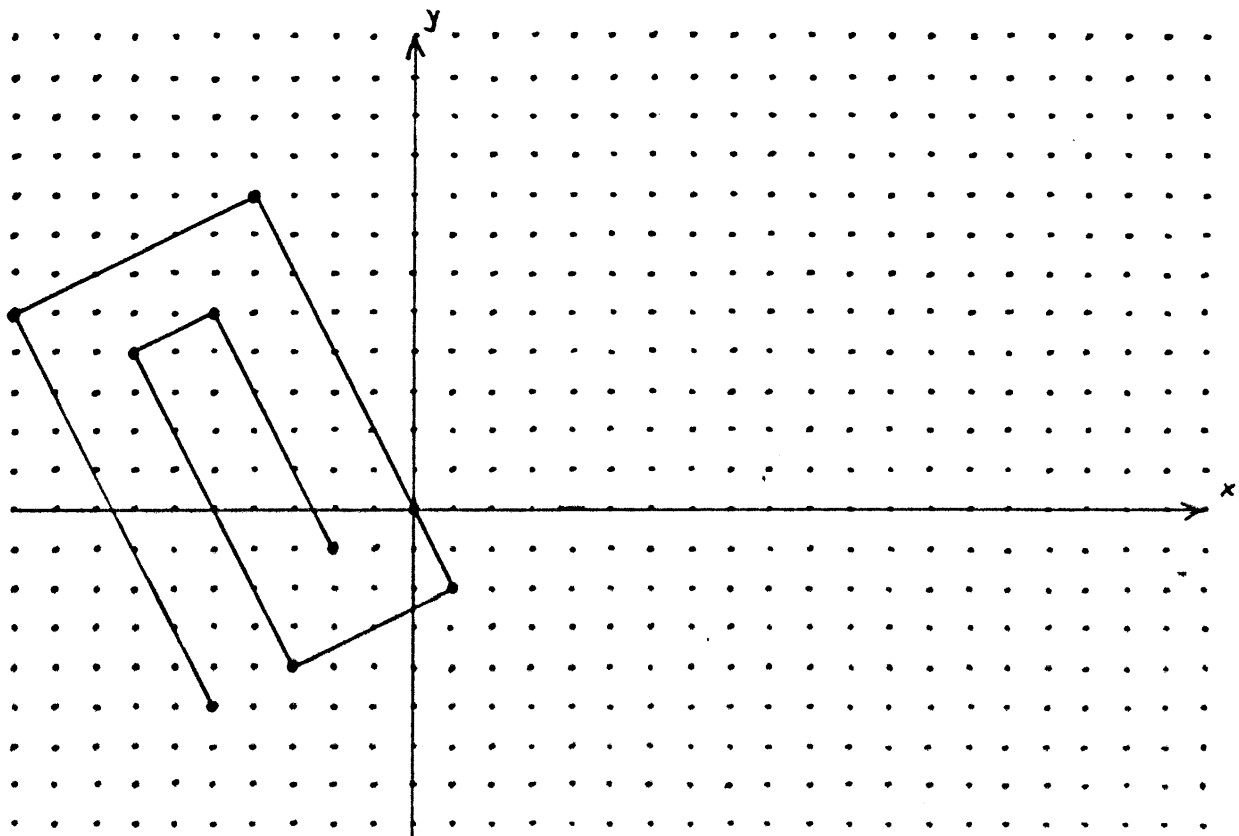
1. On appelle **affinité** de direction Ox , d'axe Oy et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) la transformation du plan Oxy définie par $(x, y) \mapsto (kx, y)$. De même, on définit l'affinité de direction Oy , d'axe Ox et de rapport k par $(x, y) \mapsto (x, ky)$.

Dessiner l'image du triangle ABC par :

- 1) l'affinité de direction Ox , d'axe Oy et de rapport 3.
- 2) l'affinité de direction Ox , d'axe Oy et de rapport $1/3$.
- 3) l'affinité de direction Ox , d'axe Oy et de rapport -2 .
- 4) l'affinité de direction Oy , d'axe Ox et de rapport $1/2$.
- 5) l'affinité de direction Oy , d'axe Ox et de rapport -1 .



2. Dessiner l'image de l'escargot par l'affinité de direction Ox , d'axe Oy et de rapport -2 .



3. Démontrer que *toute affinité est bijective*.

Rappel. $f : A \rightarrow B$ est bijective $\Leftrightarrow$ Tout $b \in B$ possède une et une seule préimage par f
 $\Leftrightarrow$ Il existe $g : B \rightarrow A$ telle que $g \circ f = \text{id}_A$ et $f \circ g = \text{id}_B$.

Indication. Soit a l'axe de l'affinité, $\vec{\delta}$ sa direction et λ son rapport. Choisir un repère (O, E_1, E_2) tel que $O \in a$, $E_1 \in a$ et $\overrightarrow{OE_2} \sim \vec{\delta}$. L'affinité s'écrit alors $(x; y) \mapsto (x; \lambda y)$.

4. Soit f une affinité d'axe a , de direction $\vec{\delta}$ et de rapport λ . Montrer que si les points A, B et C sont alignés ($A \neq B$), alors leurs images A', B' et C' par f le sont aussi.

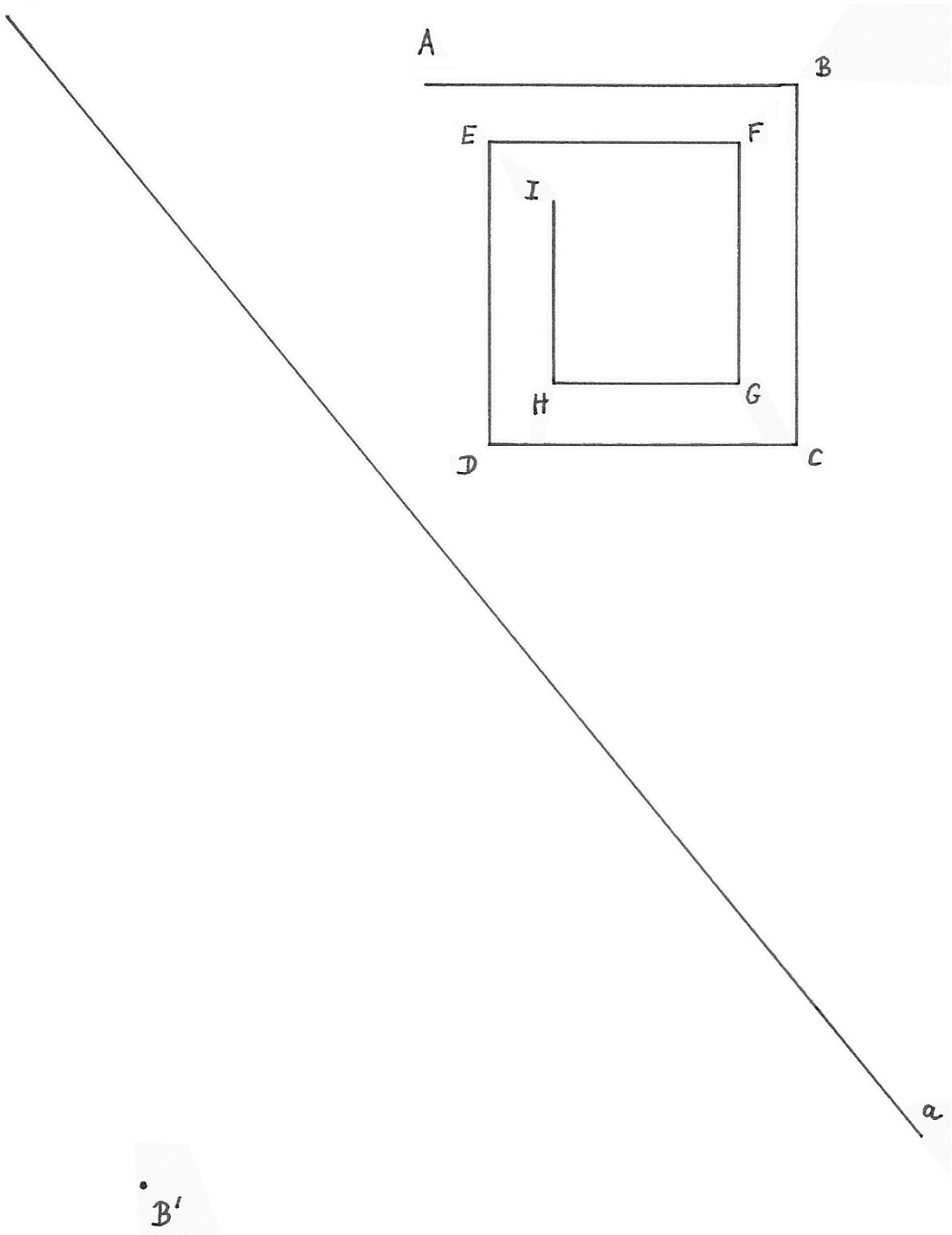
Indication. Introduire un repère "naturel" comme à l'exercice précédent, pour établir que si $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}$.

5. Démontrer que les images u' et v' de deux parallèles u et v par une affinité sont parallèles.

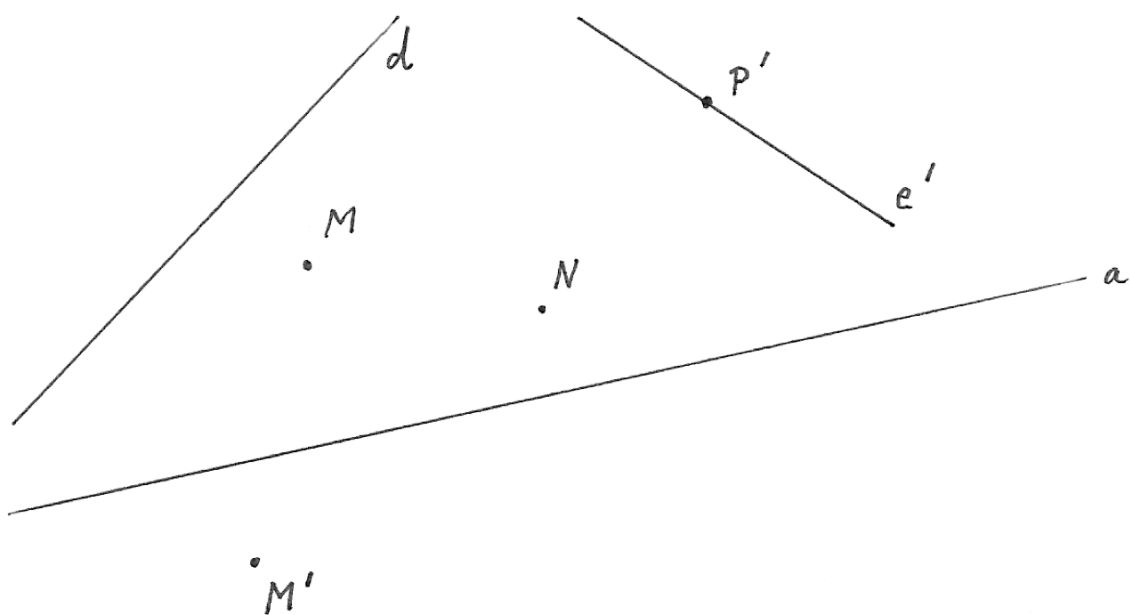
Indications.

- Supposons qu'il existe $P' \in u' \cap v'$. Alors...
- Il faudra utiliser la bijectivité de l'affinité.

6. Construire l'image de la ligne brisée $ABCDEFGHI$ par l'affinité d'axe a amenant B sur B' .



7. On donne une affinité par son axe a , un point $M \notin a$ et son image M' . Construire l'image du point N et celle de la droite d . Construire la préimage du point P' et celle de la droite e' .

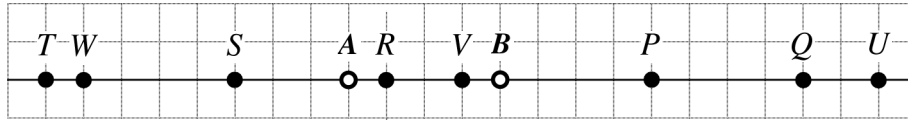


8. Soient A , B et P trois points alignés, avec $A \neq B$. Nous appellerons¹ **rapport de section** $(AB; P)$ le nombre réel α vérifiant :

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AB}$$

Le rapport de section donne la position du point P sur la droite AB .

a) On considère les points suivants :



Déterminer :

$(AB; P)$	$(AB; Q)$	$(AB; R)$	$(AB; S)$
$(AB; T)$	$(AB; U)$	$(AB; V)$	$(AB; W)$

b) Sur une droite AB [prendre $AB = 6$ carrés], placer les points P , Q , R , S , T , U , V et W définis par :

$(AB; P) = 0$	$(AB; Q) = 1$	$(AB; R) = 2$	$(AB; S) = -1$
$(AB; T) = \frac{1}{2}$	$(AB; U) = -\frac{3}{2}$	$(AB; V) = \frac{17}{6}$	$(AB; W) = -0,5$

c) Démontrer qu'**une affinité conserve le rapport de section**.

Indications :

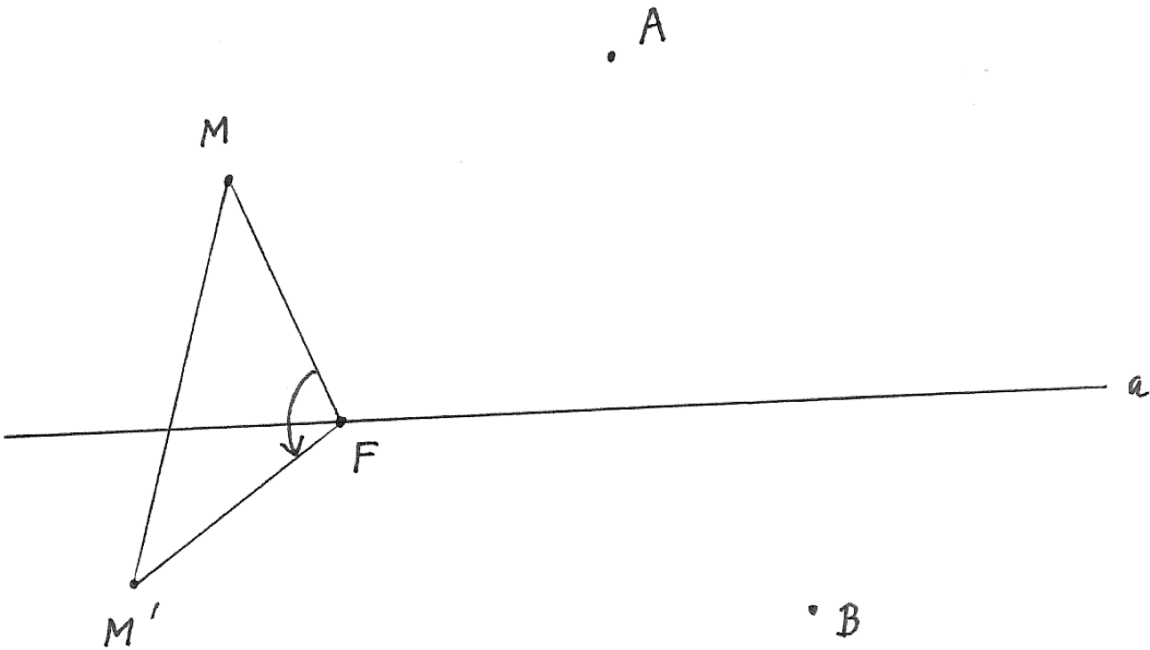
- Il faut établir ceci : $(AB; P) = (A'B'; P')$;
- Introduire le repère « adapté » habituel (O, E_1, E_2) , O et E_1 étant sur l'axe de l'affinité et OE_2 ayant la direction de l'affinité.

Rép. a) $2; 3; \frac{1}{4}; -\frac{3}{4}; -2; 3,5; \frac{3}{4}; -1,75$

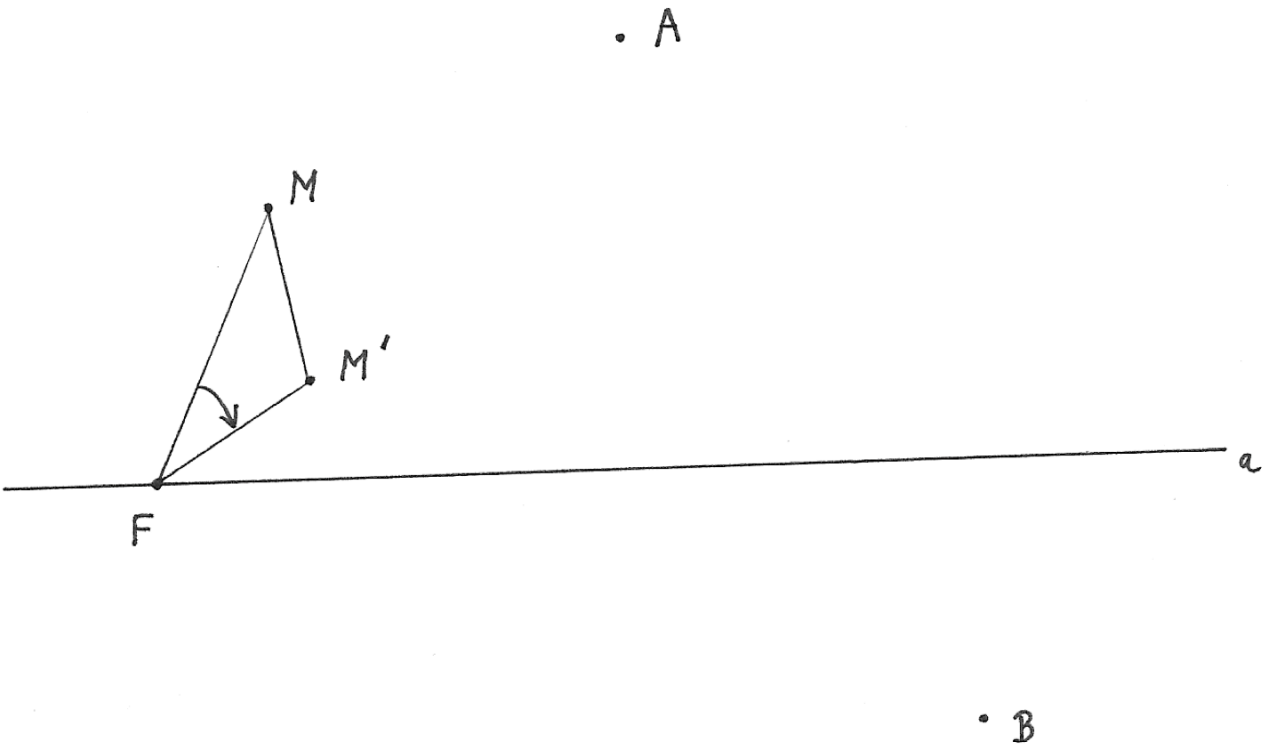
¹ Définition non classique

19. Une affinité d'axe a envoie M sur M' . Construire les images des points A et B au moyen de triangles homothétiques à MFM' .

a)

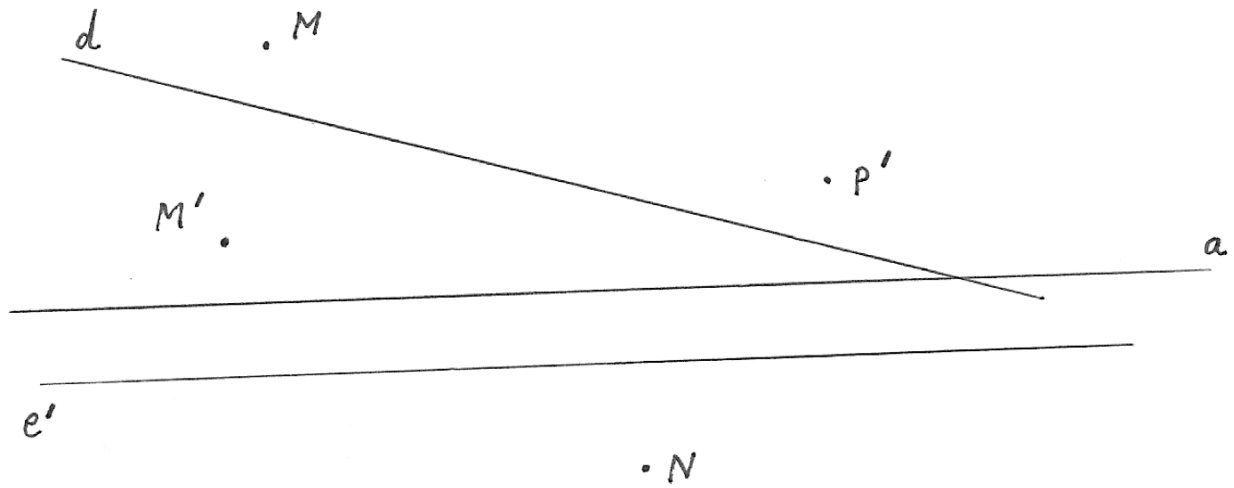


b)



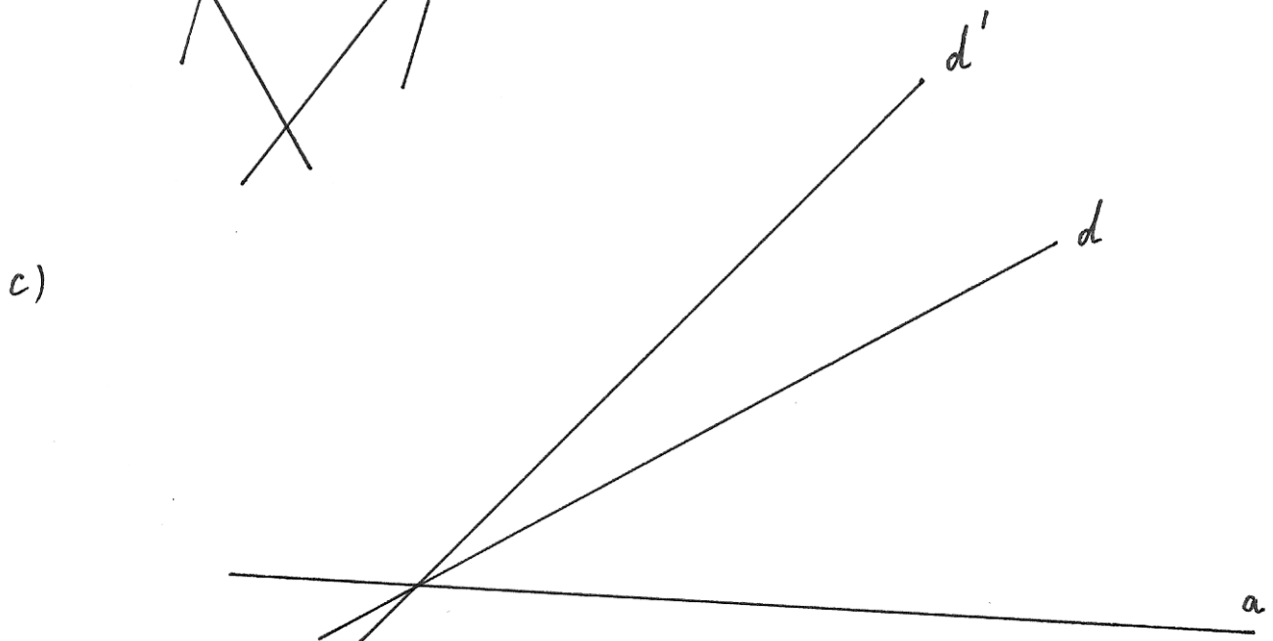
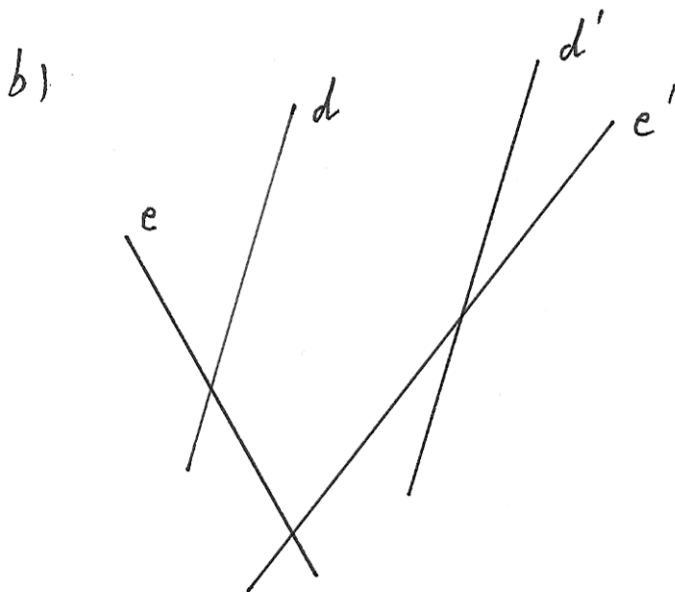
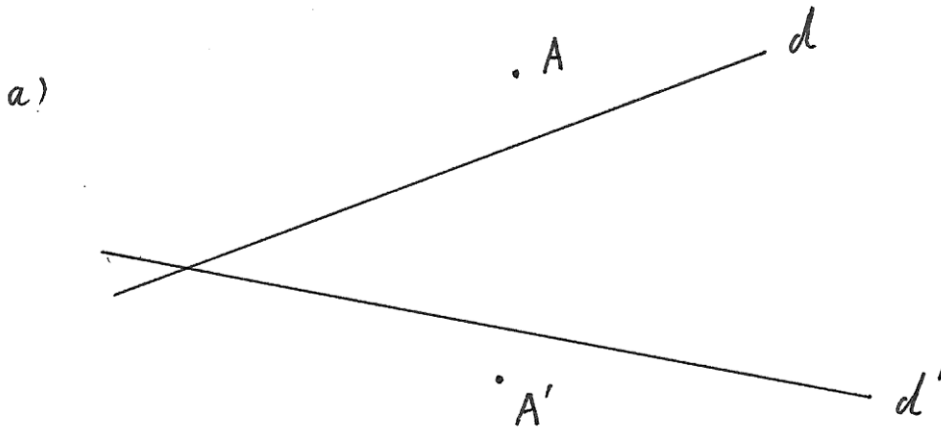
19 BIS. On donne une affinité par son axe a , un point $M \notin a$ et son image M' .

Construire l'image du point N et celle de la droite d . Construire la préimage du point P' et celle de la droite e' .



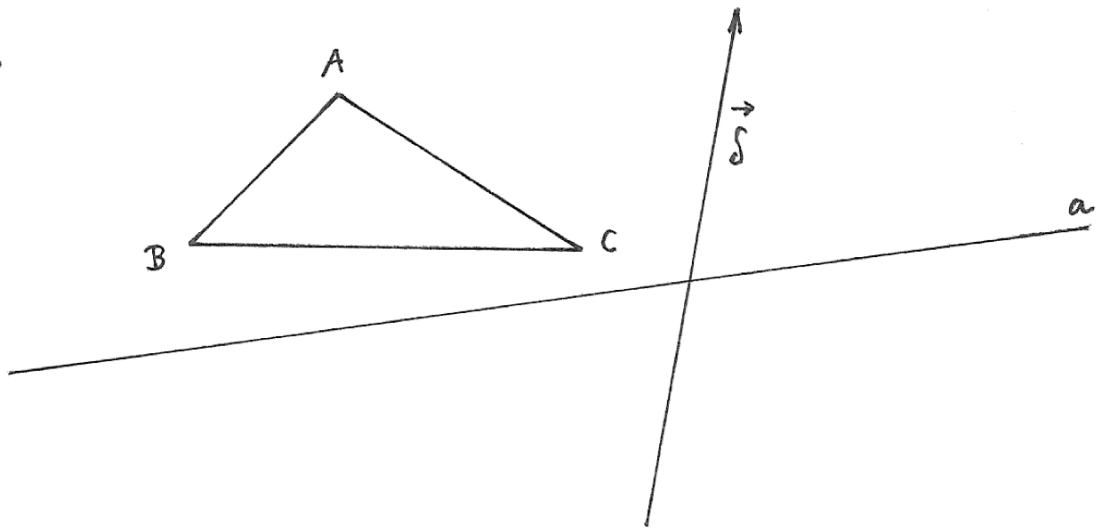
20.—

- a) Construire l'axe d'une affinité connaissant un point A et son image A' , ainsi qu'une droite d et son image d' .
- b) Déterminer l'axe et la direction d'une affinité connaissant deux droites d et e et leurs images d' et e' .
- c) Déterminer la direction d'une affinité connaissant son axe a , une droite d et son image d' , ainsi que le rapport $\lambda = 3/2$.

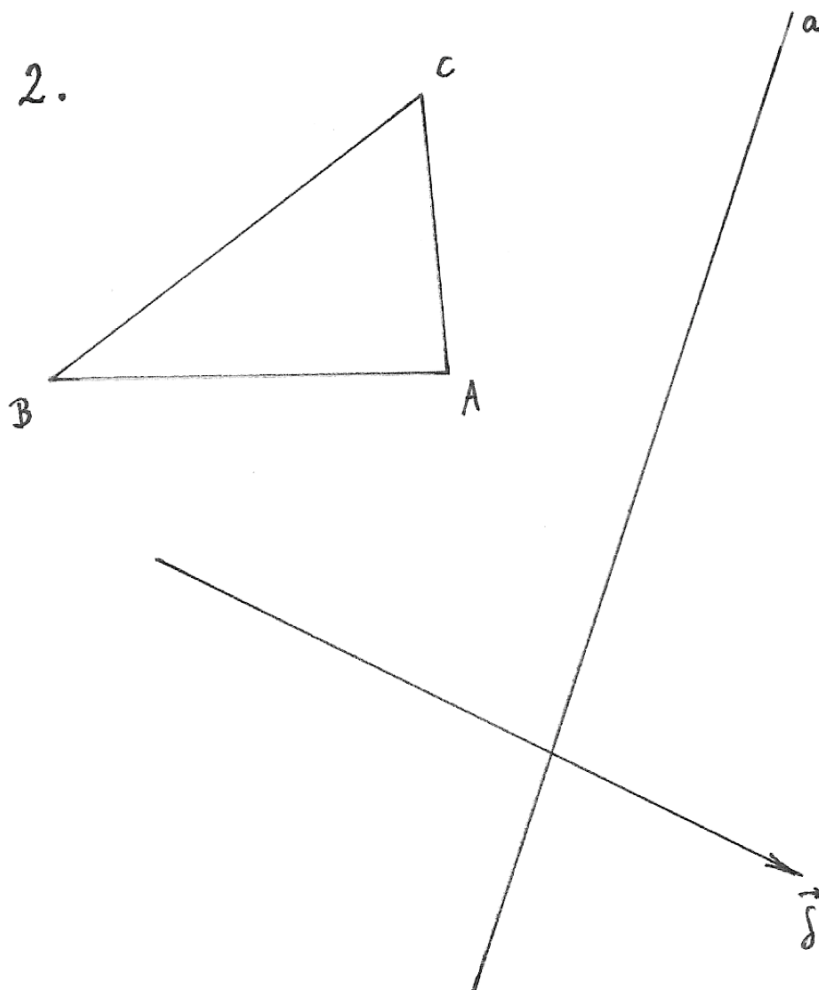


21. L'image $A'B'C'$ d'un triangle ABC par une affinité d'axe a et de direction $\vec{\delta}$ est un triangle rectangle en A' . Construire $A'B'C'$.

1.

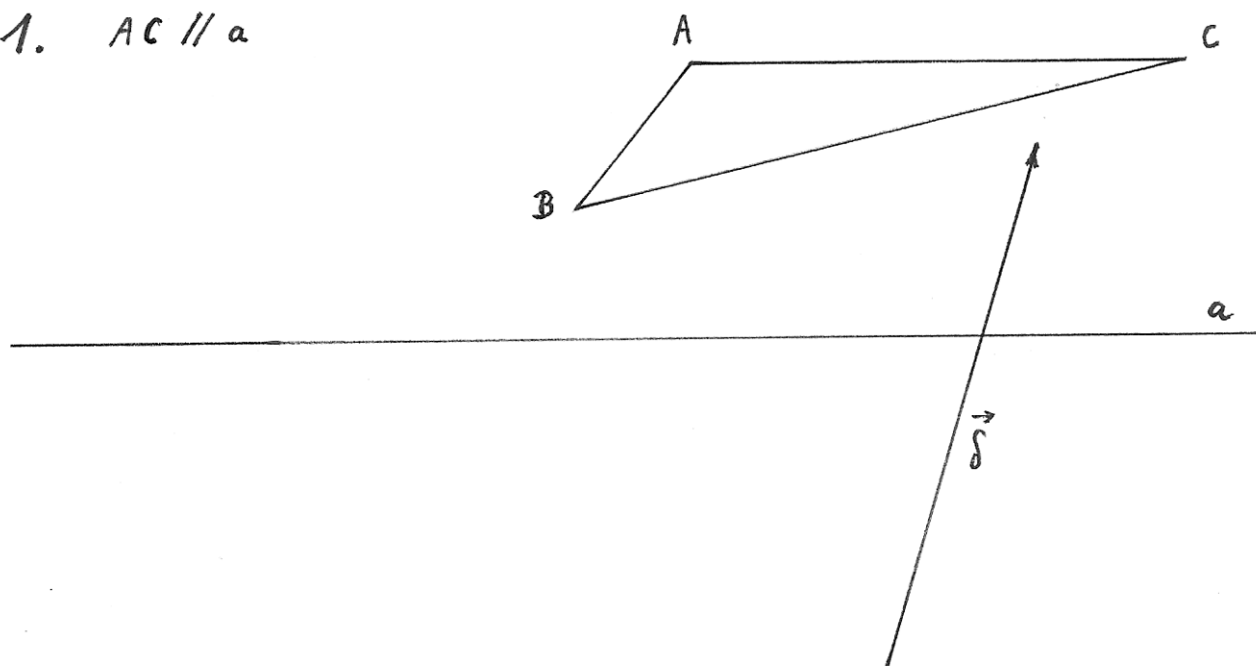


2.



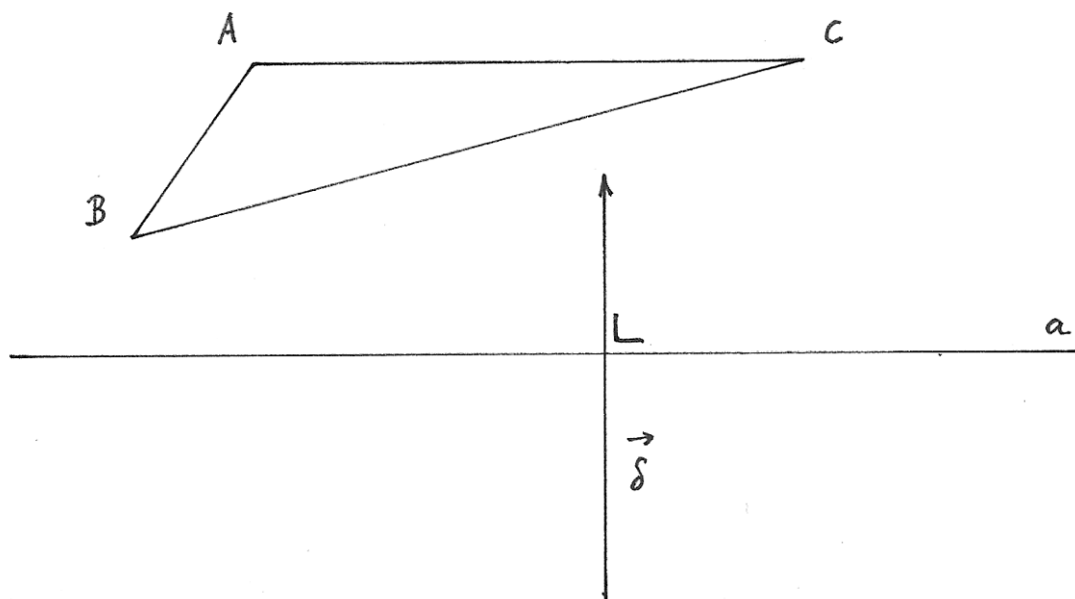
22. L'image $A'B'C'$ d'un triangle ABC par une affinité d'axe a et de direction $\vec{\delta}$ est un triangle rectangle en A' . Construire $A'B'C'$.

1. $AC \parallel a$

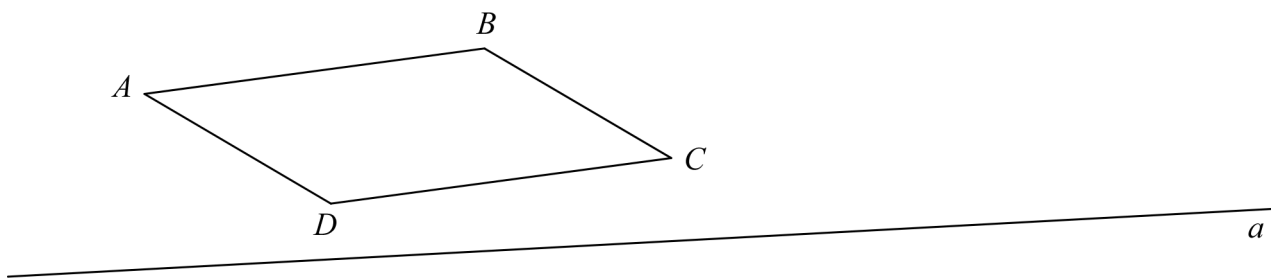


2.

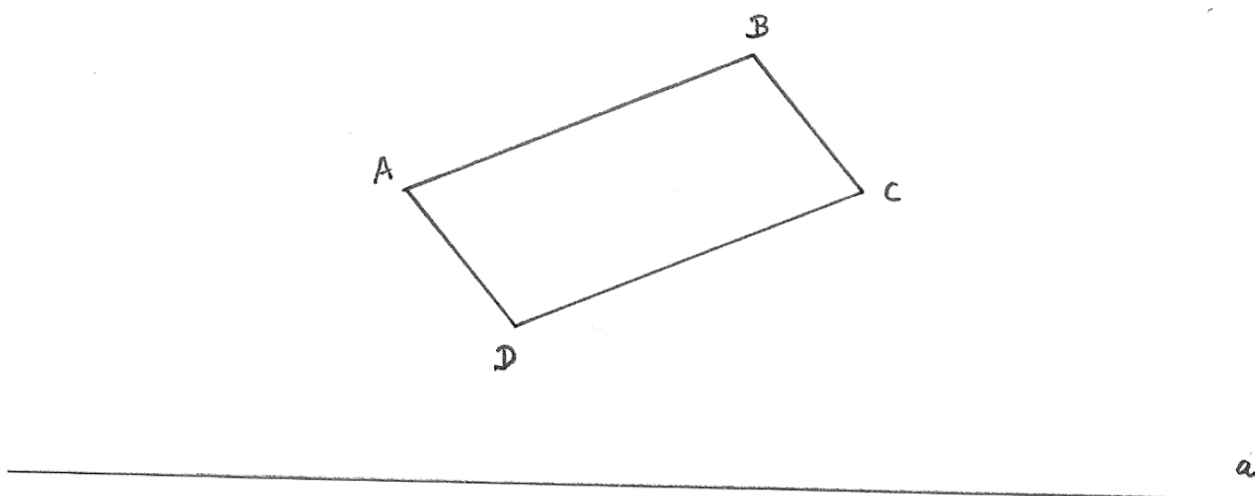
$AC \parallel a$



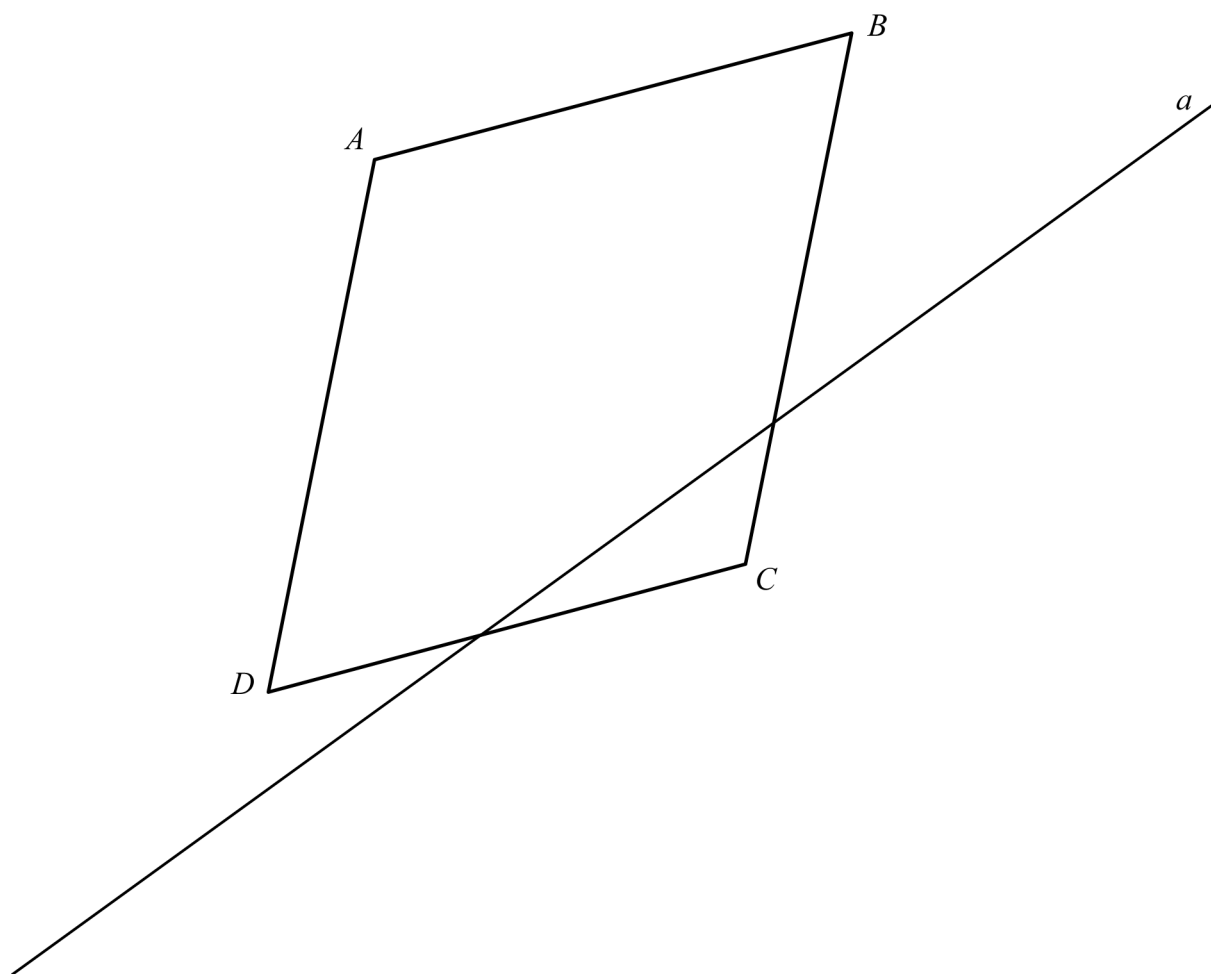
23. L'image du parallélogramme $ABCD$ par une affinité d'axe a et de rapport -2 est un losange. Construire ce losange.



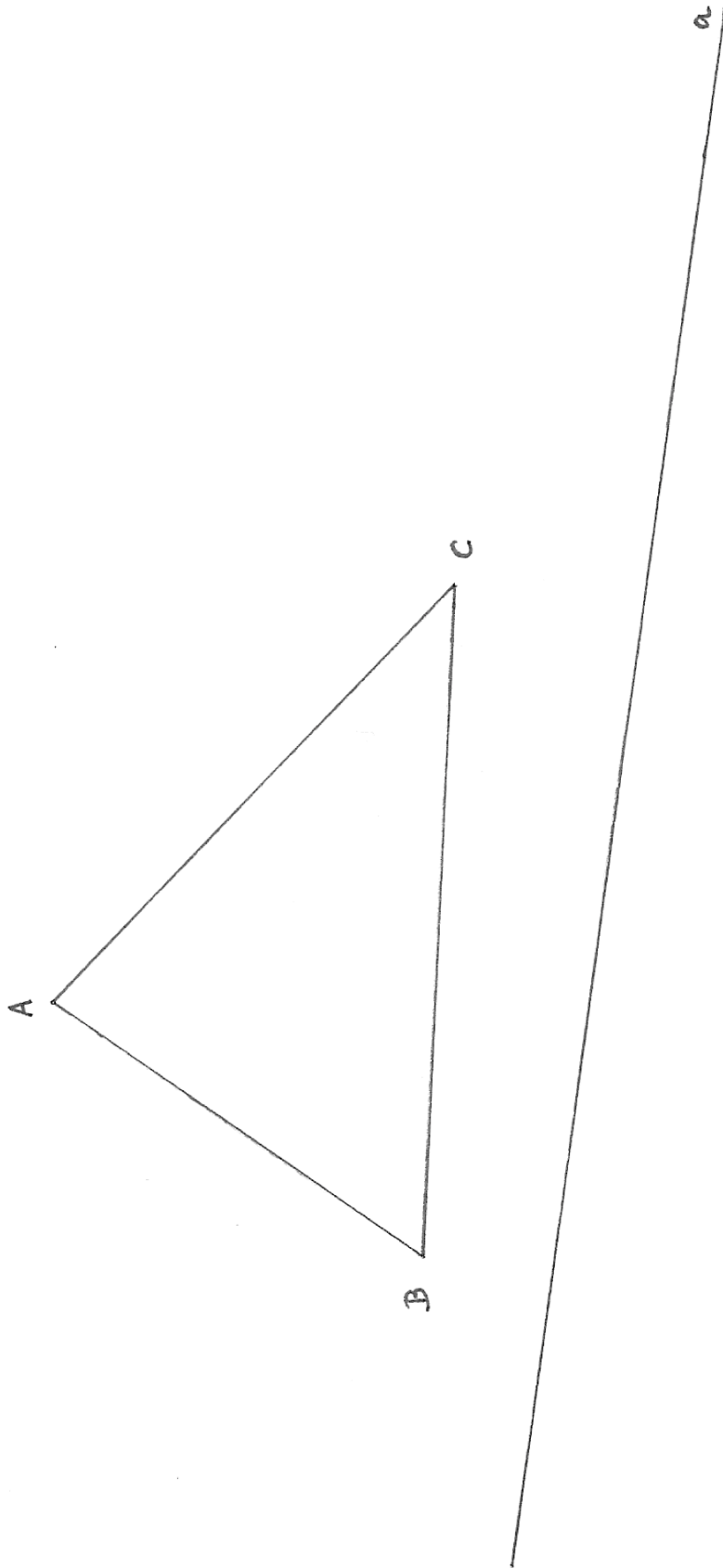
24. L'image du parallélogramme $ABCD$ par une affinité d'axe a est un rectangle $A'B'C'D'$ de même aire que $ABCD$. Construire $A'B'C'D'$.



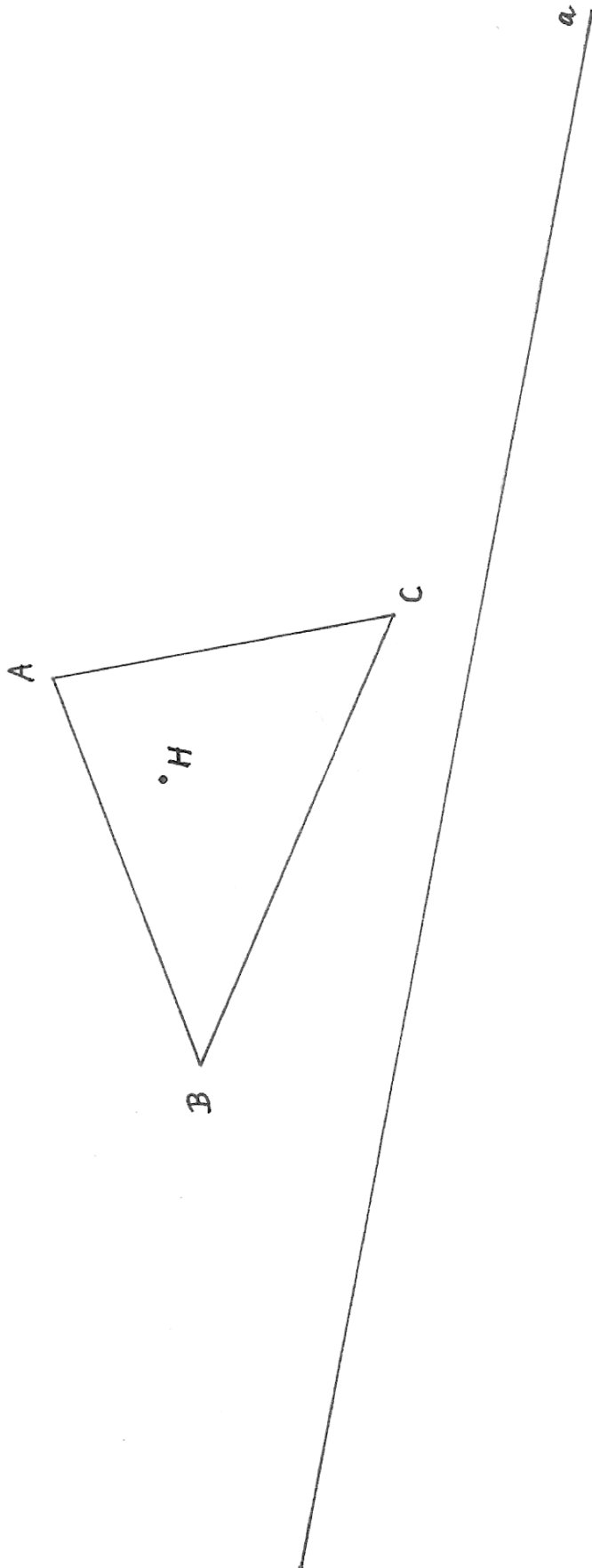
25. L'image du parallélogramme $ABCD$ par une affinité d'axe a est un carré. Construire ce carré.



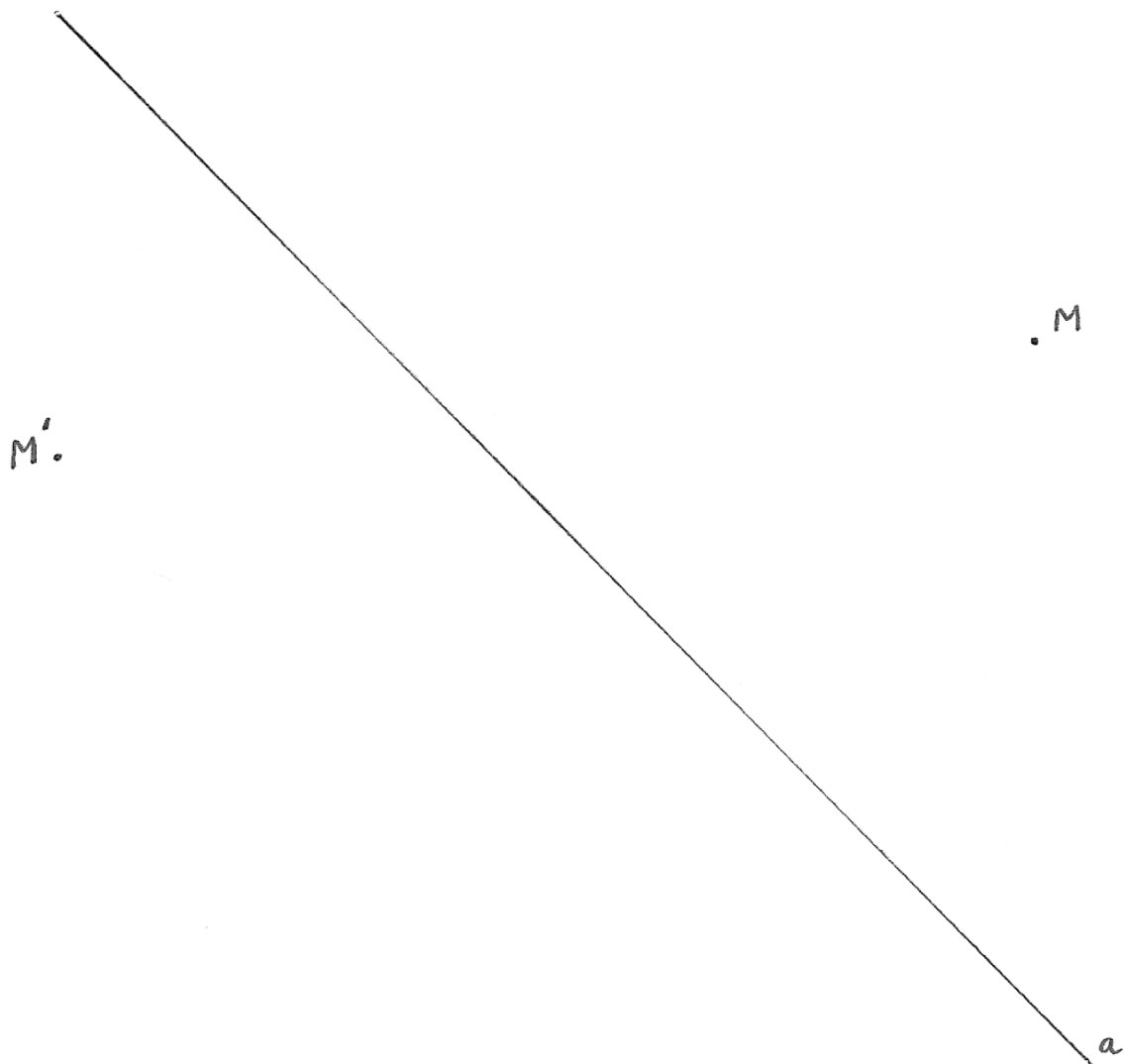
26. L'image $A'B'C'$ d'un triangle ABC par une affinité d'axe a est un triangle rectangle en A' dont l'aire mesure les $\frac{3}{4}$ de celle du triangle ABC . Construire $A'B'C'$.



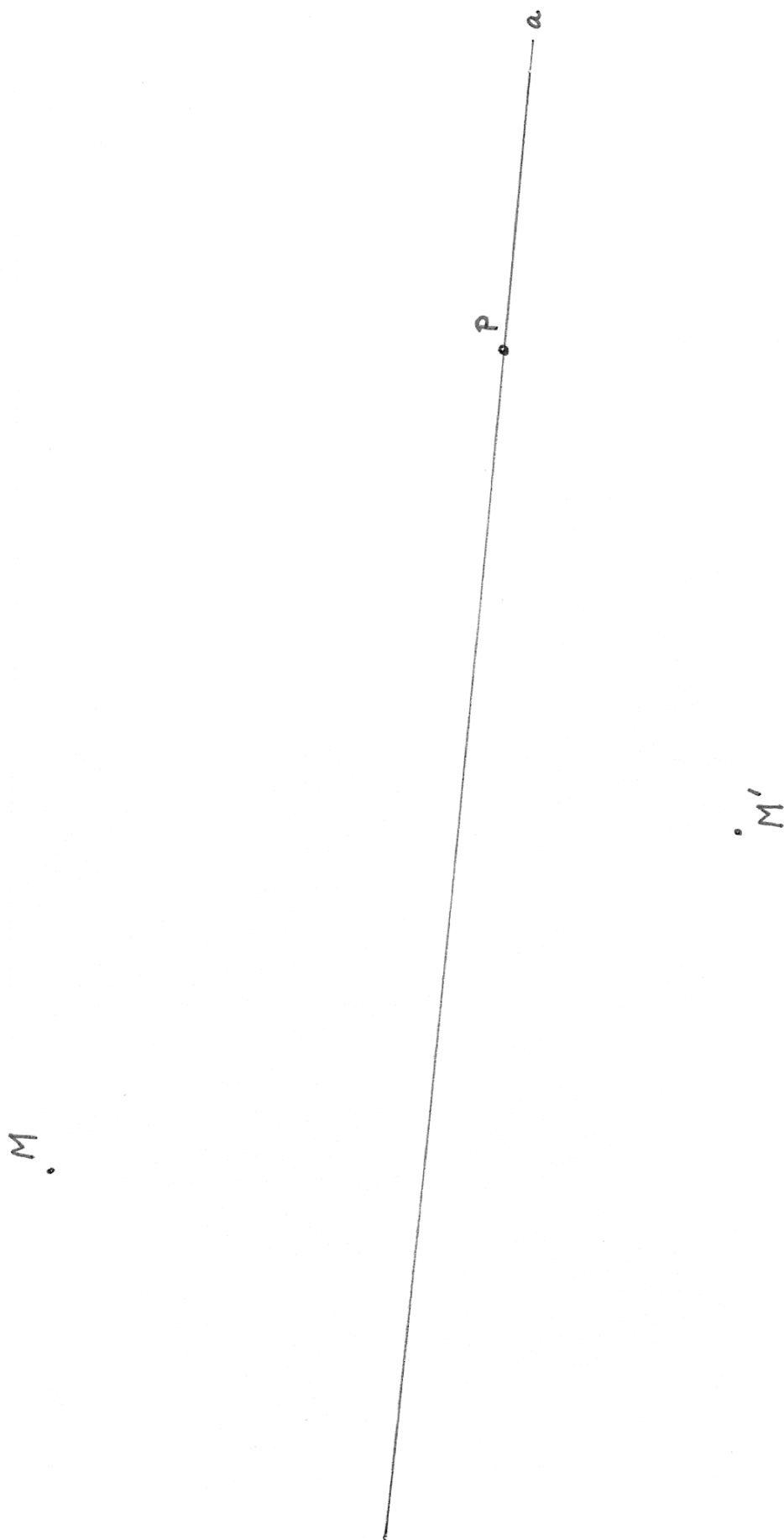
27. On donne l'axe a d'une affinité, un triangle ABC et un point H à l'intérieur de ce triangle. Construire l'image $A'B'C'$ de ABC , sachant que l'image de H est l'orthocentre de $A'B'C'$.



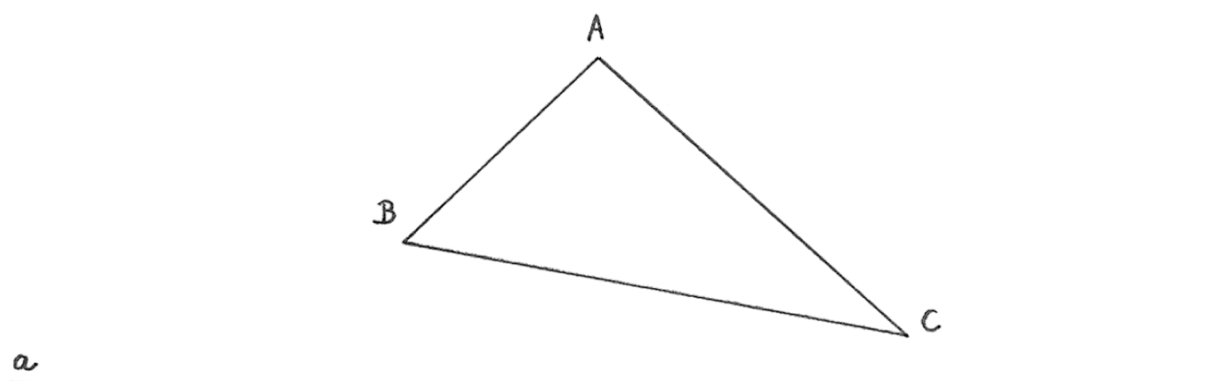
28. On donne une affinité par son axe a , un point M ($M \notin a$) et son image M' . Construire un rectangle $MNPQ$ dont le sommet P , opposé à M , est sur l'axe a , sachant que l'image de ce rectangle est un carré.



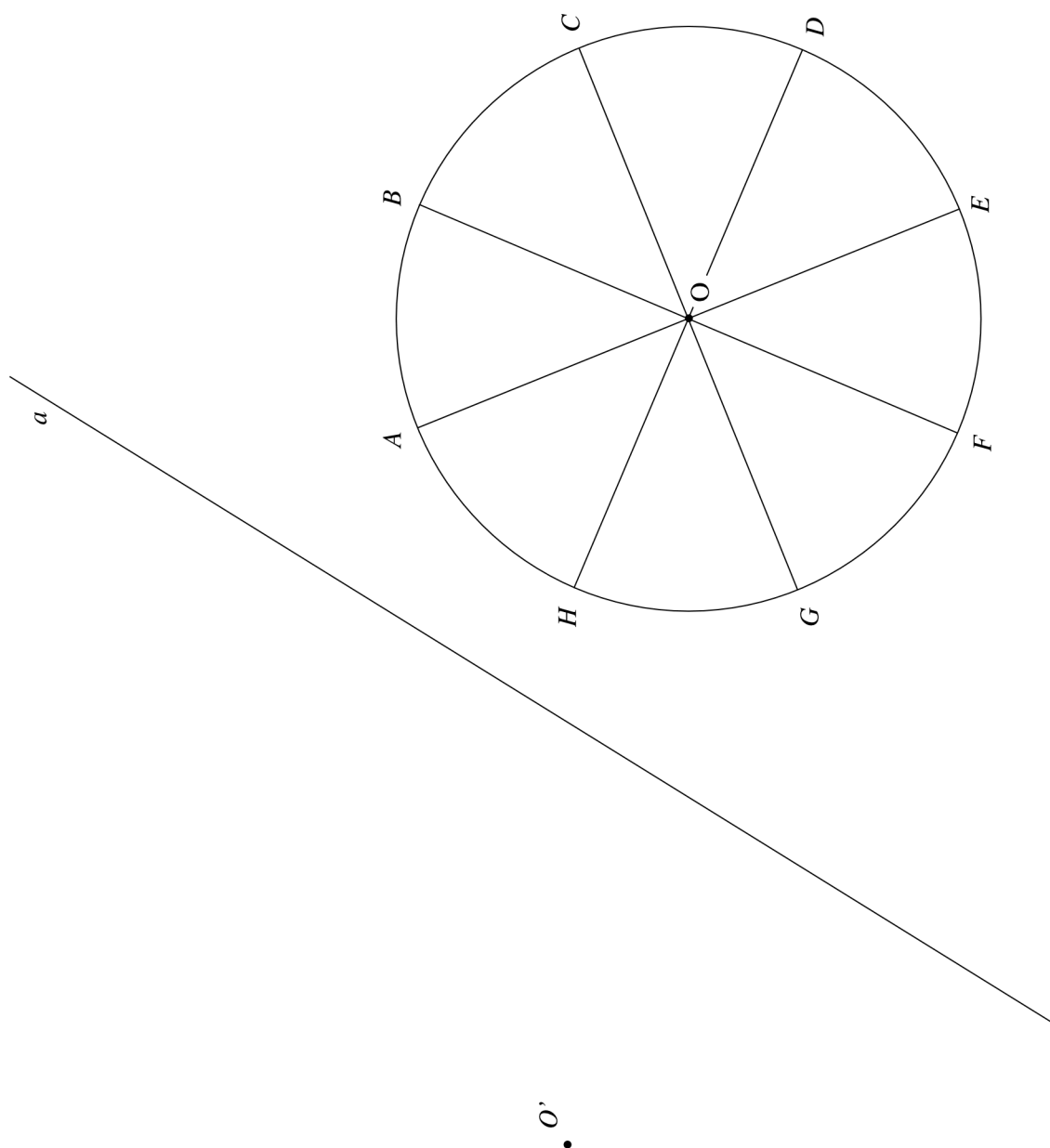
29. On considère l'affinité d'axe a amenant M sur M' . Par le point P de a , construire deux droites perpendiculaires b et c dont les images b' et c' sont également perpendiculaires.



30. On donne l'axe a d'une affinité, ainsi qu'un triangle ABC , de centre de gravité G . Déterminer l'image G' de G de manière que le triangle image $A'B'C'$ soit équilatéral.

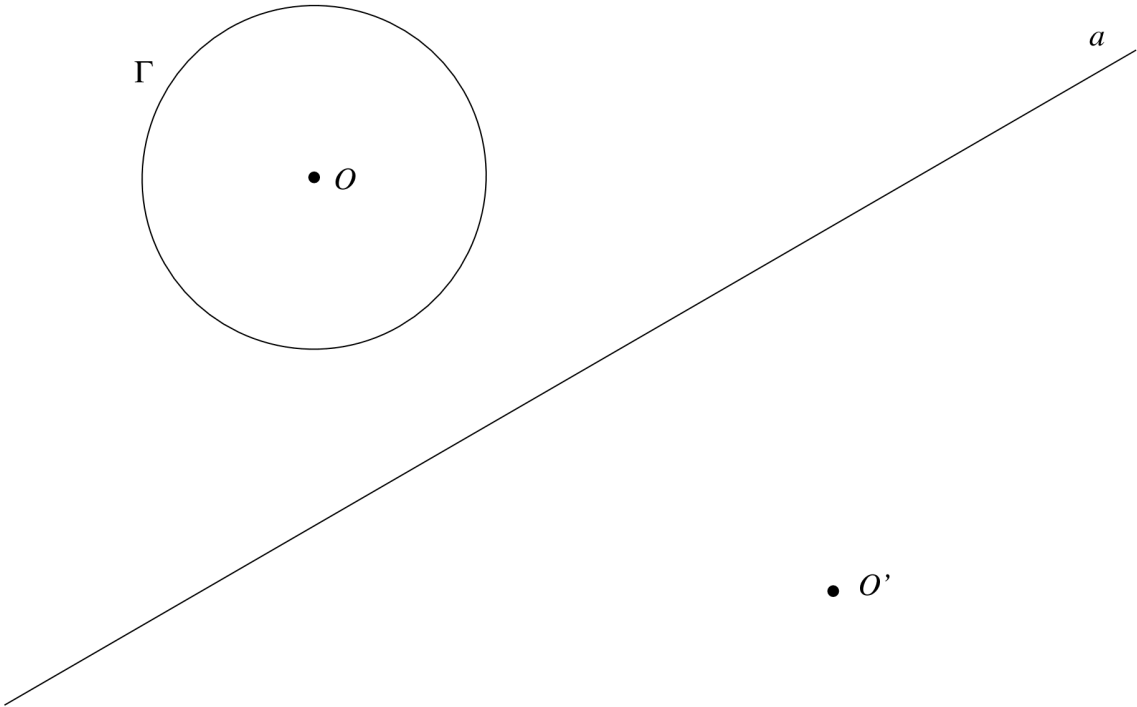


31. Construire l'image des 8 points marqués sur le cercle Γ de centre O par l'affinité d'axe a amenant O sur O' . Tracer par chacune des 8 images un segment de tangente à l'ellipse Γ' .

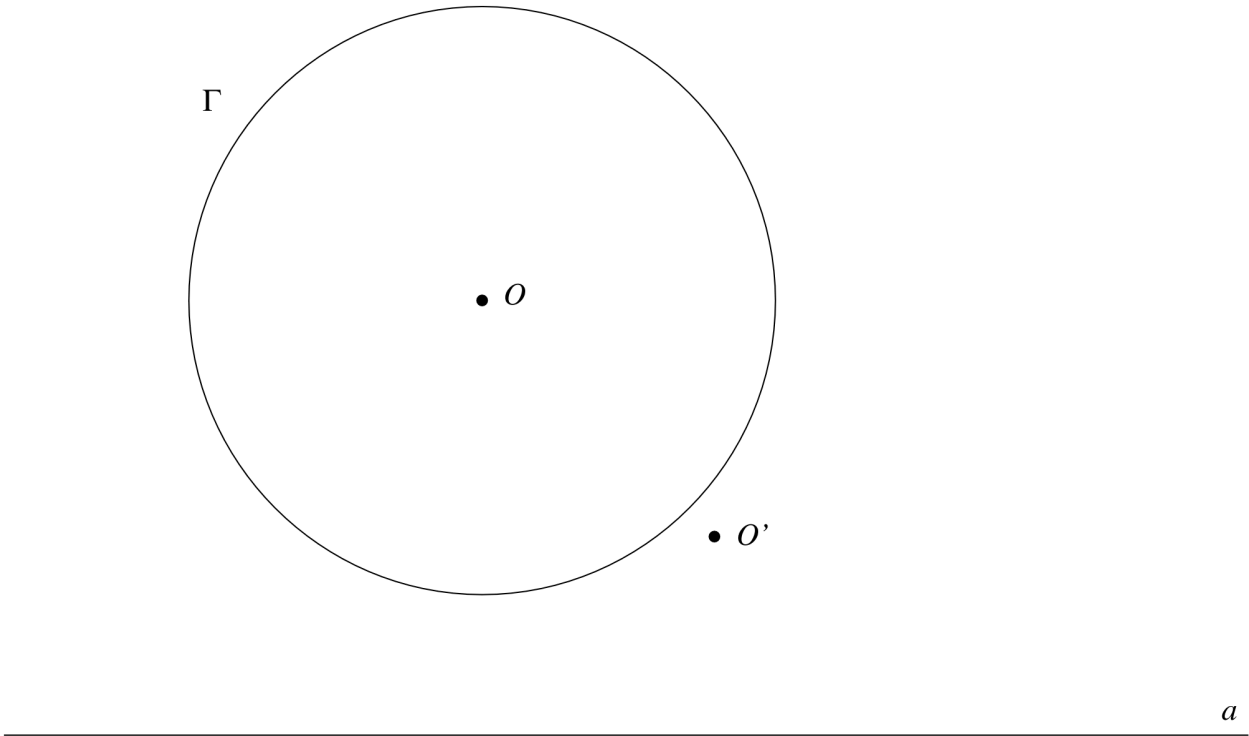


32. Construire les axes de l'ellipse Γ' image du cercle Γ par l'affinité d'axe a amenant O sur O' .

1)

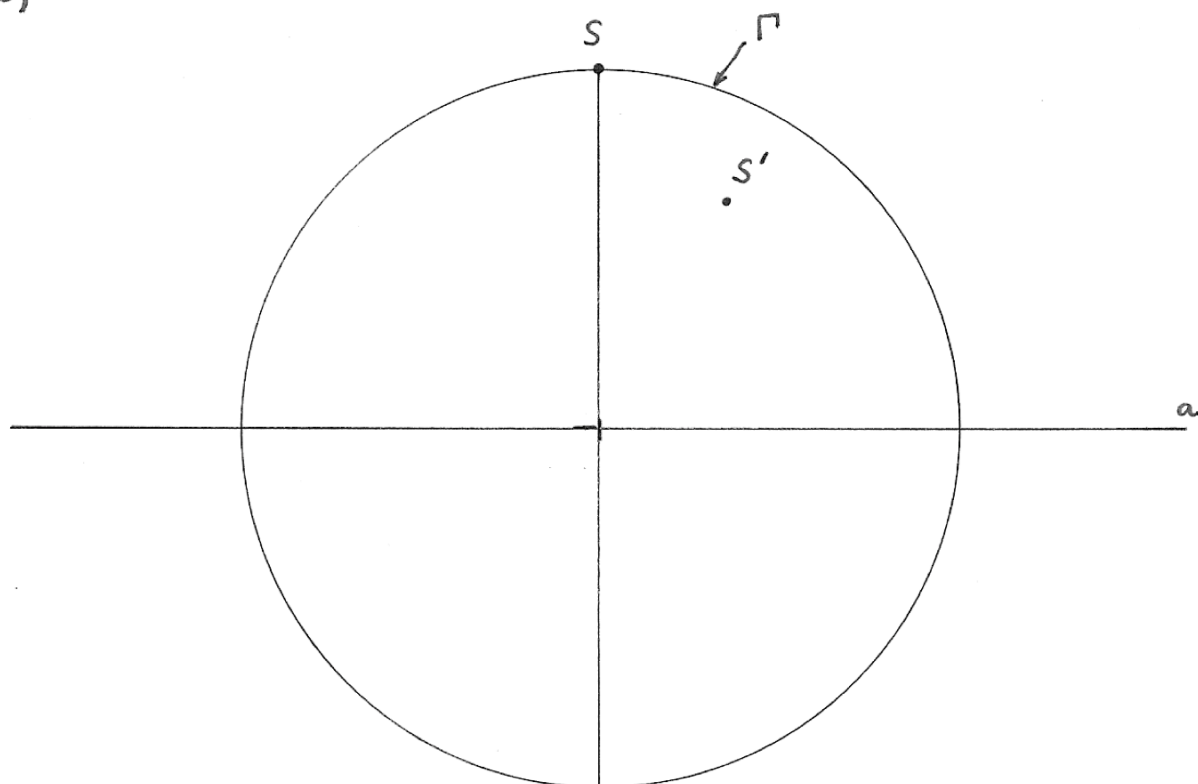


2)

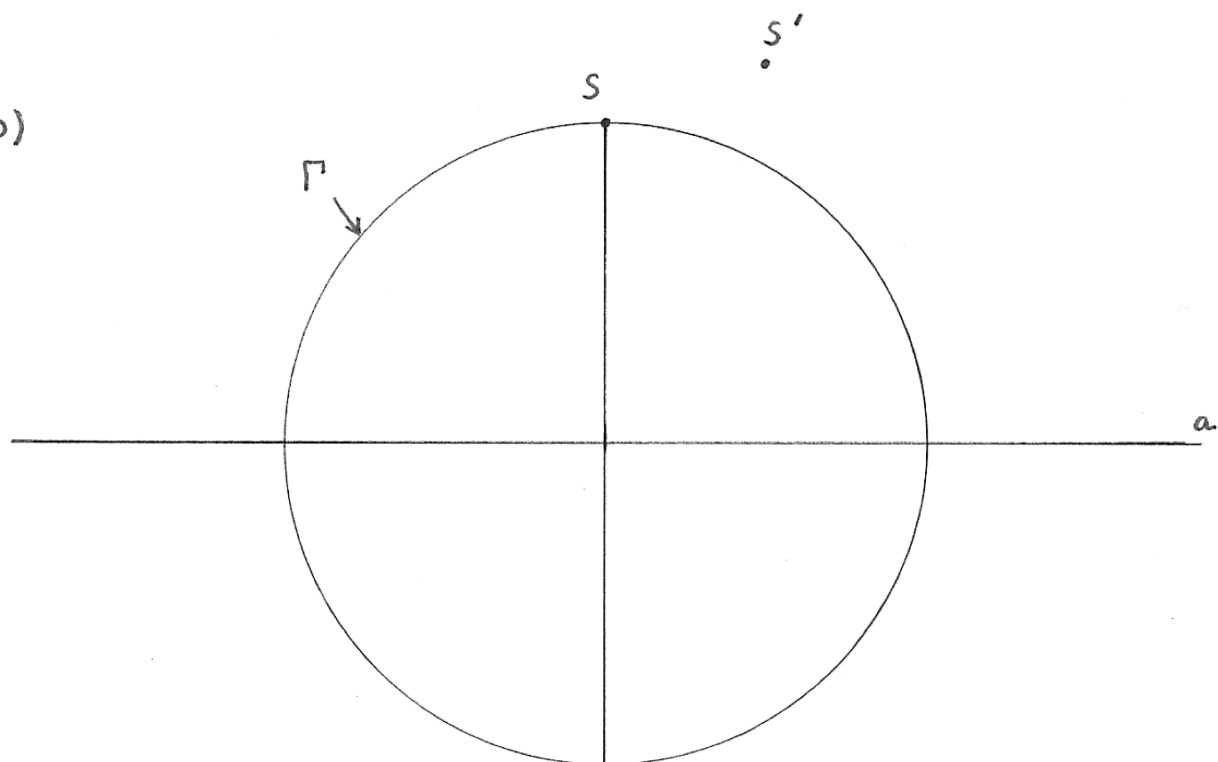


33. Construire l'image du cercle Γ par l'affinité d'axe a amenant S sur S' , en exploitant la propriété de conservation du parallélisme par une affinité.

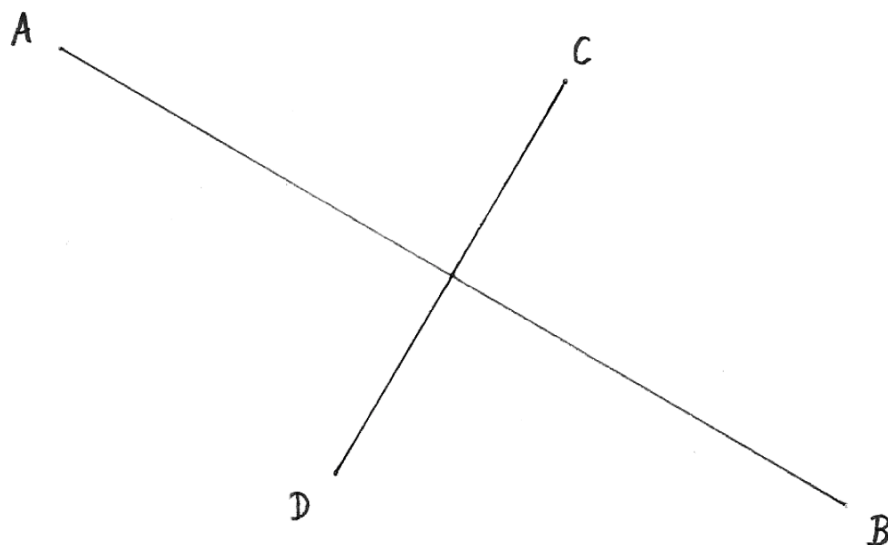
a)



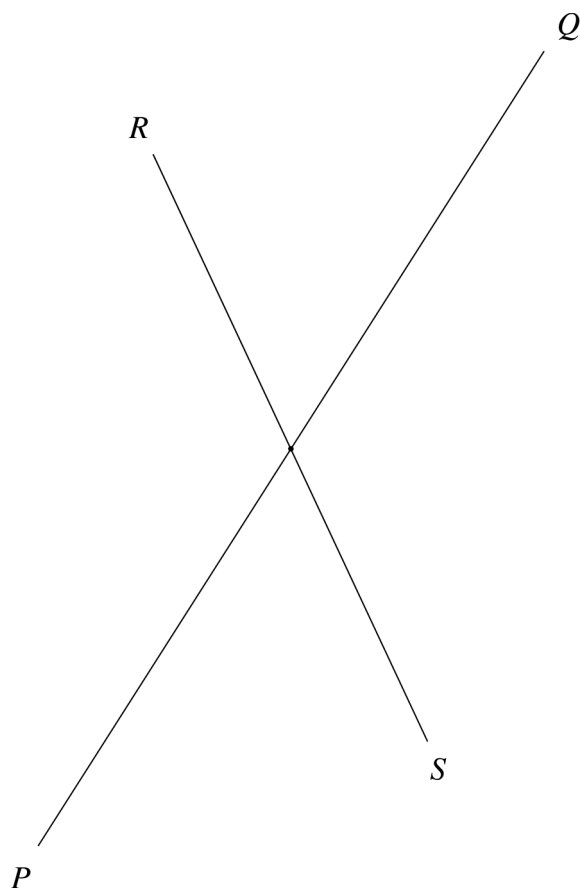
b)



34. Construire les quatre cercles de courbure de l'ellipse Γ dont les axes sont les segments AB et CD donnés ci-dessous, puis esquisser Γ .



35. Construire par la "méthode des triangles homothétiques" quelques points et tangentes d'une ellipse donnée par deux diamètres conjugués PQ et RS .

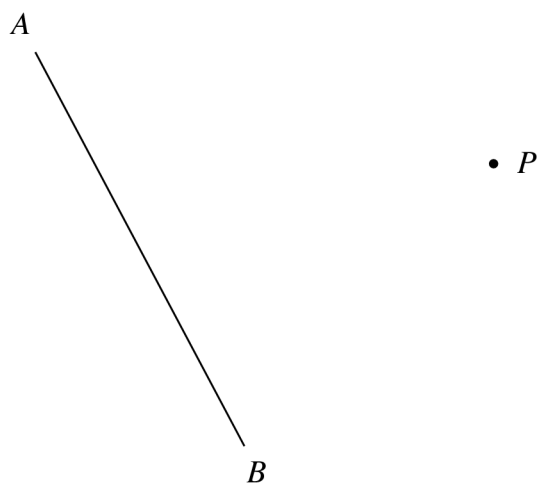


36. Construire le deuxième axe d'une ellipse d'axe AB passant par P .

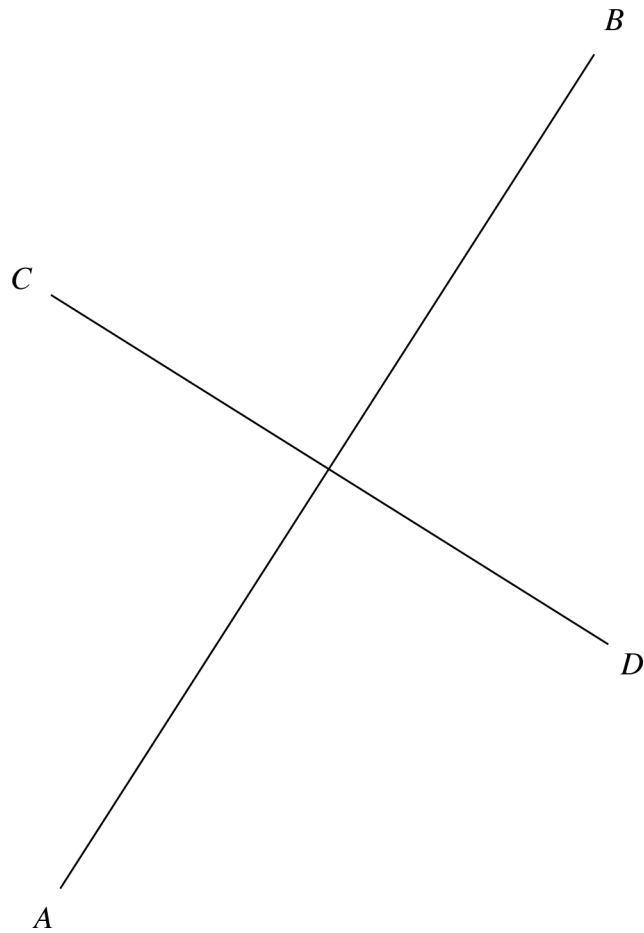
1)



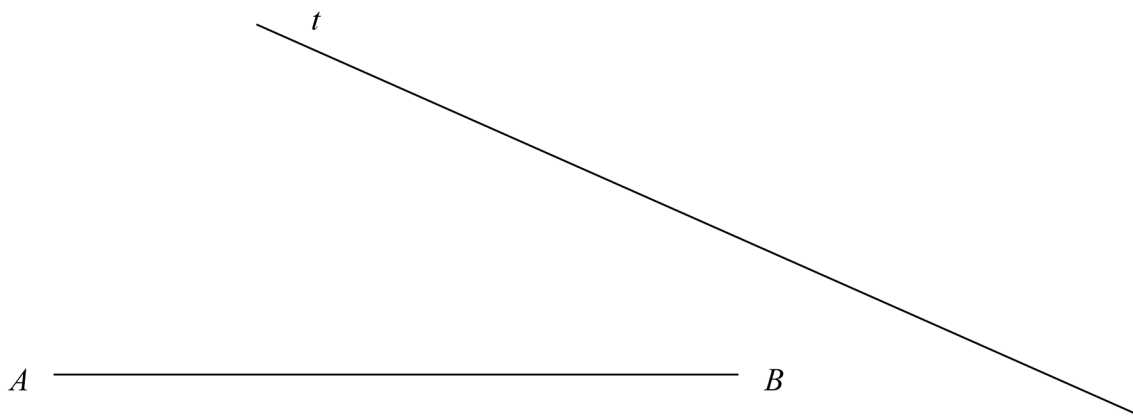
2)



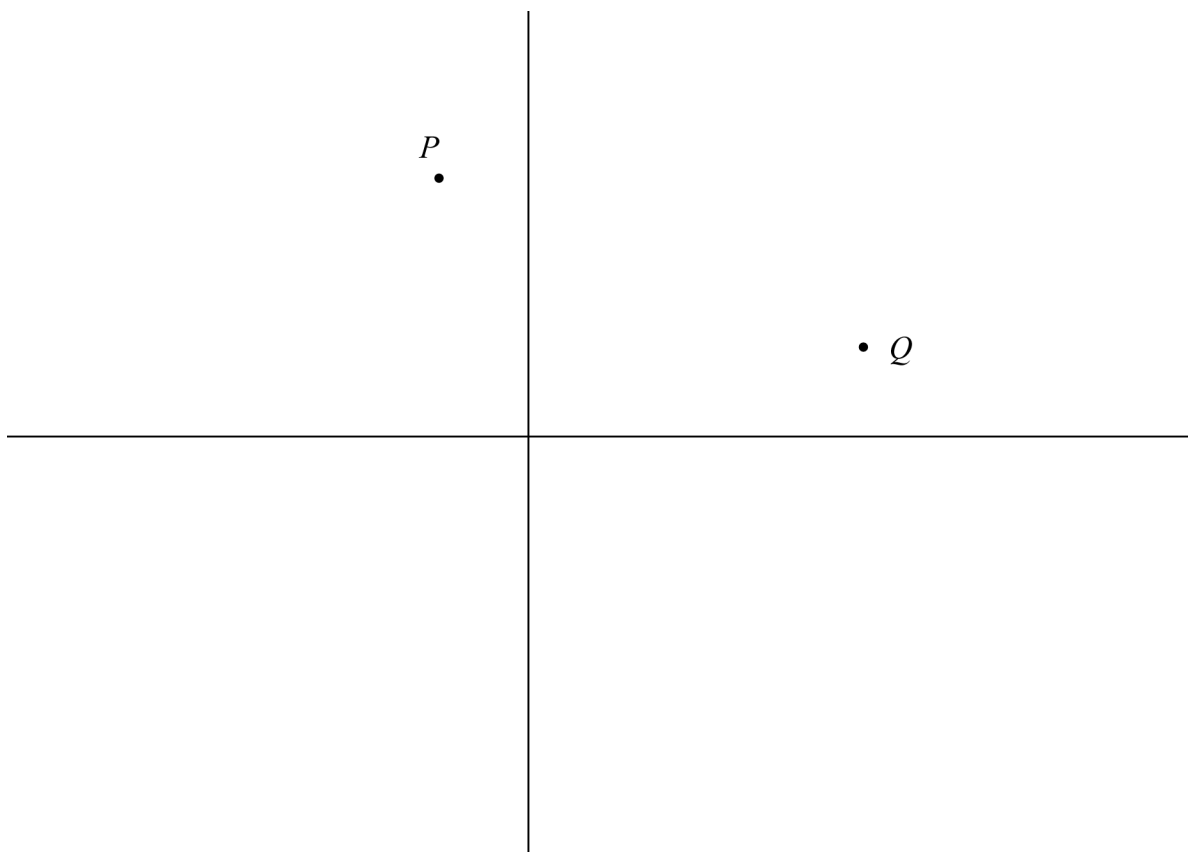
37. Construire par la "méthode des deux cercles" quelques points et tangentes d'une ellipse donnée par ses axes AB et CD .



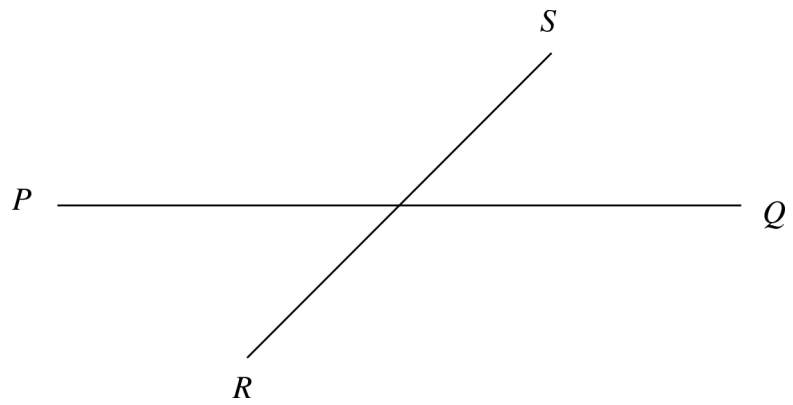
38. Construire une ellipse connaissant l'un des axes et une tangente :



38 BIS. Construire une ellipse connaissant les supports des axes et deux points.



39. Construire par la "méthode du cube" les axes d'une ellipse donnée par deux diamètres conjugués.

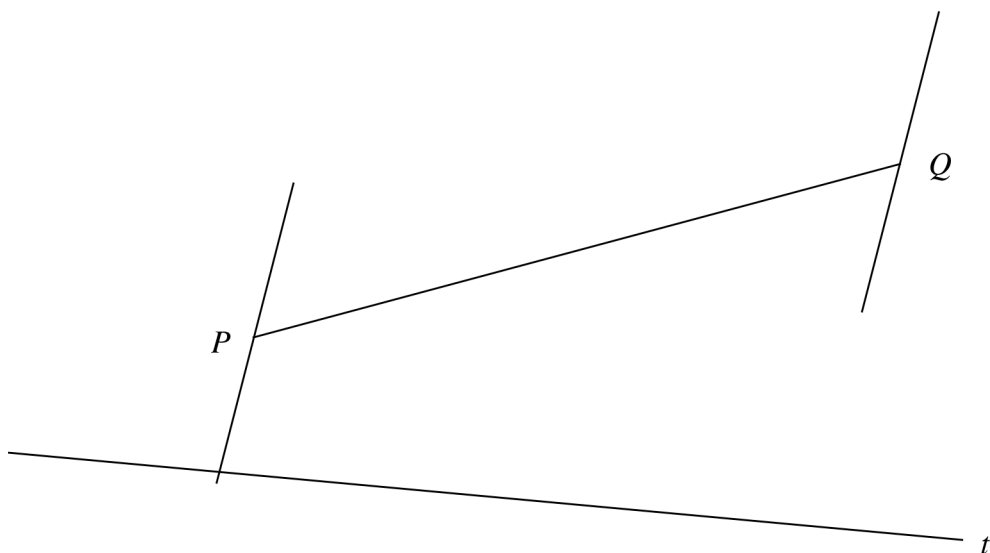


40. On donne un diamètre PQ d'une ellipse, ainsi que les tangentes aux extrémités de ce diamètre. Construire le diamètre conjugué RS de PQ connaissant un point M de l'ellipse.

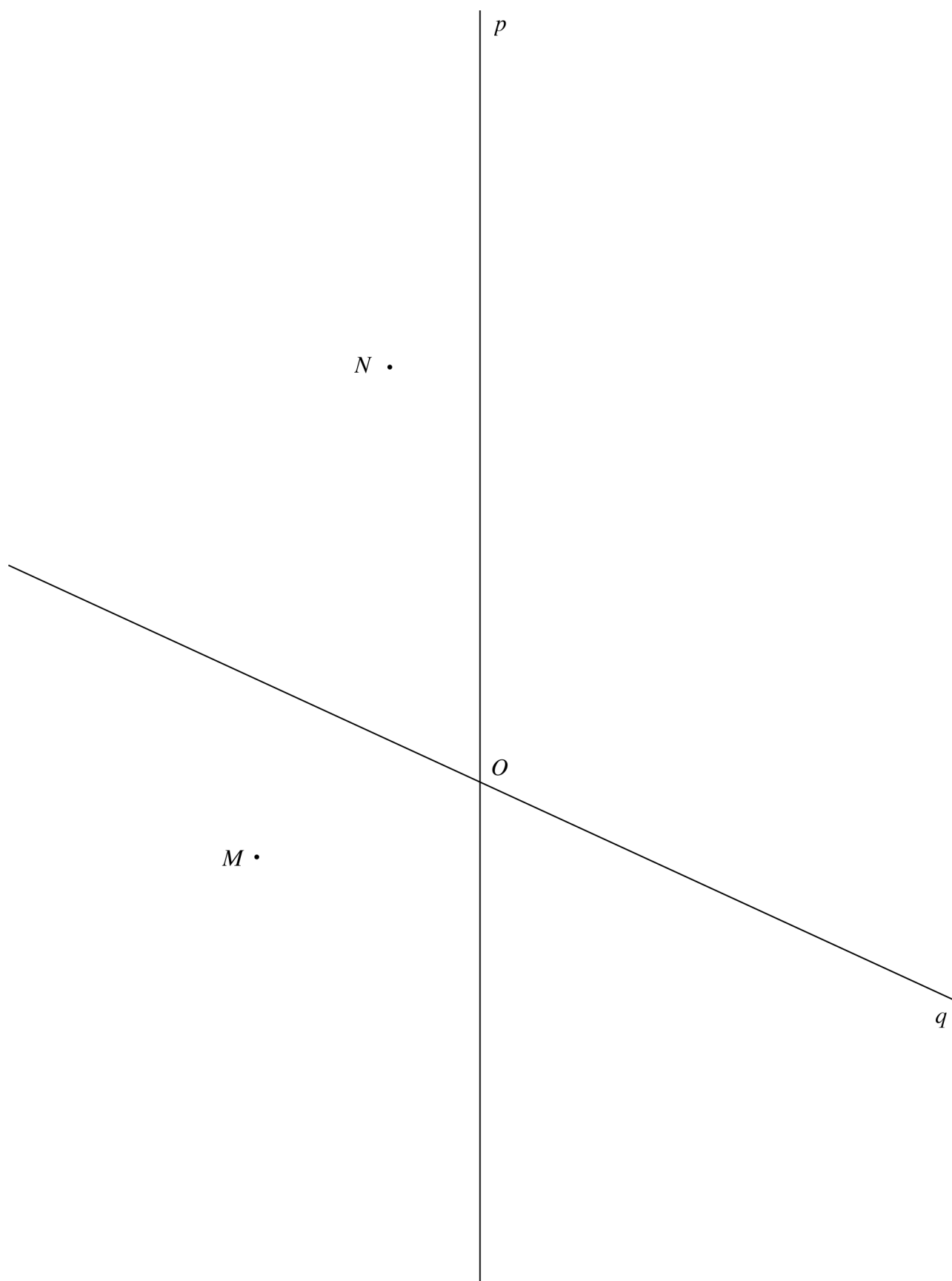
• M

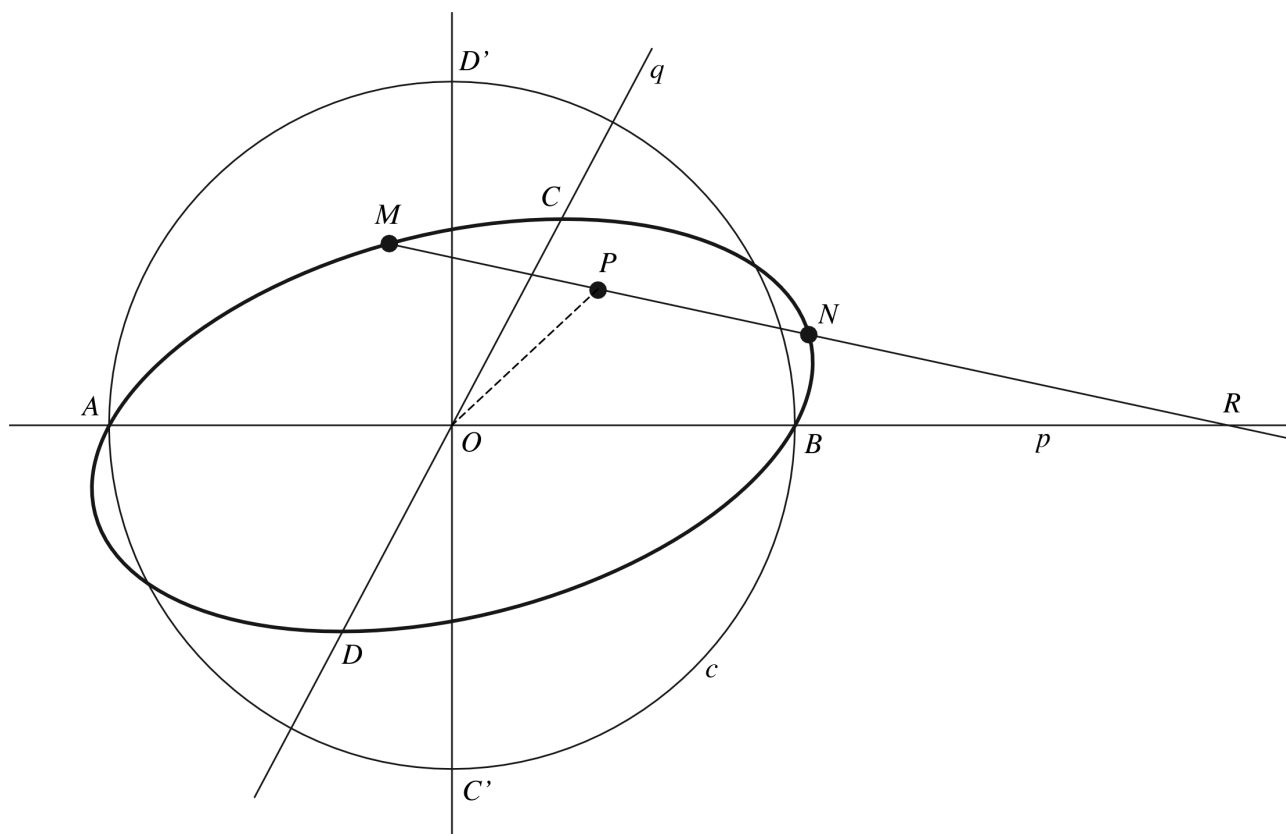


40 BIS. On donne un diamètre PQ d'une ellipse, ainsi que les tangentes aux extrémités de ce diamètre. Construire le diamètre conjugué RS de PQ connaissant une tangente t à l'ellipse.



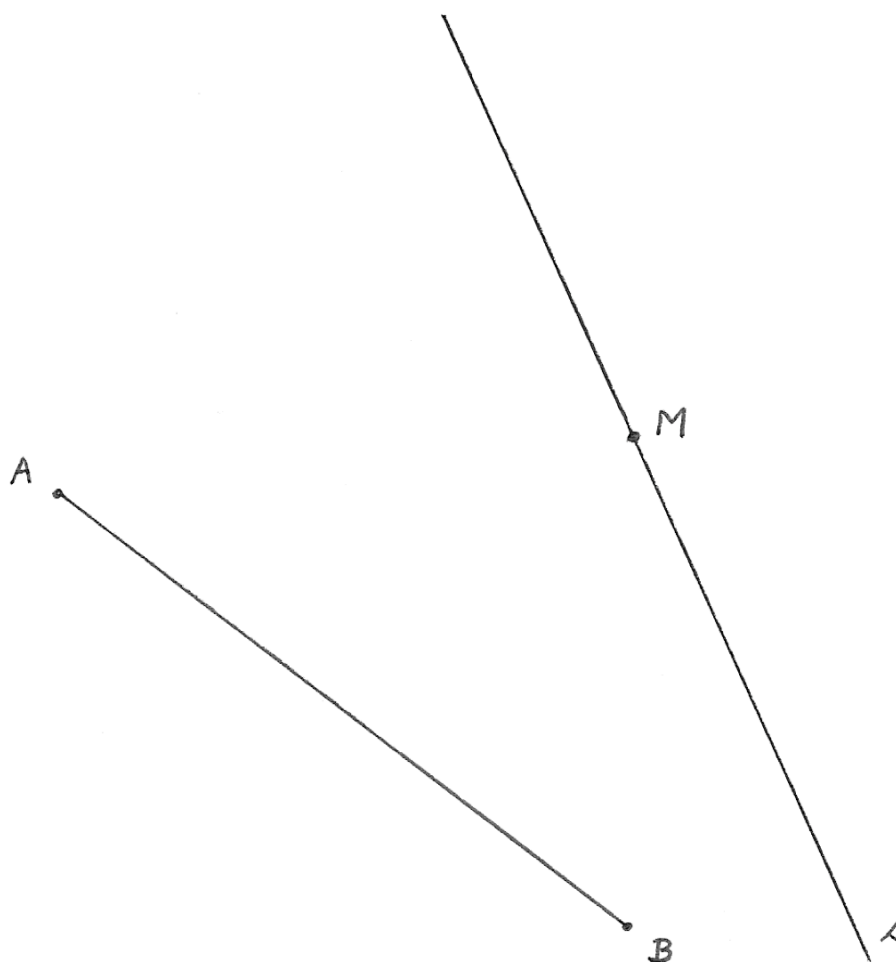
41. On donne les supports p et q de deux diamètres conjugués d'une ellipse Γ , ainsi que deux points M et N de Γ . Construire les extrémités de ces diamètres, puis quelques points et tangentes de l'ellipse. (*Indication à la page suivante.*)



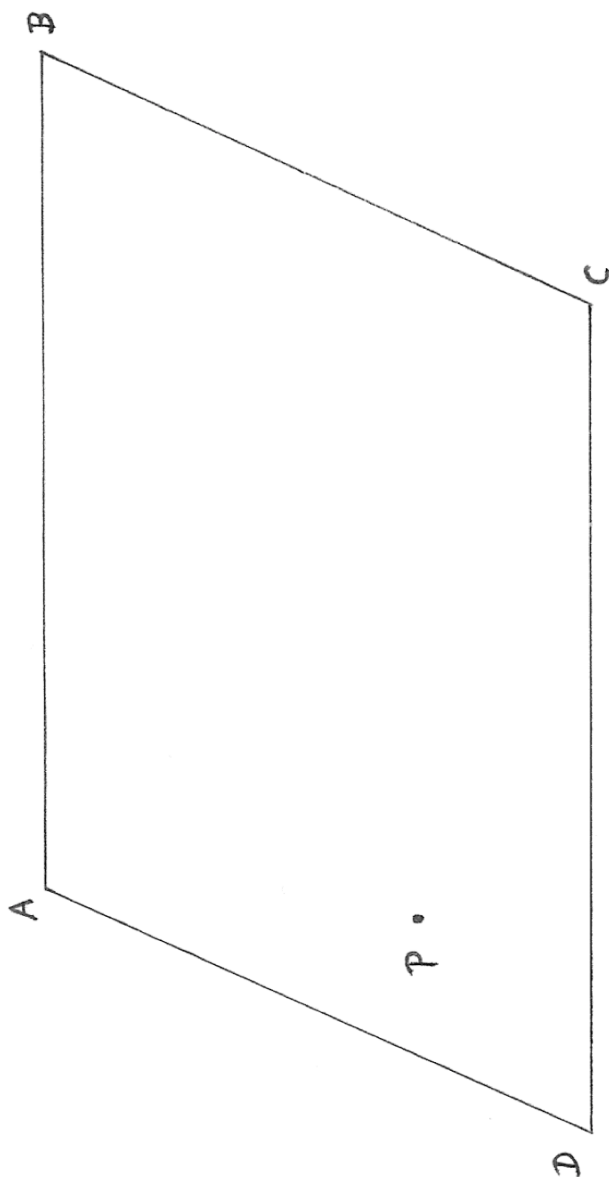


Soient AB et CD les diamètres conjugués à construire. On va utiliser une affinité f d'axe p transformant le cercle c de centre O et de diamètre AB en l'ellipse Γ . Le diamètre $C'D'$ du cercle qui est perpendiculaire à AB doit être envoyé sur CD par l'affinité. Soit P le milieu de MN et P', M' et N' les préimages de P, M et N par f . Comme P' est le milieu de $M'N'$, OP' est perpendiculaire à $M'N'$ puisque ces deux points sont sur le cercle c . **P' est donc sur le cercle de Thalès de OR .** Cela permet de construire P' , sachant aussi que $C'D'$ va sur CD ...

42. On donne l'axe AB d'une ellipse. Construire le deuxième axe CD , connaissant le milieu M du segment déterminé par l'ellipse sur une sécante s donnée.

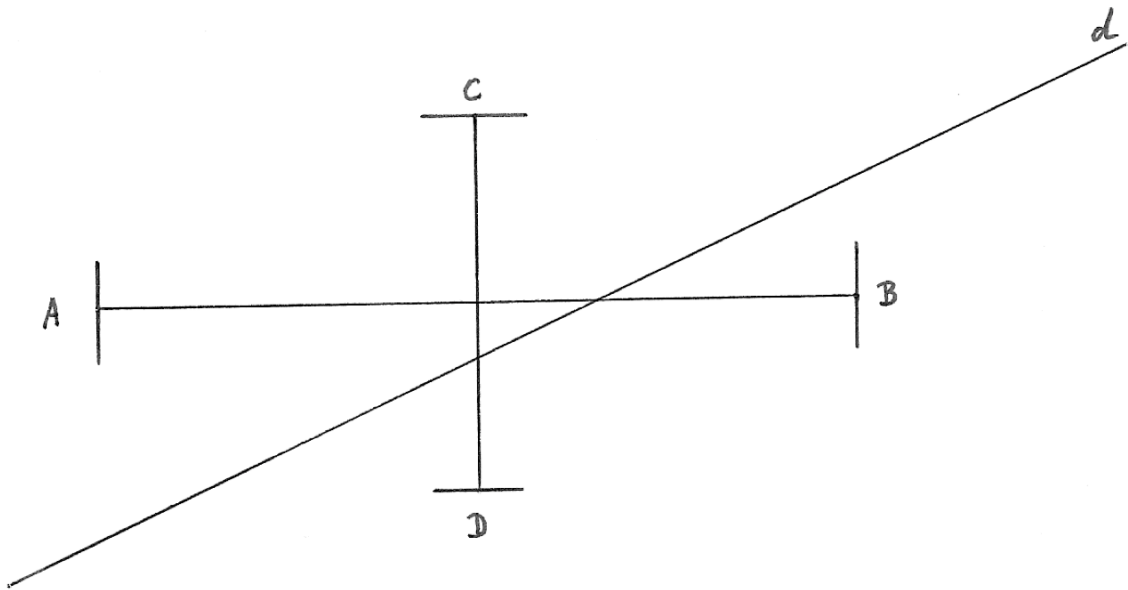


43. On donne un parallélogramme $ABCD$ et un point P intérieur à celui-ci. Construire une ellipse inscrite dans $ABCD$ et passant par P . Déterminer en particulier les points de contact de l'ellipse et du parallélogramme. *Indication* : se servir d'une affinité dont l'axe passe par P et par le centre du parallélogramme.

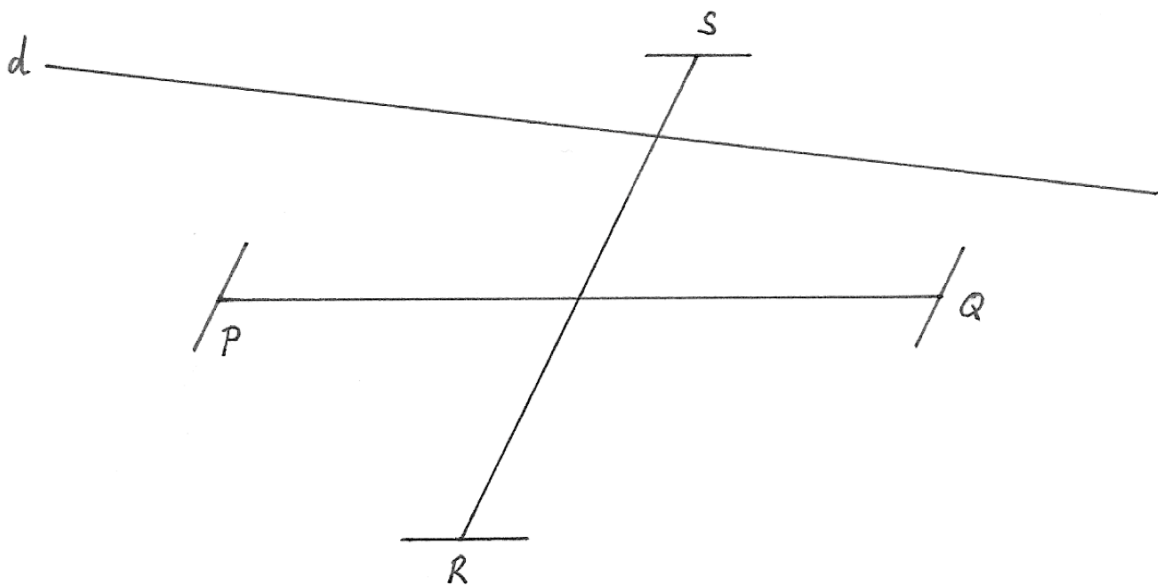


44. Construire les points d'intersection d'une droite d et d'une ellipse donnée par :

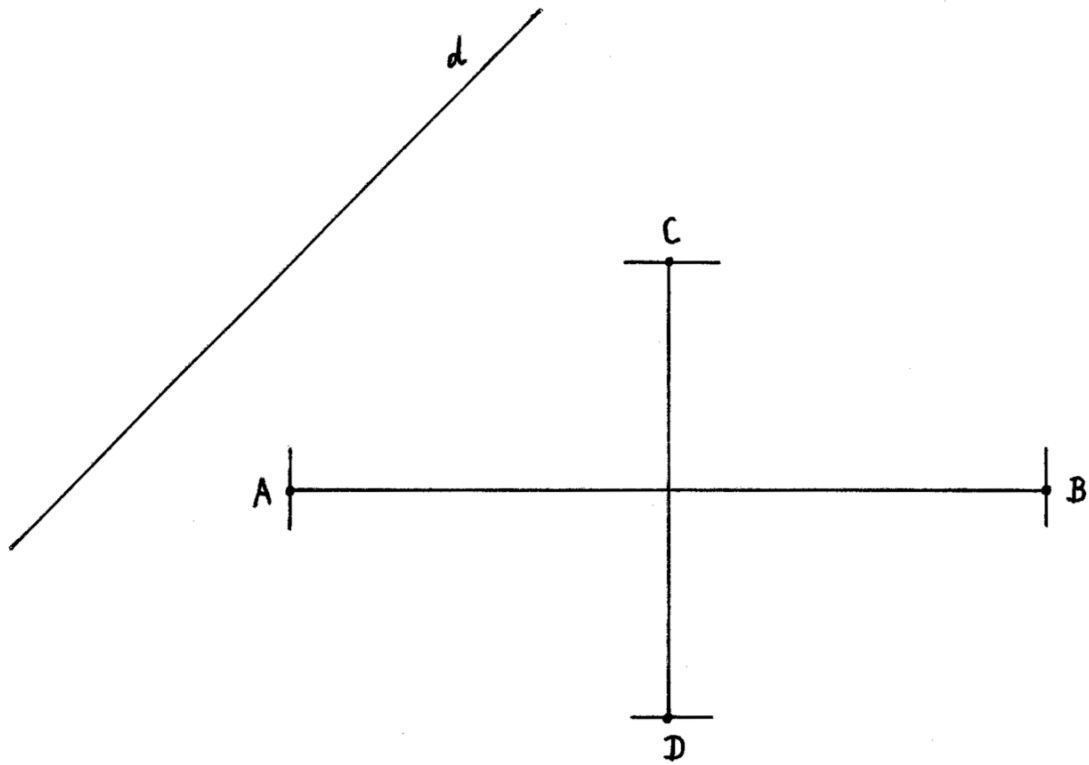
1) ses axes AB et CD .



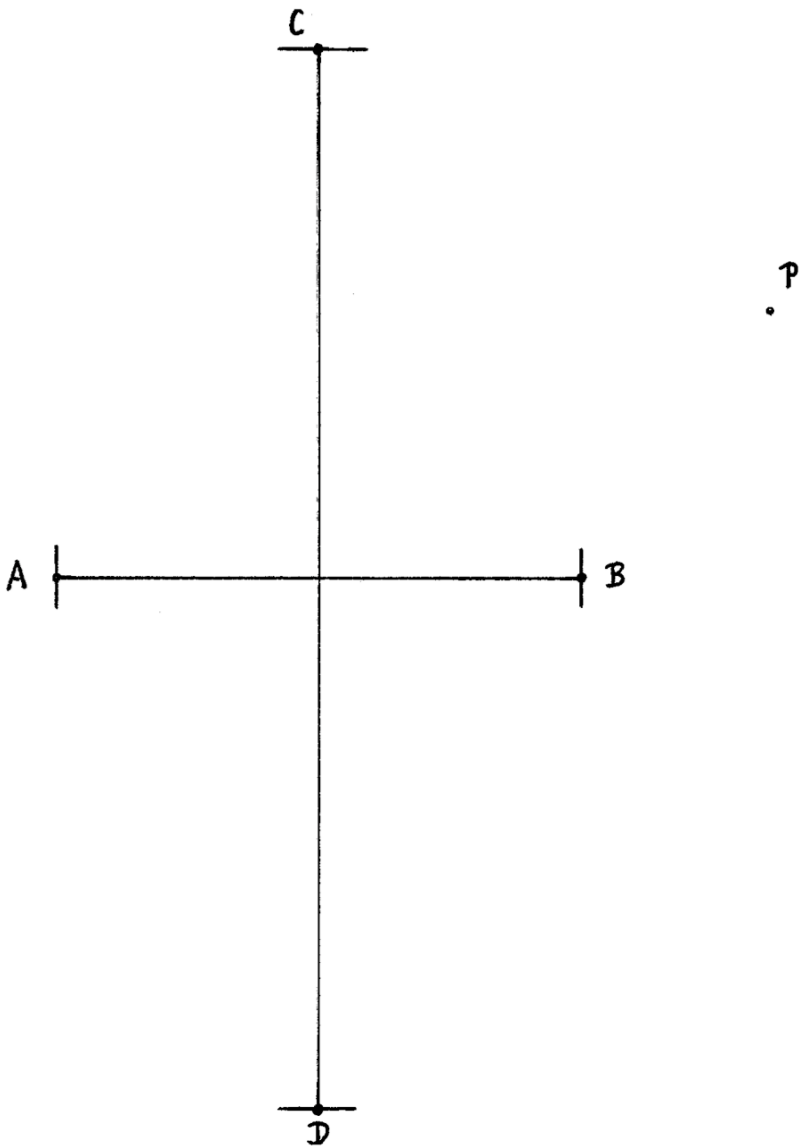
2) deux diamètres conjugués PQ et RS .



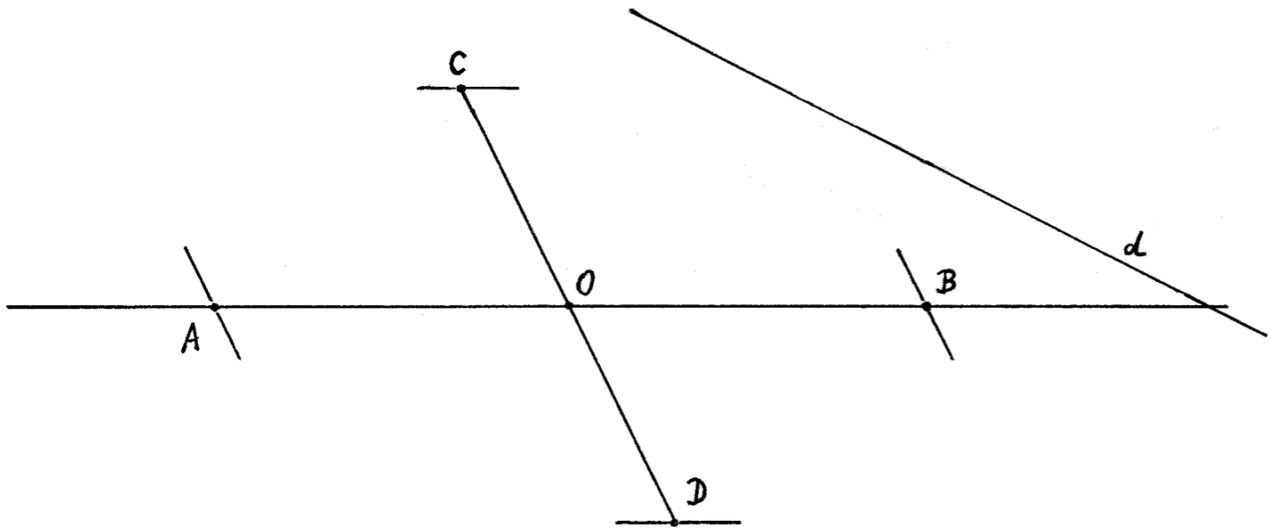
45. Construire les tangentes de direction d à l'ellipse d'axes AB et CD , ainsi que les points de contact.



46. Construire les tangentes issues du point P à l'ellipse d'axes AB et CD , ainsi que les points de contact.



47. Construire les tangentes de direction d à une ellipse donnée par deux diamètres conjugués AB et CD . Construire aussi les points de contact.



48. Construire les tangentes issues d'un point P à une ellipse donnée par deux diamètres conjugués AB et CD . Construire aussi les points de contact.

