

1M

ALGÈBRE

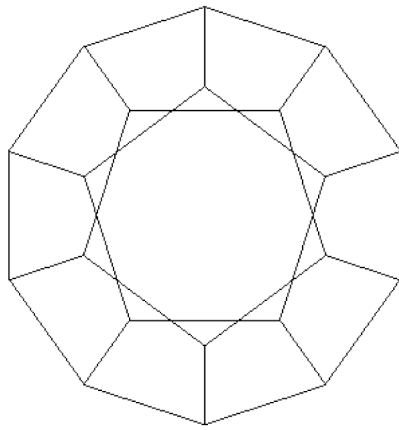
THÉORIE

2014

TABLE DES MATIÈRES

Ensembles numériques	1
Vocabulaire sur les ensembles.....	2
Intervalles	3
Produit cartésien	4
 Addition et multiplication dans l'ensemble des réels	10
Puissances.....	11
Racine n -ième	12
Racine d'un produit et d'un quotient	13
Puissances et racines – Formulaire	14
Equation du deuxième degré	15
 Factorisation des polynômes	20
Factorisation du trinôme du 2e degré	21
Division euclidienne des polynômes	22
Factorisation par division euclidienne.....	23
Fractions rationnelles.....	24
Equations rationnelles	25
Méthode d'élimination de Gauss	26
 Notion de fonction	30
Ensemble de définition	31
Zéros d'une fonction	32
Intersection de graphes	33
Fonctions affines	34
Forme canonique d'un trinôme du 2e degré	35
Graphe d'une fonction du 2e degré	36
Composition de fonctions	37
Images, préimages	38
Injections, surjections, bijections	39
 Inéquations du premier degré	40
Signe d'une fonction du 1er degré	41
Signe d'une fonction du 2e degré	42
Signe d'une fonction rationnelle	43

EXERCICES (Séries CN, ENS, FA, FN, FR, IN, PR, SY)



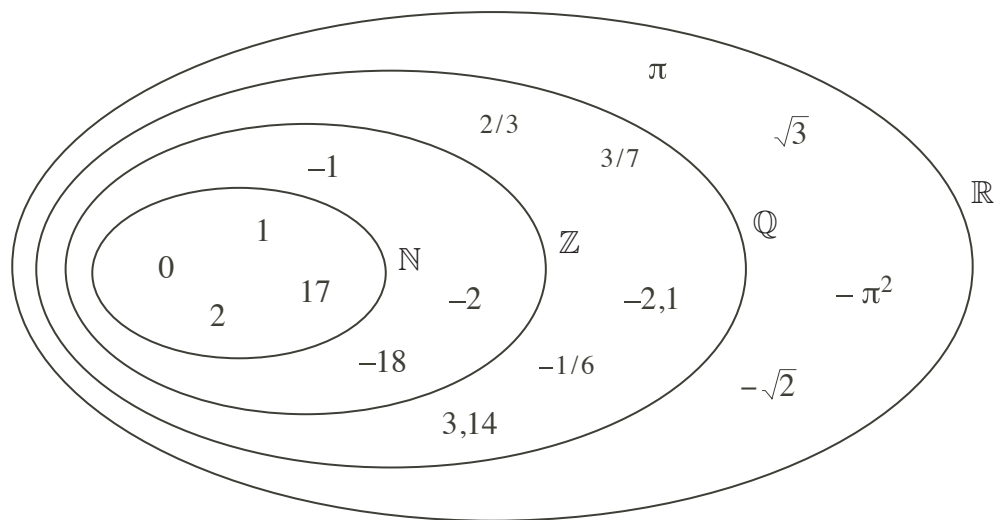
§ 1. ENSEMBLES NUMÉRIQUES

Ensemble des nombres **naturels** : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$

Ensemble des nombres **entiers** : $\mathbb{Z} = \{\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$

Ensemble des nombres **rationnels** : $\mathbb{Q}$ = ensemble des nombres pouvant s'écrire sous forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$ ($b \neq 0$)

Ensemble des nombres **réels** : $\mathbb{R}$



Autres notations

$\mathbb{R}_+$ = ensemble des réels positifs (zéro compris)

$\mathbb{R}_-$ = ensemble des réels négatifs (zéro compris)

$\mathbb{Z}_-$ = ensemble des entiers négatifs (zéro compris)

etc.

Une étoile placée en exposant indique que le zéro est exclu de l'ensemble:

$\mathbb{R}^*$ = ensemble de réels non nuls

$\mathbb{Z}_+^* = \{1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$

§ 2. VOCABULAIRE SUR LES ENSEMBLES

1. Symbole d'appartenance $\in$

Pour exprimer qu'un objet a est un élément d'un ensemble A , on note :

$$a \in A \quad ("a \text{ appartient à } A")$$

Si a n'est pas un élément de A , on écrit : $a \notin A$. Exemples : $3,5 \in \mathbb{Q}$; $0 \notin \mathbb{R}^*$.

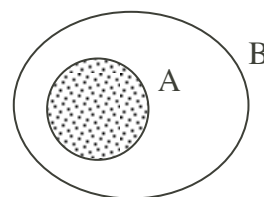
2. Sous-ensemble ou partie

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est un *sous-ensemble* de B (ou une *partie* de B) si chaque élément de A appartient à B .

On note : $A \subset B$ (" A est *inclus*, *contenu* dans B ").

Si A n'est pas un sous-ensemble de B , on écrit : $A \not\subset B$.

Exemples : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R}^*$.



3. Ensembles égaux

Deux ensembles A et B sont dits *égaux* lorsqu'ils sont composés des mêmes éléments. Dans ce cas, on note $A = B$, et dans le cas contraire, $A \neq B$. Exemples : $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$; $\{1; 2\} = \{2; 1\}$.

Remarque. $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$

4. Notation d'un ensemble par propriété caractéristique

Considérons par exemple l'ensemble des nombres réels compris entre 2 et 4 (strictement). Il peut être noté de la façon suivante :

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4 \} \quad ("ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $2 < x < 4$ ")$$

De même, l'ensemble $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$ peut s'écrire :

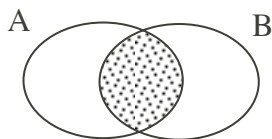
$$\{ x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2 \} \quad ("ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ tels que $-2 \leq x \leq 2$ ")$$

5. L'ensemble vide $\emptyset$

Soit $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1 \}$. Cette écriture désigne un ensemble qui ne contient aucun élément, car le carré d'un nombre réel est toujours positif. Un tel ensemble est appelé "ensemble vide", et noté $\emptyset$. On admettra qu'il n'y a qu'*un seul ensemble vide*, et que ce dernier est *contenu dans n'importe quel ensemble* (comme l'Absolu, qui est unique, mais présent dans chaque chose...).

6. Intersection

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B . Elle se note $A \cap B$ ("A inter B").

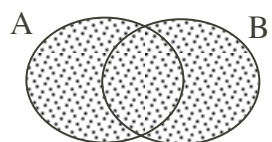


$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Exemple. $\{1; 2; 3\} \cap \{2; 3; 4\} = \{2; 3\}$.

7. Réunion

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble formé des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles A et B . Elle se note $A \cup B$ ("A union B").

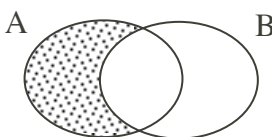


$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemple. $\{1; 2; 3\} \cup \{2; 3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$.

8. Différence

La différence $A - B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble formé des éléments de A qui n'appartiennent pas à B .

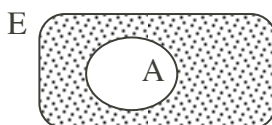


$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Exemple. $\{1; 2; 3\} - \{2; 3; 4\} = \{1\}$.

9. Complémentaire

Si A est un sous-ensemble de E , l'ensemble $E - A$ est également appelé *complémentaire de A relativement à E*, et noté $C_E A$, ou parfois $\bar{A}$, E étant alors sous-entendu.



$$C_E A = \{x \mid x \in E \text{ et } x \notin A\}$$

Exemple. Le complémentaire de $\{2; 3\}$ relativement à $\{1; 2; 3\}$ est $\{1\}$.

§ 3. INTERVALLES

Soit deux réels a et b , avec $a < b$.

Par définition :

$$[a ; b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \quad (\text{intervalle } \textit{fermé})$$

$$]a ; b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \quad (\text{intervalle } \textit{ouvert})$$

$$]a ; +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}$$

$$]-\infty ; b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \}$$

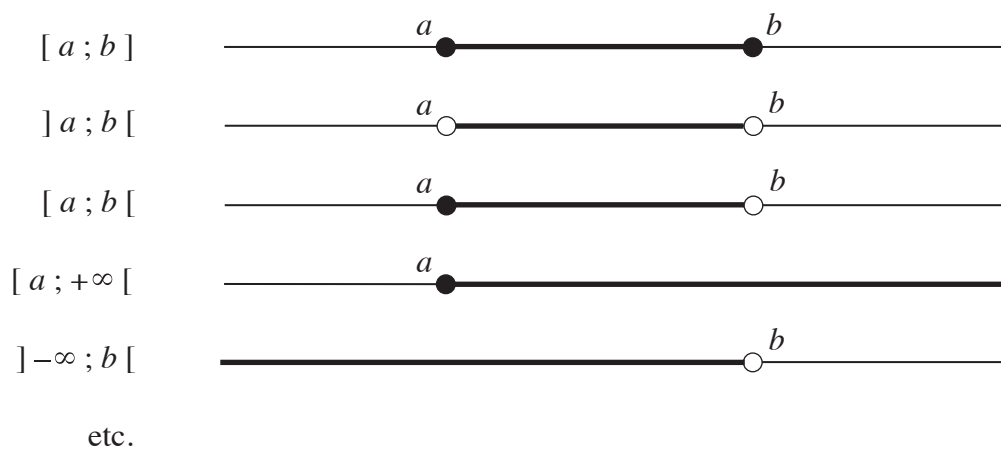
$$[a ; b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} \quad (\text{intervalle } \textit{semi-ouvert à droite})$$

$$[a ; +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$$

$$]a ; b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} \quad (\text{intervalle } \textit{semi-ouvert à gauche})$$

$$]-\infty ; b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \}$$

Représentations graphiques



§ 4. PRODUIT CARTÉSIEN

Couples

Soient deux ensembles A et B .

Un élément a de A et un élément b de B , pris dans cet ordre, forment un *couple* noté $(a ; b)$.

On peut considérer le couple comme une "paire ordonnée".

a est l'*abscisse* ou *première coordonnée* du couple $(a ; b)$.

b est l'*ordonnée* ou *deuxième coordonnée* du couple $(a ; b)$.

Soit encore un élément c de A et un élément d de B . L'équivalence suivante définit le couple :

$$(a ; b) = (c ; d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \quad \text{et} \quad b = d$$

Produit cartésien

Le *produit cartésien* de A et B , pris dans cet ordre, est l'ensemble des couples ayant leur première coordonnée dans A et leur deuxième coordonnée dans B . On le note $A \times B$.

$$A \times B = \{ (x ; y) \mid x \in A \quad \text{et} \quad y \in B \}$$

Cas particulier : Si $A = B$, on pose $A \times A = A^2$.

Remarque

On peut généraliser la notion de produit cartésien et l'appliquer à un nombre quelconque d'ensembles. Par exemple, un produit cartésien de trois ensembles est un ensemble de triplets.

Exemple

Soit $A = \{ 1 ; 2 \}$ et $B = \{ 5 ; 6 ; 7 \}$. Alors :

$$A \times B = \{ (1 ; 5), (1 ; 6), (1 ; 7), (2 ; 5), (2 ; 6), (2 ; 7) \}$$

$$B \times A = \{ (5 ; 1), (5 ; 2), (6 ; 1), (6 ; 2), (7 ; 1), (7 ; 2) \}$$

§ 10. ADDITION ET MULTIPLICATION DANS $\mathbb{R}$

Addition

La somme de deux éléments de $\mathbb{R}$ est un élément de $\mathbb{R}$.

L'addition est *associative* : $(a+b)+c = a+(b+c)$.

L'addition est *commutative* : $a+b = b+a$.

Il existe dans $\mathbb{R}$ un *élément neutre* pour l'addition : c'est 0. $a+0 = 0+a = a$.

0 est le seul élément qui jouit de cette propriété.

Pour chaque élément a de $\mathbb{R}$, il existe dans $\mathbb{R}$ un élément, l'*opposé* de a , noté $-a$, tel que $a+(-a) = 0$.

Multiplication

Le produit de deux éléments de $\mathbb{R}$ est un élément de $\mathbb{R}$.

La multiplication est *associative* : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

La multiplication est *commutative* : $a \cdot b = b \cdot a$.

Il existe dans $\mathbb{R}$ un *élément neutre* pour la multiplication : c'est 1. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

1 est le seul élément qui jouit de cette propriété.

Pour chaque élément a de $\mathbb{R}$ distinct de 0, il existe dans $\mathbb{R}$ un élément, l'*inverse* de a , noté $\frac{1}{a}$, tel que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Addition et multiplication

La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

§ 11. PUISSANCES

1. Définition de A^n pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ll} n > 1: & A^n = \underbrace{A \ A \ A \ \dots \ A}_{n \text{ facteurs}} \\ n = 1: & A^1 = A \\ n = 0: & A^0 = 1 \quad (A \neq 0) \end{array}$$

0^0 n'est pas défini

A est la base de la puissance et n l'exposant.

2. Produit de puissances de même base

$$x^2 x^3 = (xx)(xxx) = x^5$$

$$A^m A^n = A^{m+n}$$

(On additionne les exposants.)

3. Puissance d'un produit

$$(xy)^4 = (xy)(xy)(xy)(xy) = (xxxx)(yyyy) = x^4 y^4$$

$$(AB)^n = A^n B^n$$

$$(3x)^3 = 27x^3 \quad ; \quad (-7x)^2 = 49x^2$$

4. Puissance d'une puissance

$$(x^2)^3 = (xx)(xx)(xx) = x^6 \quad ; \quad (x^4)^2 = (xxxx)(xxxx) = x^8$$

$$(A^m)^n = A^{mn}$$

(On multiplie les exposants.)

5. Exposant négatif

$$A^{-n} = \frac{1}{A^n}$$

§ 12. RACINE N-IÈME

Définitions

1. Soit $n > 0$ un entier *pair*, et a un réel ≥ 0 .

La racine n -ième de a , notée $\sqrt[n]{a}$, est le nombre **positif** dont la puissance n est a .

2. Soit $n > 0$ un entier *impair*, et a un réel quelconque.

La racine n -ième de a , notée $\sqrt[n]{a}$, est l'unique nombre dont la puissance n est a .

Exemples

$$\sqrt[3]{8} = 2; \sqrt[3]{-8} = -2; \sqrt[5]{32} = 2; \sqrt[2]{16} = 4; \sqrt[1]{7} = 7$$

Remarques

- $\sqrt[2]{a}$ s'abrège $\sqrt{a}$
- $\sqrt[1]{a} = a$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a^n} = a$
- Si n est pair, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$
- Si n est impair, $\sqrt[n]{a^n} = a$

§ 13. RACINE D'UN PRODUIT ET D'UN QUOTIENT

Théorème

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$(a, b \in \mathbb{R}_+ ; n \in \mathbb{R}^*)$$

Preuve

$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ étant ≥ 0 , il suffit de vérifier que sa puissance n est ab :

$$\left(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

De manière semblable, on obtient :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Remarque

Si n est impair, les formules ci-dessus sont vraies également pour a et b négatifs.

Exemples

- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{5} = 2 \sqrt[3]{5}$
- $\sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$
- $\sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{3}{10} = 0,3$

§ 14. PUISSANCES ET RACINES – FORMULAIRE

<i>Produit de puissances de même base</i>	$a^n a^m = a^{n+m}$
<i>Quotient de puissances de même base</i>	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
<i>Puissance de puissance</i>	$(a^n)^m = a^{nm}$
<i>Puissance d'un produit</i>	$(ab)^n = a^n b^n$
<i>Puissance d'un quotient</i>	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
<i>Racine d'un produit</i>	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
<i>Racine d'un quotient</i>	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
<i>Inverse $\leftrightarrow$ Opposé</i>	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Mise en garde : $\sqrt[n]{a+b}$ n'est pas égal à $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ (sauf si $a=0$, ou $b=0$, ou $n=1$)

§ 15. ÉQUATION DU DEUXIÈME DEGRÉ

Equation générale du deuxième degré :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

On la résout par la méthode de recherche du carré :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

A ce stade, deux cas peuvent se présenter :

- Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation est impossible, car son premier membre est toujours ≥ 0 , tandis que le deuxième est < 0 .
- Si $b^2 - 4ac \geq 0$, le membre de droite est ≥ 0 . On peut donc en prendre la racine carrée, ce qui donne :

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

D'où :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

L'expression $b^2 - 4ac$ se note parfois $\Delta(a; b; c)$, souvent Δ , et s'appelle le **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

En résumé :

Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution : $x_1 = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a aucune solution

§ 20. FACTORISATION DES POLYNÔMES

La *factorisation* ou *décomposition en produit de facteurs* consiste à trouver, pour un polynôme donné, un produit qui lui soit égal, et dont les facteurs sont de degrés inférieurs à celui du polynôme donné. Voici quelques méthodes permettant d'effectuer cette transformation importante.

1. Mise en évidence

Ce procédé utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Soit, par exemple, à décomposer le polynôme $2x^2y + 2xy^2$. Chaque terme de cette somme est un produit comprenant les facteurs 2, x et y . On peut ainsi écrire :

$$2x^2y + 2xy^2 = (2xy)x + (2xy)y = 2xy(x + y).$$

On dit qu'on a mis le facteur $2xy$ *en évidence*.

Exemples

- 1) $6ax + 6a = 6a(x + 1)$
- 2) $x^2 - 8x = x(x - 8)$
- 3) $a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$
- 4) $-12x^3y + 24x^2y^2 + 6xy^3 = 6xy(-2x^2 + 4xy + y^2)$

2. Utilisation des identités remarquables

On peut souvent obtenir une factorisation au moyen de l'une des identités ci-dessous.

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	
$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	
$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$	
$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

Exemples

- 1) $9x^2 - 25y^2 = (3x - 5y)(3x + 5y)$
- 2) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$
- 3) $a^2 - (b - c)^2 = [a - (b - c)][a + (b - c)] = (a - b + c)(a + b - c)$

3. Méthode "somme-produit" pour un trinôme unitaire* du deuxième degré

Considérons par exemple le trinôme $x^2 + 7x + 12$. Essayons de déterminer deux nombres a et b de manière à pouvoir écrire

$$x^2 + 7x + 12 = (x + a)(x + b)$$

La forme réduite du membre de droite de cette égalité est

$$x^2 + (a + b)x + ab$$

Pour que les deux membres soient égaux, il faut que

$$a + b = 7 \quad \text{et} \quad ab = 12$$

Ainsi $a = 3$, $b = 4$ et

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

La factorisation d'un trinôme unitaire du second degré se ramène donc à la **recherche de deux nombres : leur somme est égale au coefficient du terme de degré 1 et leur produit au terme de degré 0.**

Remarque. En utilisant le même procédé, on pourra aussi factoriser certains trinômes de degré supérieur à 2. Par exemple : $x^4 - 7x^2 + 12 = (x^2 - 3)(x^2 - 4)$.

4. Méthode des groupements

Elle consiste à former plusieurs groupes de termes, de telle manière que l'on puisse
soit mettre en évidence un certain facteur commun aux différents groupes,
soit appliquer l'une des identités remarquables.

Exemples

- $ax + bx - ay - by = (ax - ay) + (bx - by) = a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b)$
- $4 - a^2 - 4ab - 4b^2 = 4 - (a^2 + 4ab + 4b^2) = 4 - (a + b)^2$
 $= (2 - (a + 2b))(2 + (a + 2b)) = (2 - a - 2b)(2 + a + 2b)$

* Unitaire : le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

§ 21. FACTORISATION DU TRINÔME $ax^2 + bx + c$

Exemple : factoriser $3x^2 + 2x - 8$.

On commence par chercher les zéros de ce trinôme, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$3x^2 + 2x - 8 = 0 :$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 100 ; \text{ zéros : } x_1, x_2 = \frac{-2 \pm 10}{6} = \begin{matrix} 4/3 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\text{Alors : } \underline{\underline{3x^2 + 2x - 8 = 3(x - \frac{4}{3})(x + 2)}}$$

Formule générale

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

où x_1 et x_2 sont les zéros du trinôme

$$ax^2 + bx + c \quad (\Delta \geq 0).$$

Remarque

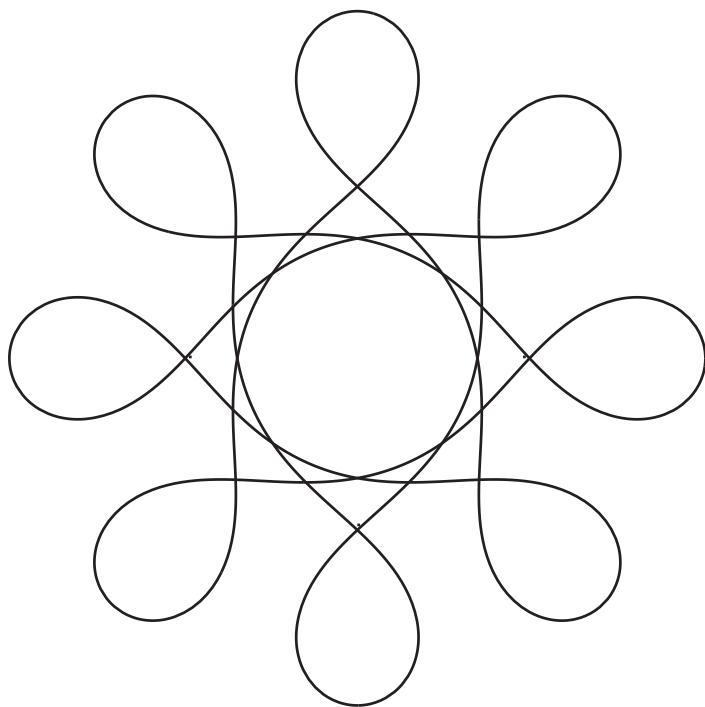
Si $\Delta < 0$, le trinôme n'est pas factorisable.

Preuve de la formule

On sait que $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{a(x - x_1)(x - x_2)}} &= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a \cdot \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{2ax + b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{1}{4a} ((2ax + b) - \sqrt{\Delta})((2ax + b) + \sqrt{\Delta}) \stackrel{*}{=} \frac{1}{4a} ((2ax + b)^2 - \Delta) \\ &= \frac{1}{4a} (4a^2x^2 + 4abx + \cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac) = \underline{\underline{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

* En se servant de l'identité $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.



$$\text{CR}\left(\frac{1}{8z^3 - 4z^{11}}\right)$$

§ 22. DIVISION EUCLIDIENNE DES POLYNÔMES

L'ensemble des nombres naturels est doté de cette propriété remarquable qu'à deux entiers n et d ($d \neq 0$), on peut faire correspondre de manière unique deux entiers q et r tels que :

$$n = dq + r \quad \text{avec} \quad r < d$$

$$(\text{dividende}) = (\text{diviseur}) \cdot (\text{quotient}) + (\text{reste})$$

On parle alors de *division euclidienne* et, si $r = 0$, on dit que d divise n .

Exemple. Division euclidienne de 3585 par 23 : $3585 = 23 \cdot 155 + 20$.

L'ensemble des polynômes possède la même propriété. A deux polynômes N et D (D étant de degré ≥ 1), on peut associer de manière unique deux autres polynômes Q et R tels que :

$$N = DQ + R \quad \text{avec} \quad \text{degré}(R) < \text{degré}(D)$$

Voici, présentée sur un exemple, la technique de division pour les polynômes.

$N = 4x^5 + 5x^3 - 19x^2 + 2x - 7$; $D = 2x^2 + 3x + 6$. Division de N par D :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 4x^5 \qquad \qquad + 5x^3 - 19x^2 + 2x - 7 \\
 -4x^5 - 6x^4 - 12x^3 \\
 \hline
 -6x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 2x - 7 \\
 \quad 6x^4 + 9x^3 + 18x^2 \\
 \hline
 \qquad 2x^3 - x^2 + 2x - 7 \\
 \qquad -2x^3 - 3x^2 - 6x \\
 \hline
 \qquad \qquad -4x^2 - 4x - 7 \\
 \qquad \qquad 4x^2 + 6x + 12 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 2x + 5
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 2x^2 + 3x + 6 \\
 \hline
 2x^3 - 3x^2 + x - 2
 \end{array}
 \end{array}$$

D'où : $Q = 2x^3 - 3x^2 + x - 2$; $R = 2x + 5$;

$$\underbrace{4x^5 + 5x^3 - 19x^2 + 2x - 7}_{\text{dividende}} = \underbrace{(2x^2 + 3x + 6)}_{\text{diviseur}} \underbrace{(2x^3 - 3x^2 + x - 2)}_{\text{quotient}} + \underbrace{(2x + 5)}_{\text{reste}}.$$

§ 23. FACTORISATION PAR DIVISION EUCLIDIENNE

Théorème

Soit $P(x)$ un polynôme et a un nombre réel.

Le reste de la division de $P(x)$ par $(x - a)$ est égal à $P(a)$

[$P(a)$ désigne la valeur du polynôme $P(x)$ lorsque $x = a$]

Preuve

Comme le degré de $(x - a)$ est 1, le reste R de la division de P par $(x - a)$ sera de degré 0. Cela veut dire que R est un nombre réel. Soit Q le quotient de cette division. On a :

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Faisant $x = a$ ci-dessus on obtient $P(a) = R$.

Corollaire

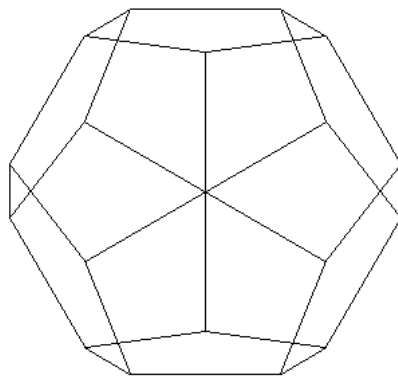
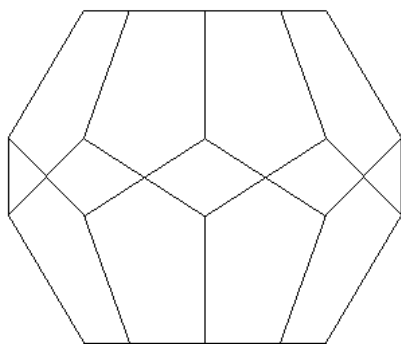
Un polynôme $P(x)$ est factorisable par $(x - a)$ si et seulement si il s'annule pour $x = a$.

Application

Factoriser $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

- On cherche (par tâtonnement) un zéro de P . Ici, on voit rapidement que $P(1) = 0$.
- Le corollaire ci-dessus assure alors que P est factorisable par $(x - 1)$.
- On divise P par $(x - 1)$: le quotient est $x^2 - x - 6$ et le reste est nul.

D'où : $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.



§ 24. FRACTIONS RATIONNELLES

1. Définition. Une fraction rationnelle est une expression du type $\frac{N}{D}$, où N et D sont deux polynômes. N s'appelle le *numérateur* de la fraction et D le *dénominateur*. N et D sont les *termes* de la fraction.

2. Simplification. Pour simplifier une fraction rationnelle, on commence par factoriser le numérateur et le dénominateur, puis on biffe leurs éventuels facteurs communs. (Cela revient à diviser les termes de la fraction par ces facteurs.) Si tous les facteurs d'un terme ont été biffés, on écrit 1 à sa place.

$$\frac{ax^3 + 2ax^2 + ax}{ax^2 - a} = \frac{ax(x^2 + 2x + 1)}{a(x^2 - 1)} = \frac{\cancel{ax}(x+1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{a}(x-1)\cancel{(x+1)}} = \frac{x(x+1)}{x-1}$$

L'opération inverse de la simplification, qui consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction par un même facteur, s'appelle l'**amplification**. La fraction amplifiée est égale à la fraction initiale.

3. Multiplication. Il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, puis de simplifier le résultat.

$$\frac{a}{3} \cdot \frac{x+1}{a} = \frac{\cancel{a}(x+1)}{3\cancel{a}} = \frac{x+1}{3}$$

Souvent, on décompose préalablement les termes des fractions à multiplier, et l'on simplifie avant d'effectuer la multiplication :

$$\frac{x^2-1}{63} \cdot \frac{9}{ax} \cdot \frac{ay-2a}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{6}3} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{a}x} \cdot \frac{\cancel{a}(y-2)}{\cancel{x-1}} = \frac{(x+1)(y-2)}{7x}$$

4. Division. Pour diviser, on multiplie par l'inverse : $\frac{N}{D} : \frac{A}{B} = \frac{N}{D} \cdot \frac{B}{A}$.

5. Addition et soustraction.

- 1) Factoriser les dénominateurs.
- 2) Former un multiple commun des dénominateurs, le plus "petit" possible.
- 3) Amplifier les fractions de sorte qu'elles aient toutes ce multiple commun au dénominateur.
- 4) Additionner (ou soustraire) les numérateurs.
- 5) Réduire.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x^2+x-6} - \frac{1}{x^2+3x} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2}{(x-2)(x+3)} - \frac{1}{x(x+3)} \\ & \stackrel{\textcircled{2,3}}{=} \frac{2x}{(x-2)(x+3)x} - \frac{x-2}{(x-2)(x+3)x} \stackrel{\textcircled{4}}{=} \frac{2x - (x-2)}{(x-2)(x+3)x} \\ & \stackrel{\textcircled{5}}{=} \frac{2x - x + 2}{(x-2)(x+3)x} \stackrel{\textcircled{5}}{=} \frac{x+2}{(x-2)(x+3)x} \end{aligned}$$

§ 25. ÉQUATIONS RATIONNELLES

Une équation rationnelle est une équation dont les deux membres sont des fractions rationnelles, ou sont égaux à des fractions rationnelles. Pour résoudre ce genre d'équation, procéder comme suit :

1. Mettre tous les termes de l'équation à gauche (zéro à droite) et factoriser tous les dénominateurs.
2. Donner la *condition d'existence* (CE).
Par exemple, si les dénominateurs sont $x(x-2)$ et $x-3$, les valeurs 0 ; 2 et 3 sont "interdites" pour x . On écrit : CE : $x \neq 0$; $x \neq 2$; $x \neq 3$.
3. Mettre les termes de gauche au dénominateur commun (le plus "petit" possible).
4. Multiplier les deux membres de l'équation par le dénominateur commun (pour "chasser" les dénominateurs)
5. Résoudre l'équation ainsi réduite par les techniques connues.
6. Vérifier que les solutions trouvées satisfont la condition d'existence.
Éliminer celles qui ne conviennent pas.

Exemple

$$1 - \frac{3x}{x^2 - 9} = \frac{-x}{2x - 6}$$

$$1 - \frac{3x}{(x-3)(x+3)} - \frac{-x}{2(x-3)} = 0 \quad \text{CE : } x \neq -3 ; x \neq 3$$

$$\frac{2(x-3)(x+3) - 6x + x(x+3)}{2(x-3)(x+3)} = 0$$

$$2(x-3)(x+3) - 6x + x(x+3) = 0$$

$$3x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$3(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \text{ ou } x = 3 ; 3 \text{ ne convient pas (voir la condition d'existence)}$$

$$\text{L'ensemble des solutions est donc } S = \{-2\}.$$

Remarque

- Si l'équation réduite est, par exemple, $0 = 5$, l'équation proposée est impossible.
Ensemble des solutions : $S = \emptyset$.
- Si l'équation réduite est $0 = 0$, tout nombre est solution, sauf les éventuelles "valeurs interdites" :
 $S = \mathbb{R} - \{\text{valeurs interdites}\}.$

§ 26. MÉTHODE D'ÉLIMINATION DE GAUSS

La méthode d'élimination de Gauss permet de résoudre un système linéaire* de n équations à n inconnues ($n \geq 2$). Elle consiste à *échelonner* le système au moyen de combinaisons linéaires.

Exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+z+t=2 \\ 2x+7y-3z-t=2 \\ 3x+12y-5z-2t=-1 \\ 5x+13y-4z-t=7 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ -1 \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} 3 \\ \\ -1 \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} 5 \\ \\ \\ -1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+z+t=2 \\ -3y+5z+3t=2 \\ -6y+8z+5t=7 \\ -3y+9z+6t=3 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ 2 \\ -1 \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ 1 \\ \\ -1 \end{array} \right|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+z+t=2 \\ -3y+5z+3t=2 \\ 2z+t=-3 \\ -4z-3t=-1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+z+t=2 \\ -3y+5z+3t=2 \\ 2z+t=-3 \\ -t=-7 \end{array} \right.$$

On termine par substitutions successives, de bas en haut :

$$\left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ y=-2 \\ z=-5 \\ t=7 \end{array} \right.$$

Ainsi : $(x; y; z; t) = \underline{\underline{(4; -2; -5; 7)}}$.

* Un système linéaire est un système dont toutes les équations sont de degré inférieur ou égal à 1.

§ 30. NOTION DE FONCTION

Définition

Soit A et B deux ensembles. Une **fonction** (ou *application*) f de A vers B est une "opération" qui, à chaque élément x de A fait correspondre un unique élément de B , noté $f(x)$ — lire " f de x " — et appelé **image de x par f** .

A est l'**ensemble de départ** de f ; B est l'**ensemble d'arrivée**.

On écrit :

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

N.B. Chaque élément de A possède **une et une seule image**.

On dit que $a \in A$ est une **préimage** de $b \in B$ si $f(a) = b$.

Exemples

- La fonction f donnant l'aire d'un carré à partir de son côté x s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

- Le maître d'anglais a choisi l'échelle de 20 pour un test de vocabulaire. La fonction g donnant la note (entre 0 et 10) à partir du nombre x de fautes est donc :

$$\begin{aligned} g: [0 ; 20] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{20-x}{2} \end{aligned}$$

- Un mobile se déplace à une vitesse constante de 30 km/h. La fonction h donnant la distance parcourue [en km] pendant le temps t [en heures] est :

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto 30t \end{aligned}$$

Graphes

Si les ensembles de départ A et d'arrivée B sont contenus dans $\mathbb{R}$, la fonction f peut être représentée graphiquement dans un repère Oxy du plan. Le graphe de f est alors, par définition, l'ensemble des points dont les coordonnées sont du type

$$(x, f(x))$$

§ 31. *ENSEMBLE DE DÉFINITION*

§ 32. ZÉROS D'UNE FONCTION

Définition

Soit f une fonction de A vers $\mathbb{R}$, A désignant un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

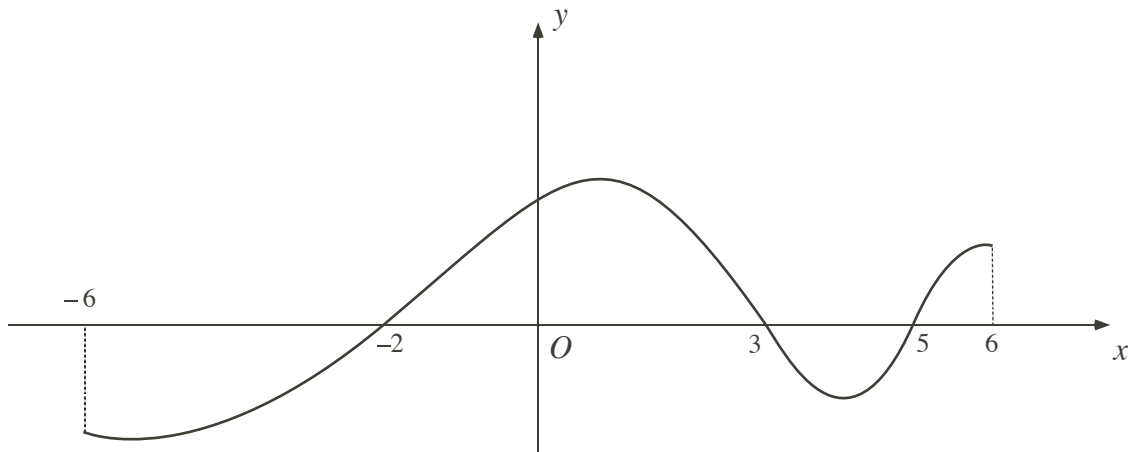
On appelle *zéro* de f tout $a \in A$ tel que $f(a) = 0$.

Exemples

- $f: x \mapsto \frac{(x-2)(x-3)}{x-1}$ de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$.

Les zéros de f sont 2 et 3.

- $g: [6; -6] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par son graphe :



Les zéros de g sont -2 ; 3 et 5 .

- $h: x \mapsto x^2 - x - 1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

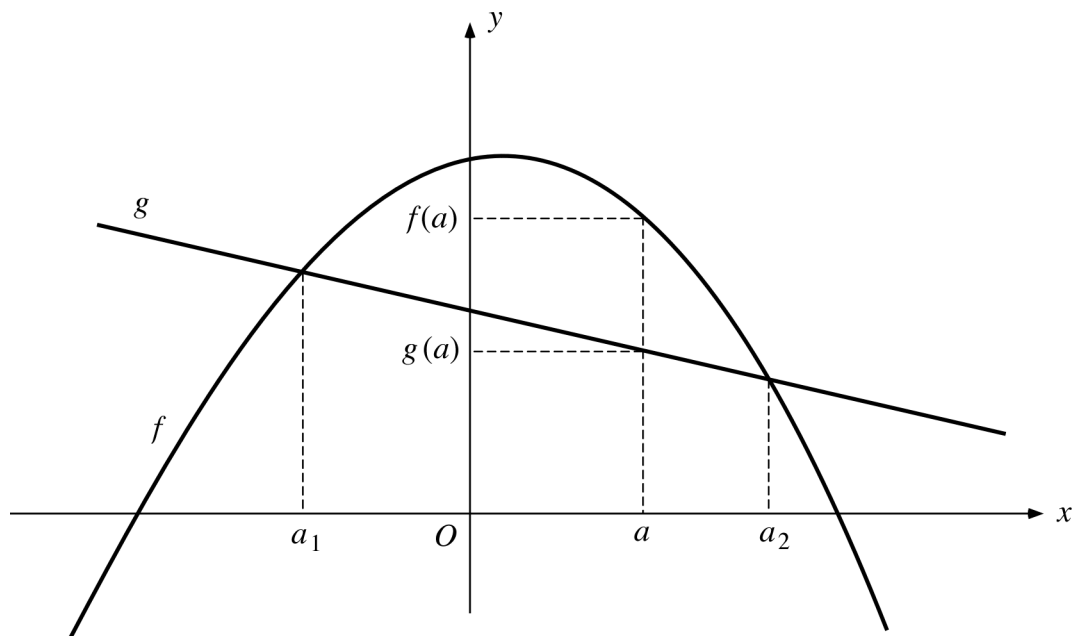
Les zéros de h sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque

Trouver les zéros d'une fonction f revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

§ 33. INTERSECTION DE GRAPHES

On considère les graphes de deux fonctions f et g représentés dans un même repère Oxy .



Quelles sont les coordonnées exactes des points d'intersection (éventuels) de ces deux graphes ?

On constate que les images $f(a)$ et $g(a)$ d'un nombre a ne peuvent être égales que si a est l'abscisse d'un point commun aux deux graphes.

On trouvera donc la première coordonnée des points d'intersection en résolvant l'équation

$$f(x) = g(x)$$

La deuxième coordonnée s'obtient en calculant l'image de la première par l'une des deux fonctions.

Exemple

$f(x) = -x^2 + 2x + 7$; $g(x) = x + 5$. On résout l'équation $f(x) = g(x)$:

$$-x^2 + 2x + 7 = x + 5 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2$$

Il y a donc deux points d'intersection : $(-1; f(-1)) = (-1; 4)$ et $(2; f(2)) = (2; 7)$.

§ 34. FONCTIONS AFFINES

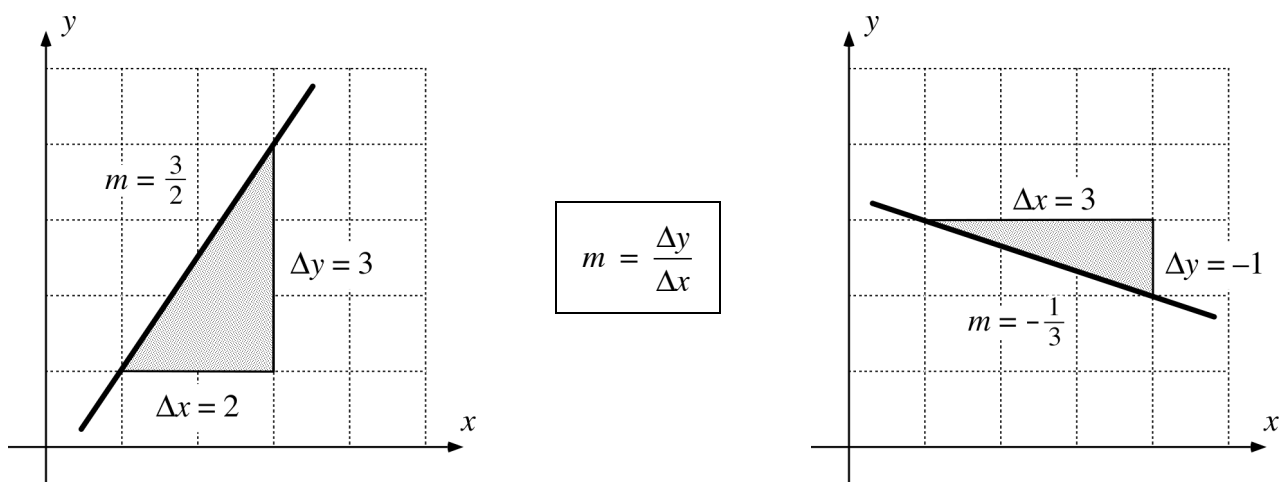
Les fonctions *affines* sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ du type

$$x \mapsto mx + h \quad (m, h \in \mathbb{R})$$

Le graphe d'une telle fonction est toujours une droite.

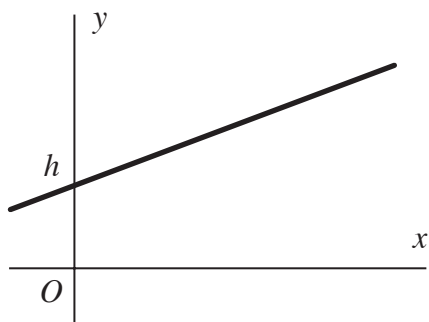
- **Signification du nombre m**

Le nombre m , appelé *pente*, mesure l'inclinaison du graphe :



La droite "monte" si $m > 0$, "descend" si $m < 0$ (en lisant le graphique de gauche à droite).

- **Signification du nombre h**



Le graphe de $x \mapsto mx + h$ coupe l'axe Oy au point $(0; h)$. Le nombre h mesure donc l'altitude de la droite par rapport à l'origine ; pour cette raison, il est nommé *ordonnée à l'origine*.

Si $m = 0$, la fonction est dite *constante*. Son graphe est une droite horizontale.

Si $h = 0$, la fonction est dite *linéaire*. Son graphe est une droite passant par l'origine.

§ 35. FORME CANONIQUE D'UN TRINÔME DU DEUXIÈME DEGRÉ

Théorème

Tout trinôme ax^2+bx+c ($a \neq 0$) peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{a(x-\alpha)^2 + \beta} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Preuve

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}, \quad \text{avec } \Delta = b^2-4ac. \end{aligned}$$

En posant $\boxed{\alpha = \frac{-b}{2a}}$ et $\boxed{\beta = \frac{-\Delta}{4a}}$,

on a bien

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

Exemple

$$\begin{aligned} 2x^2-8x+3 &= 2(x^2-4x)+3 \\ &= 2\left((x-2)^2-4\right)+3 = 2(x-2)^2-8+3 \\ &= 2(x-2)^2-5. \end{aligned}$$

§ 36. GRAPHE D'UNE FONCTION DU 2^e DEGRÉ

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction du 2^e degré ($a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$),

$\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant, et

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ses zéros éventuels ($x_1 = x_2$ si $\Delta = 0$).

Le graphe de la fonction f est une courbe appelée PARABOLE, ayant les propriétés suivantes :

1. Elle est symétrique par rapport à la droite verticale d'abscisse $\frac{-b}{2a}$.
2. Le point d'intersection S de la parabole avec son axe de symétrie est le point le plus bas de la courbe si $a > 0$, et le plus haut si $a < 0$. On l'appelle *sommet* de la parabole.

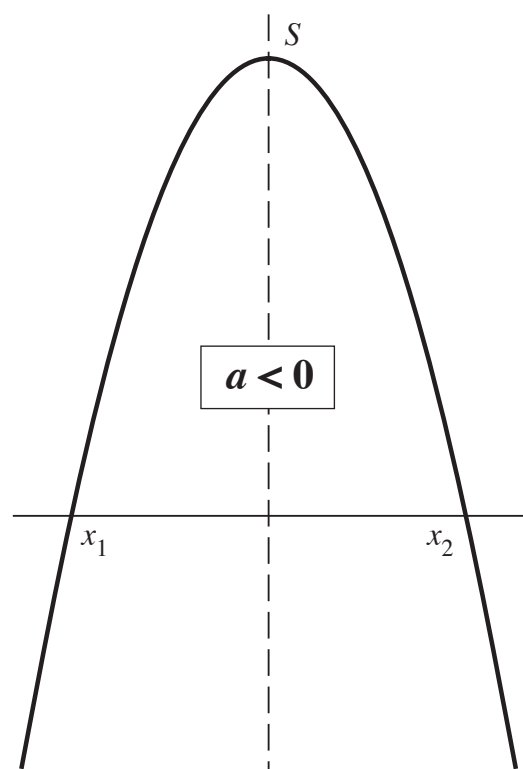
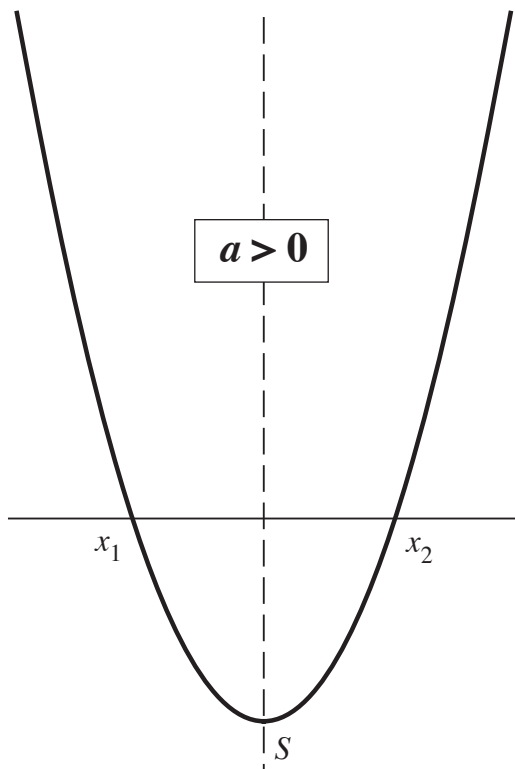
Les coordonnées du sommet sont $\left(\frac{-b}{2a} ; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

3. La courbe coupe l'axe Oy au point $(0 ; c)$.

Si $\Delta > 0$, elle coupe l'axe Ox en $(x_1 ; 0)$ et $(x_2 ; 0)$.

Si $\Delta = 0$, elle est tangente à l'axe Ox en $(x_1 ; 0)$.

4. La parabole est "ouverte vers le haut" si $a > 0$, et "ouverte vers le bas" si $a < 0$.



§ 37. COMPOSITION DE FONCTIONS

Considérons les deux fonctions $g : x \mapsto 3x$ et $f : x \mapsto x+1$. Appliquons g à x puis f à l'image de x par g :

$$x \xrightarrow{g} 3x \xrightarrow{f} 3x+1$$

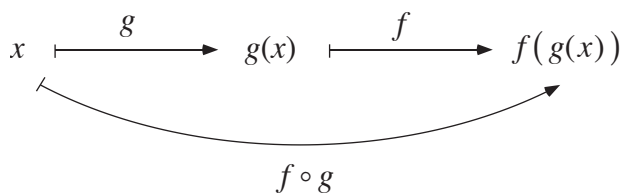
La nouvelle fonction obtenue, $x \mapsto 3x+1$, est appelée **composée** de f et g , et notée $f \circ g$ (lire "*f* rond *g*").

Définition

Soit $g : A \rightarrow B$ et $f : B \rightarrow C$ deux fonctions. La **fonction composée** $f \circ g : A \rightarrow C$ est définie par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Schéma



N.B. Dans l'écriture $f \circ g$, la première fonction qui agit (g) est notée à droite.

Autre exemple

Soit $g : x \mapsto x+3$ et $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = \frac{1}{x+3}$. Donc $f \circ g : x \mapsto \frac{1}{x+3}$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 3 = \frac{1+3x}{x}$. Donc $g \circ f : x \mapsto \frac{1+3x}{x}$.

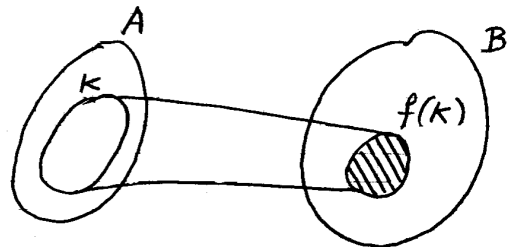
§ 38. IMAGES, PRÉIMAGES

Soit f une fonction de A vers B .

1. K sous-ensemble de A .

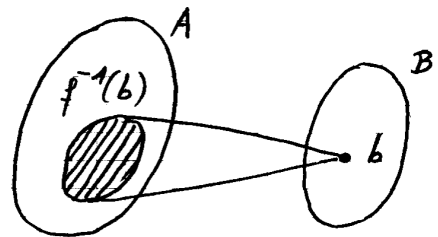
On appelle image de K par f l'ensemble

$$f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$$



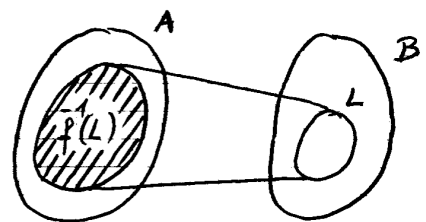
2. $b \in B$. On appelle préimage de b par f l'ensemble

$$f^{-1}(b) = \{x \in A \mid f(x) = b\}$$



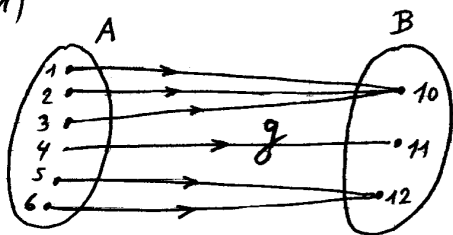
3. L sous-ensemble de B .
La préimage de L par f est l'ensemble

$$f^{-1}(L) = \{x \in A \mid f(x) \in L\}$$



Exemples

1)



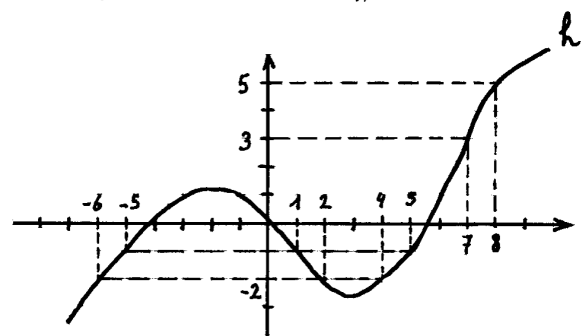
$$g(\{1; 2; 3; 4\}) = \{10; 11\}$$

$$g^{-1}(10) = \{1; 2; 3\}$$

$$g^{-1}(\{11; 12\}) = \{4; 5; 6\}$$

2)

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$h([7; 8]) = [3; 5]$$

$$h^{-1}(-2) = \{-6; 2; 4\}$$

$$h^{-1}([-2; -1]) = [-6; -5] \cup [1; 2] \cup [4; 5]$$

§ 39. INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS

Soit f une fonction de A vers B .

- f est dite **injective** si chaque élément de B possède *au plus une préimage* par f .

Autrement dit, f est injective si et seulement si :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- f est dite **surjective** si chaque élément de B possède *au moins une préimage* par f .

Cela équivaut à dire que :

$$f(A) = B$$

- f est dite **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si chaque élément de B possède *exactement une préimage* par f .

Remarque

Il existe beaucoup de fonctions qui ne sont ni injectives, ni surjectives.

Théorème

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est bijective si et seulement si il existe une fonction ${}^r f : B \rightarrow A$ ("**réci-proque** de f ") telle que :

$${}^r f \circ f = \text{id}_A \quad \text{et} \quad f \circ {}^r f = \text{id}_B$$

On rappelle que id_E désigne la fonction "identité" de E vers E définie par $\text{id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$.

Une bijection n'a qu'une seule réci-proque. En effet :

Soit $g : B \rightarrow A$ telle que $f \circ g = \text{id}_B$. On a alors ${}^r f \circ f \circ g = {}^r f \circ \text{id}_B$, puis $\text{id}_A \circ g = {}^r f$ et finalement $g = {}^r f$.

§ 40. INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Une inéquation du premier degré se résout par les mêmes techniques qu'une équation du premier degré, à ceci près :

Règle

Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inéquation par un même nombre négatif, il faut changer le sens du signe d'inégalité.

En effet : $a < b \Leftrightarrow -a > -b$.

Exemple 1

$$\begin{aligned} -11x + 15 &< 0 && \parallel -15 \\ -11x &< -15 && \parallel :(-11) \\ x &> \frac{15}{11} \\ S &= \left] \frac{15}{11} ; +\infty \right[\end{aligned}$$

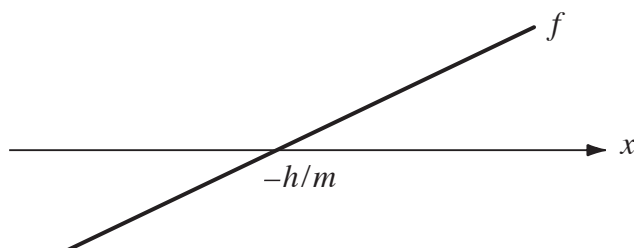
Exemple 2

$$\begin{aligned} -2\left(\frac{2x}{5} - 1\right) &\geq -\frac{x}{2} + \frac{11}{5} \\ -\frac{4x}{5} + 2 &\geq -\frac{x}{2} + \frac{11}{5} && \parallel \cdot 10 \\ -8x + 20 &\geq -5x + 22 && \parallel +5x \\ -3x + 20 &\geq 22 && \parallel -20 \\ -3x &\geq 2 && \parallel :(-3) \\ x &\leq -\frac{2}{3} \\ S &= \left] -\infty ; -\frac{2}{3} \right] \end{aligned}$$

§ 41. SIGNE DE LA FONCTION $f(x) = mx + h$ ($m \neq 0$)

1. Cas $m > 0$

La droite représentative de la fonction f a une pente strictement positive. Elle "monte" :

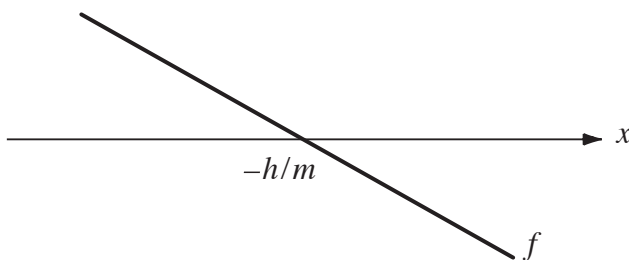


On en déduit le signe de f :

x	$-h/m$		
$f(x)$	$-$	0	$+$

2. Cas $m < 0$

La droite représentative de la fonction f a une pente strictement négative. Elle "descend" :

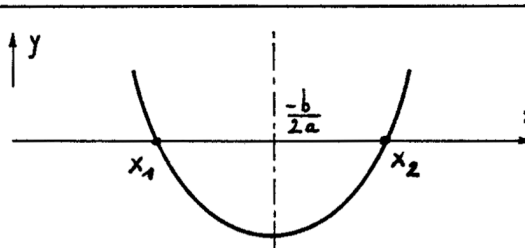
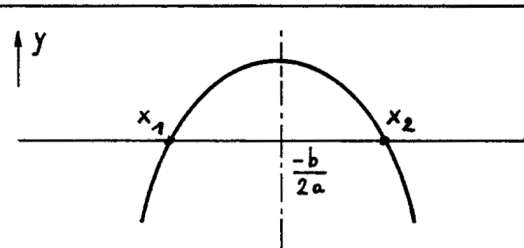
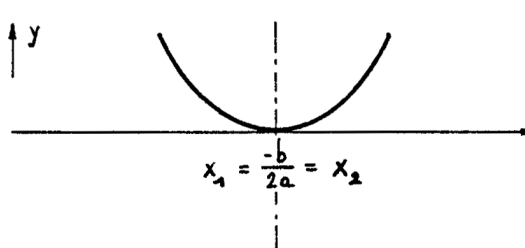
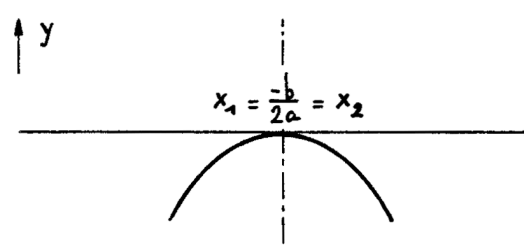
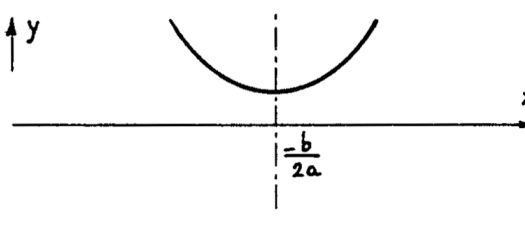
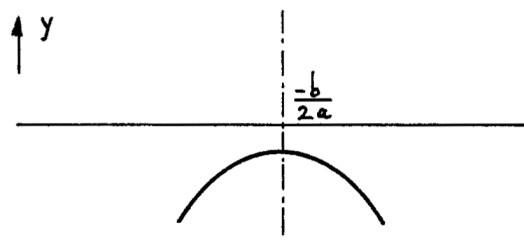


D'où le signe de f :

x	$-h/m$		
$f(x)$	$+$	0	$-$

§ 42. SIGNE DE LA FONCTION $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- $\Delta = b^2 - 4ac$ = discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$
- Si $\Delta \geq 0$: x_1, x_2 = zéros du trinôme = $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; $\Delta = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

	$a > 0$	$a < 0$																								
$\Delta > 0$	 <table data-bbox="285 848 812 960"><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x		x_1		x_2		f(x)	+	0	-	0	+	 <table data-bbox="860 848 1386 960"><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		x_1		x_2		f(x)	-	0	+	0	-
x		x_1		x_2																						
f(x)	+	0	-	0	+																					
x		x_1		x_2																						
f(x)	-	0	+	0	-																					
$\Delta = 0$	 <table data-bbox="285 1252 812 1364"><tr><td>x</td><td></td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x		$-\frac{b}{2a}$		f(x)	+	0	+	 <table data-bbox="860 1252 1386 1364"><tr><td>x</td><td></td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		$-\frac{b}{2a}$		f(x)	-	0	-								
x		$-\frac{b}{2a}$																								
f(x)	+	0	+																							
x		$-\frac{b}{2a}$																								
f(x)	-	0	-																							
$\Delta < 0$	 <table data-bbox="285 1655 812 1744"><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td></td><td>+</td></tr></table>	x			f(x)		+	 <table data-bbox="860 1655 1386 1744"><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td></td><td>-</td></tr></table>	x			f(x)		-												
x																										
f(x)		+																								
x																										
f(x)		-																								

Règle. Le signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est égal au

"signe de a, sauf entre les zéros"

§ 43. *SIGNE D'UNE FONCTION RATIONNELLE**

Exemple

Etudions le signe de la fonction $f(x) = \frac{-2x^3 - 4x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$.

On commence par factoriser le numérateur N et le dénominateur D :

$$f(x) = \frac{-2x(x+1)^2}{(x-2)(x-3)}$$

Zéros de N : $0 ; -1$

Zéros de D : $2 ; 3$ (= pôles de f)

On dresse alors le tableau suivant, qui exploite la "règle des signes" pour un produit ou un quotient :

x	-1		0		2		3	
$-2x$	+		+	0	-		-	
$(x+1)^2$	+	0	+		+		+	+
$x-2$	-		-		-	0	+	
$x-3$	-		-		-		-	0
$f(x)$	+	0	+	0	-		+	

Application

On peut utiliser l'étude ci-dessus pour résoudre l'inéquation

$$\frac{-2x^3 - 4x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$$

En regardant la première et la dernière ligne du tableau de signes, on obtient l'ensemble S des solutions :

$$S = \{-1\} \cup [0 ; 2[\cup]3 ; +\infty[$$

* Une fonction rationnelle est une fonction du type $\frac{N(x)}{D(x)}$, où $N(x)$ et $D(x)$ sont des polynômes.