

ALGÈBRE LINÉAIRE

EXERCICES

2014

EXERCICES

50. Soit $u = (2; 0; 1; 3)$, $v = (-1; 3; 2; 6)$, $w = (0; 0; 3; 2)$ et $t = (12; -6; 22; 17)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

- a) Calculer $3u + 2v - w$.
- b) Exprimer t comme combinaison linéaire de u , v et w . [C'est-à-dire : trouver, sans tâtonner, des réels α , β , γ tels que $t = \alpha u + \beta v + \gamma w$.]
- c) v est-il une combinaison linéaire de u et w ?

51. Soit $u = (2; -1; 0; 3)$, $v = (-1; 0; 0; 1)$ et $w = (\frac{20}{3}; -3; 0; \frac{25}{3})$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Déterminer des réels non nuls α , β , γ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0; 0; 0; 0)$. En déduire que w est une combinaison linéaire de u et v .

52. Dans $\mathbb{R}^2$ identifié au plan Oxy :

- a) Représenter $u = (3; 2)$, $v = (1; 4)$, $u + v$, $2u$, $3u$, $-v$, $-2v$.
- b) Décrire géométriquement les ensembles $A = \{ \alpha(u + v) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$
et $B = \{ \alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$.

53. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $e_1 = (1; 0; 0; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0; 0)$, $e_3 = (0; 0; 1; 0)$ et $e_4 = (0; 0; 0; 1)$. Montrer que tout vecteur $u = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4)$ peut s'exprimer de manière unique comme combinaison linéaire de e_1 , e_2 , e_3 et e_4 .

113. Vérifier que $\mathbb{R}^2$ muni des lois suivantes est un espace vectoriel.

- Loi interne : $(u_1; u_2) + (v_1; v_2) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$
- Loi externe : $\alpha(u_1; u_2) = (\alpha u_1; \alpha u_2)$

114. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $F(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de A vers $\mathbb{R}$. Vérifier que $F(A, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel pour les lois suivantes :

- Loi interne : addition des fonctions
- Loi externe : multiplication d'une fonction par un réel

115. Soit un espace vectoriel E .

Démontrer que, quel que soit le vecteur $u \in E$ et le réel α , on a :

- | | |
|--|----------------------|
| 1) $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$ | 2) $0u = \mathbf{0}$ |
| 3) $\alpha u = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } u = \mathbf{0})$ | 4) $-u = (-1)u$ |
| 5) $-(\alpha u) = (-\alpha)u = \alpha(-u)$ | |

116. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition habituelle, ainsi que la multiplication externe définie par : $\alpha \cdot u = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{Z}$. L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

117. Soit T l'ensemble des fonctions f de $[0; 2\pi]$ vers $\mathbb{R}$ du type $f(x) = a \cos(x) + b$. Montrer que l'ensemble T est un sous-espace vectoriel de $F(A, \mathbb{R})$.

118. Montrer que l'ensemble S des solutions de l'équation $x - 4y + 7z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En est-il de même pour l'équation $x - 4y + 7z = 1$?

119. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$A = \{(x; y; z) x = 12\}$	$B = \{(x; y; z) z = 0\}$
$C = \{(x; y; z) y = 3x\}$	$D = \{(x; y; z) 2x + y + z = 21\}$
$E = \{(x; y; z) 3x + 4y - 5z = 0\}$	$F = \{(x; y; z) xy = z\}$
$G = \{(x; y; z) x^2 + y^2 = z^2\}$	?

120. Soit $F = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

- 1) Montrer que l'ensemble des fonctions paires de F est un sous-espace vectoriel de F .
- 2) Montrer que l'ensemble des fonctions impaires de F est un sous-espace vectoriel de F .

121. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble D des fonctions dérivables de I vers $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $F(I, \mathbb{R})$.

122. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A_α le sous-ensemble de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ constitué des fonctions affines f telles que $f(\alpha) = 0$. Montrer que A_α est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

123. Démontrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

123 BIS. Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $\langle u, v, w \rangle = \{ \alpha u + \beta v + \gamma w \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

(Il faut donc prouver que la somme de deux combinaisons linéaires de u, v et w en est aussi une, et que le produit par un réel d'une combinaison linéaire de u, v et w en est une.)

124. Soient $r = (1; 0; 0)$, $s = (0; 1; 0)$, $t = (0; 0; 1)$ et $u = (1; 2; 3)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Décrire les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:

- 1) $\langle r \rangle$ 2) $\langle r, s \rangle$ 3) $\langle s, t \rangle$ 4) $\langle u \rangle$ 5) $\langle r, u \rangle$ 6) $\langle r, s, u \rangle$

124 BIS. Dans $\mathbb{R}^3$, donner l'équation paramétrique des droites suivantes :

- a) $\langle (1; -2; 5) \rangle$ b) $\langle (0; 0; 1) \rangle$ c) $\langle (2; 1; 3), (6; 3; 9) \rangle$

124 TER. Dans $\mathbb{R}^3$, donner l'équation cartésienne des plans suivants :

- a) $\langle (1; 1; -1), (1; 6; 4) \rangle$ b) $\langle (1; 1; 9), (-1; 4; 1), (0; 5; 10) \rangle$

125. Soit P_2 l'espace vectoriel des fonctions réelles polynomiales du type $ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Décrire les sous-espaces suivants de P_2 :

- | | | |
|--------------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\langle 1 \rangle$ | 2) $\langle x \rangle$ | 3) $\langle 1, x \rangle$ |
| 4) $\langle 1, x, x^2 \rangle$ | 5) $\langle 0 \rangle$ | 6) $\langle 2, 3x, x^2, 3x+1 \rangle$ |

126. Soient u_1, u_2 et u_3 trois vecteurs d'un espace vectoriel E .

- a) Montrer que si u_3 peut s'exprimer comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 , alors il existe des réels α_1, α_2 et α_3 non tous nuls tels que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$.
- b) Réciproquement, montrer que s'il existe des réels α_1, α_2 et α_3 non tous nuls tels que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$, alors l'un des vecteurs u_i au moins peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres.

126 BIS.—

- a) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $u = (2; 3)$ et $v = (-1; 5)$. Montrer que la famille (u, v) est libre en prouvant que $\alpha u + \beta v = (0; 0)$ implique $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.
- b) Dans $\mathbb{R}^3$, on donne $u = (1; 3; -1)$, $v = (2; 0; 0)$ et $w = (-1; 1; 1)$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre en prouvant que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0; 0; 0)$ implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
- c) Montrer que, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs $e_1 = (1; 0; 0; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0; 0)$, $e_3 = (0; 0; 1; 0)$ et $e_4 = (0; 0; 0; 1)$ sont linéairement indépendants.

126 TER. Dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ?

$$u_1 = (1; 0; 0; 0), \quad u_2 = (0; 0; 1; 0), \quad u_3 = (1; 1; 0; 0), \quad u_4 = (2; -1; 1; 0)$$

127. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan, muni d'un repère orthonormé.

Montrer que $|\text{Det}(\vec{a}; \vec{b})|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Indication. Pour déterminer la hauteur du parallélogramme, utiliser la formule connue donnant la distance d'un point à une droite :

$$\delta(P; d) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad (A \in d; \vec{n} \perp d)$$

- 128.** 1) Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs $(1; 2; -1)$, $(1; -1; 3)$ et $(m; -1; 2)$, où m est un nombre réel. Pour quelle(s) valeur(s) de m forment-ils une famille liée ?
- 2) Même question avec les vecteurs $(m; 2; 1)$, $(2; m; 3)$ et $(1; 2; 1)$.

129. Soit $A = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ et f, g, h trois éléments de $F(A, \mathbb{R})$ définis par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} ; \quad g(x) = \frac{3}{x-1} ; \quad h(x) = \frac{1}{2x+2}$$

La famille (f, g, h) est-elle libre ?

130. La famille suivante de fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle libre ou liée ?

$$(x \mapsto 1; x \mapsto \sin x; x \mapsto \sin(2x))$$

131. La famille suivante de fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle libre ou liée ?

$$(x \mapsto 1; x \mapsto \cos^2 x; x \mapsto \cos(2x))$$

132. Une matrice est dite *échelonnée* relativement aux colonnes (resp. lignes) si le nombre de zéros consécutifs en début de colonne (resp. ligne) augmente strictement d'une colonne (resp. ligne) à la suivante.

Montrer que les vecteurs colonne de la matrice échelonnée ci-dessous forment une famille libre de $\mathbb{R}^5$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

133. Dans $\mathbb{R}^3$.

- a) Soit $u \neq 0$. Montrer que si $v \notin \langle u \rangle$, alors la famille (u, v) est libre.
- b) Montrer que si (u, v) est libre et si $w \notin \langle u, v \rangle$, alors la famille (u, v, w) est libre.

134.—

Soit $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ une famille libre d'un espace vectoriel E , et $A = \langle e_1; e_2; \dots; e_p \rangle$.
Montrer que si $v \in E - A$, alors la famille $(e_1; e_2; \dots; e_p; v)$ est libre.

135. Résoudre les systèmes suivants :

1) Dans $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

2) Dans $\mathbb{R}^4$:
$$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ 2y - z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

3) Dans $\mathbb{R}^5$:
$$\begin{cases} x - 2y + z + t - u = 1 \\ y - z - t + u = 1 \\ z + t - 2u = 0 \end{cases}$$

4) Dans $\mathbb{R}^4$:
$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ 2x + z + 2t = -1 \\ y + z - t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

136. Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $u_1 = (1; -1; 1; 0)$, $u_2 = (-1; 3; -1; 2)$, $u_3 = (0; 1; 1; 1)$ et $u_4 = (2; -1; 1; 1)$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée en exhibant (sans tâtonnement) une combinaison linéaire nulle des u_i dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

137. Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

1) $e_1 = (1; 1)$ $e_2 = (1; 0)$ $u = (0; 1)$

2) $e_1 = (1; 1)$ $e_2 = (-1; 1)$ $u = (1; 3)$

138. Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

1) $e_1 = (1; 1; -1)$ $e_2 = (1; -1; 0)$ $e_3 = (1; 0; 1)$ $u = (0; 1; 0)$

2) $e_1 = (1; -1; 0)$ $e_2 = (0; 1; -1)$ $e_3 = (1; 0; 2)$ $u = (1; 1; 1)$

3) $e_1 = (1; 0; 1)$ $e_2 = (1; -1; 0)$ $e_3 = (1; -1; -1)$ $u = (0; 1; 0)$.

139. Dans $\mathbb{R}^4$, trouver une base comprenant :

1) le vecteur $(2; 1; 3; 2)$.

2) le vecteur $(2; 1; 0; 3)$ et $(1; -2; 1; 0)$.

3) le vecteur $(2; 0; 1; 0)$, $(0; 0; 1; 3)$ et $(0; 1; 1; 0)$.

140. Trouver une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par

$$\{(3; 2; -2), (7; -3; 1), (-11; 8; -4), (4; -5; 3)\}$$

141. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base d'un espace vectoriel E . Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel U de E engendré par les quatre vecteurs suivants :

$$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4$$

$$u_2 = 2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4$$

$$u_3 = 3e_1 + 7e_2 + e_4$$

$$u_4 = e_1 + 9e_2 + 4e_3 - e_4$$

Extraire de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) une base de U .

142. Trouver une base du sous-espace $E = \{(x, y, z, t) \mid x + y = z - t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

143. Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer une base du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1; -1; 2; 0), \quad u_2 = (3; 1; -1; 1), \quad u_3 = (2; 0; 0; 3), \quad u_4 = (1; 3; -5; 1).$$

150.—

- a) Dans $\mathbb{R}^4$, trouver une base du sous-espace d'équation $x + 2y - z + t = 0$.
- b) Même question pour le sous-espace solution du système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ x - 4z + t = 0 \end{cases}$$

151.—

- 1) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille (x, y, z) , où $x = (3; 3; 4; 1)$, $y = (1; -1; 2; 1)$ et $z = (1; 2; 0; 1)$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel engendré par cette famille.
- 2) Même question pour la famille (t, u, v, w) , où $t = (0; 3; 2; 1)$, $u = (2; 1; 0; -1)$, $v = (1; 0; 1; 2)$ et $w = (1; 1; 1; 1)$.
- 3) Déterminer une base de l'intersection des deux espaces précédents.

152. (*Unicité des composantes d'un vecteur*) Soit $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ une base d'un espace vectoriel E , et $v \in E$. Montrer que si $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$, alors $\alpha_i = \beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

153. Soit P_2 l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degrés ≤ 2 .

- a) Montrer que $B = (1; x; x^2)$ est une base de P_2 .
- b) Montrer que $B' = (2 - x; 1 + 2x; 1 - x^2)$ est également une base de P_2 .
- c) Trouver les composantes de la fonction $u = 2x^2 - 4x + 3$ relativement à la base B et relativement à la base B' .

154. Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par $E = \{(x; y; z) \mid x = 0\}$ et F le sous-espace engendré par $(4; 3; 2)$ et $(2; -1; 2)$. Trouver une base de $E \cap F$.

Indication : commencer par déterminer l'équation cartésienne du plan F .

200. Soit $h: E \rightarrow F$ une application linéaire. Démontrer les propriétés suivantes, pour tout $u, v \in E$: 1) $h(-u) = -h(u)$ 2) $h(u - v) = h(u) - h(v)$ 3) $h(o_E) = o_F$

201. Les applications h , de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, définies de la façon suivante, sont-elles linéaires ?

- | | |
|------------------------|------------------------------|
| 1) $h((x; y)) = x + y$ | 2) $h((x; y)) = 2x - y$ |
| 3) $h((x; y)) = xy$ | 4) $h((x; y)) = (2x - y; x)$ |

202. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x; y) \mapsto ax + by$ | $(a, b \in \mathbb{R})$ |
| 2) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x; y) \mapsto (ax + by; cx + dy)$ | $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ |

203. Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $(e_1; e_2)$ et $u = xe_1 + ye_2$. Les applications h définies de la façon suivante sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?

- | | |
|----------------------------|-----------------------|
| 1) $h(u) = 3u$ | 2) $h(u) = u + e_2$ |
| 3) $h(u) = o$ | 4) $h(u) = -u$ |
| 5) $h(u) = xe_1$ | 6) $h(u) = u - 3xe_2$ |
| 7) $h(u) = u + (x - y)e_2$ | |

204. Les applications h définies de la façon suivante sont-elles des endomorphismes de P_2 ?

- | |
|---|
| 1) $h(ax^2 + bx + c) = ax^2$ |
| 2) $h(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$ |
| 3) $h(ax^2 + bx + c) = x(2ax + b) + 2a$ |

205. Soit $D([a; b]; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de $[a; b]$ vers $\mathbb{R}$. Les applications de $D([a; b]; \mathbb{R})$ vers $F([a; b]; \mathbb{R})$ définies de la façon suivante sont-elles linéaires ?

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) $h(f) = f'$ | 2) $h(f) = f' - f^2$ |
| 3) $h(f): x \mapsto f(a)$ | 4) $h(f): x \mapsto f(b) + 1$ |
| 5) $h(f): x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ | 6) $h(f): x \mapsto 3 + \int_a^x f(t) dt$ |
| 7) $h(f): x \mapsto e^{f(x)}$ | 8) $h(f): x \mapsto f(x)e^x$ |

205 BIS. On identifie $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) au plan (resp. à l'espace) via un repère orthonormé. Se convaincre géométriquement que toute réflexion ou rotation de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) laissant fixe l'origine o est linéaire.

206. Effectuer :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1/7 \end{pmatrix}$

c) $5 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0,6 \\ -20 & 15 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

207. Effectuer :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

208. Calculer, quand cela est possible, les produits AB et BA des matrices A et B suivantes :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) $A = (1 \ 2 \ 3)$

$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

209. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer :

- 1) $A(B+C)$, tAB , tBA
- 2) $(A+B)^2$, $A^2+2AB+B^2$
- 3) $(A+B)(A-B)$, A^2-B^2
- 4) C^2 , C^3 , C^n ($n \in \mathbb{N}^*$)

210. Soient E et F deux espaces vectoriels, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de F . Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire $h: E \rightarrow F$ telle que, pour tout $k \in \{1; 2; \dots; n\}$, $h(u_k) = v_k$.

Une application linéaire est donc entièrement déterminée par son effet sur les vecteurs d'une base.

211. On considère l'application h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie relativement à la base canonique par

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vérifier que h est linéaire, puis décrire géométriquement l'application h lorsque $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vaut :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_8 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_9 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

212. On considère l'application h de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie relativement à la base canonique par

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Décrire géométriquement l'application h lorsque $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ vaut :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

213. Considérons l'application $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique $(e_1; e_2)$.

- Calculer les images des vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, e_1 et e_2 .
- Dessiner l'image du carré $((0; 0); e_1; (1; 1); e_2)$ par h .
- Montrer que l'image par h d'une droite est une droite.

214. Soit $h: E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que si $(e_1; e_2; \dots; e_p)$ est une base de E , alors $\text{Im}(h)$ est engendrée par la famille $(h(e_1); h(e_2); \dots; h(e_p))$.

216. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Considérons l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$, appelé *transvection* ou *cisaillement* d'axe Ox et de facteur λ , dont la matrice relative à la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etablir les propriétés suivantes :

- a) L'ensemble de points fixes de h est l'axe Ox .
- b) Un point non fixe et son image déterminent une parallèle à Ox .
- c) h est bijective.
- d) L'image d'une droite est une droite.
- e) h conserve le parallélisme.

On définit de manière analogue le cisaillement d'axe Oy et de facteur λ . Sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

217. Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique $(e_1; e_2)$, déterminer

(1) la matrice (2) le noyau (3) l'image
des endomorphismes suivants :

- a : projection orthogonale sur l'axe $\langle e_1 \rangle$;
- b : identité ;
- c : symétrie d'axe $\langle e_2 \rangle$;
- d : symétrie de centre o ;
- e : affinité d'axe $\langle e_1 \rangle$, de direction $\langle e_2 \rangle$ et de rapport -3 ;
- f : rotation de centre o et d'amplitude -30° ;
- g : rotation de centre o et d'amplitude α ;
- h : homothétie de centre o et de rapport r ;
- k : symétrie d'axe $\langle e_1 + e_2 \rangle$.

218. P_2 est muni de la base $(x^2; x; 1)$. Donner la matrice, le noyau et l'image de chacun des endomorphismes suivants :

$$\begin{array}{ll} 1) & h(ax^2 + bx + c) = ax^2 \\ 2) & h(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a \\ 3) & h(ax^2 + bx + c) = x(2ax + b) + 2a \end{array}$$

219. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes, données par leur matrice relative aux bases canoniques.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2) \quad h: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4 ; & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

220. $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leur base canonique.

1) Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

$$f: \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad g: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad h: \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i: \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad j: \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad k: \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$l: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Déterminer la matrice, le noyau et l'image des applications linéaires composées suivantes :
 $m = f \circ j$, $n = f \circ l$, $p = g \circ k$, $q = (f + g) \circ j$.

221. Trouver la matrice M (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$) de la rotation de centre o amenant $p\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sur $p'\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Idem pour la matrice N de la rotation de centre o amenant p' sur p . Calculer MN .

Indication : p et p' sont sur le cercle de centre o et de rayon 1.

222. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B de type 2×2 telles que $AB = BA$.

223. Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(i; j; k)$ et h l'application linéaire de E vers E définie par

$$h(i) = i + j \quad h(j) = 2i - j \quad h(k) = i - 2j.$$

Déterminer la matrice, le noyau et l'image de h ; h est-elle injective ? surjective ?

224. Soit E un espace vectoriel muni d'une base (i, j) et h l'endomorphisme de E défini par $h(2i + j) = 2i - 3j$ et $h(i - j) = 3i - j$. Déterminer la matrice, le noyau et l'image de h ; h est-il injectif ? surjectif ?

225. Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1; e_2; e_3)$ et F un espace vectoriel muni d'une base $(u; v)$. Soit $a = (2; -1)$, $b = (1; -1)$, $c = (2; -3)$ trois éléments de F et $t = (1; 2; 2)$ un élément de E . Déterminer la matrice, le noyau et l'image de l'application linéaire h de E vers F telle que $h(e_1) = a$, $h(e_2) = b$ et $h(t) = c$.

226.—

- 1) Démontrer que l'ensemble P_3 des polynômes de la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ ($a_i \in \mathbb{R}$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ et que $B = (1; x; x^2; x^3)$ en est une base.
- 2) Soit $\varphi_2: P_3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_2(P) = P(2)$. Déterminer la matrice de φ_2 relativement aux bases B de P_3 et (1) de $\mathbb{R}$.
- 3) Déterminer le noyau et l'image de φ_2 .

227. Soit $h: E \rightarrow F$ une application linéaire telle que $h \circ h = 0$. Prouver que $\text{Ker}(h) \supset \text{Im}(h)$.

228. Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ donnés par les matrices :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 14 & -4 & -4 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau, l'image et le rang de f , g , $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$.

229. Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice canonique

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Déterminer a et b pour que la dimension de $\text{Im}(h)$ soit 2. Donner alors $\text{Ker}(h)$.

230. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, et $h: E \rightarrow F$, $k: F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Prouver que : a) $\text{rg}(k \circ h) \leq \text{rg}(k)$ b) $\text{rg}(k \circ h) \leq \text{rg}(h)$

231. Soit $f: E \rightarrow E$ une application linéaire bijective. Montrer que sa réciproque ${}^r f$ est également linéaire.

232. Montrer que tout espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. (Il s'agit donc de trouver une application linéaire bijective de E vers $\mathbb{R}^n$.)

233. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, E un espace vectoriel et $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ une application linéaire non nulle telle que $h(u) = 0$. Prouver que $\text{Im}(h)$ est de dimension 1.

234. Dans le plan Oxy , déterminer le sommet b d'un triangle équilatéral oab , connaissant le sommet $a(4; -2)$. *Indication* : se servir d'une rotation.

300. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a-x & c \\ b & d-x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2m & -(m+2) \\ 2(m-1) & -m \end{vmatrix}$$

301. On appelle **cofacteur** de la matrice $A = (a_{ij})$ le nombre $(-1)^{i+j} M_{ij}$, où M_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A . Démontrer la propriété suivante, dans le cas d'une matrice de type 3×3 :

Le déterminant d'une matrice est égal à la somme des produits des éléments d'une colonne quelconque par les cofacteurs des éléments de cette colonne.

302.—

a) Développer selon la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Développer selon la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

c) Développer selon la troisième ligne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

303. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 9 & -7 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

304. Démontrer les propriétés suivantes du déterminant, pour des matrices de type 3×3 .

1) Le déterminant d'une matrice et celui de sa transposée sont égaux.

Remarque. Cela implique que les propriétés relatives aux lignes d'un déterminant sont les mêmes que celles relatives à ses colonnes.

2) Si l'on permute deux colonnes d'une matrice, son déterminant change de signe.

3) $\text{Det}(a; b; c) = \text{Det}(c; a; b) = \text{Det}(b; c; a)$.

4) Si deux colonnes d'une matrice sont proportionnelles, le déterminant est nul.

5) Le déterminant ne change pas si l'on ajoute à une colonne de la matrice un multiple d'une autre colonne (ou, par conséquent, une combinaison linéaire des autres colonnes).

6) Si l'on multiplie *une* colonne d'une matrice par un nombre λ , le déterminant est multiplié par λ .

305. Démontrer que si les colonnes d'une matrice carrée sont linéairement dépendantes, alors son déterminant est nul.

306. Sachant que les nombres 85, 527 et 7854 sont divisibles par 17, prouver (sans le développer) que le déterminant ci-dessous est aussi divisible par 17 :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \\ 78 & 0 & 54 \end{vmatrix}$$

307. On rappelle que le *produit mixte* de trois vecteurs de l'espace a , b et c est défini par :

$$[a; b; c] = a \cdot (b \times c)$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire et $\times$ le produit vectoriel. On sait de plus que la valeur absolue de $[a; b; c]$ est égale au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs a , b et c . Vérifier que :

$$[a; b; c] = \text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

308. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & b+c & a \\ 1 & c+a & b \\ 1 & a+b & c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 5 & -3-t & 1 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \ln(x) & \ln(y) & \ln(z) \\ \ln(2x) & \ln(2y) & \ln(2z) \\ \ln(3x) & \ln(3y) & \ln(3z) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$$

309. Calculer les déterminants suivants :

$$1) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \quad 2) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

310. Calculer les déterminants suivants et écrire le résultat sous forme d'un produit :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

311. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 telle que $\text{Det}(M) \neq 0$.

a) Chercher une matrice $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $MN = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que la matrice N trouvée vérifie également $NM = I_2$.

c) Que se passe-t-il si $\text{Det}(M) = 0$?

312. Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 &1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \\
 &6) \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \quad 7) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix} \\
 &9) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad 10) \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

313. Soit le système

$$S: \begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 15 \\ 2x - y + 4z = 10 \end{cases}$$

- Ecrire S sous la forme $AX = B$, où A , X et B sont des matrices de types respectifs 3×3 , 3×1 et 3×1 .
- Calculer A^{-1} et exprimer X en fonction de A^{-1} et B . En déduire la solution du système S .

314. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $(e_1; e_2; e_3)$. On définit un endomorphisme f de E par $f(e_1) = e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_3$ et $f(e_3) = e_1 + e_2$.

- Montrer que f est un automorphisme.
- Calculer ${}^r f(e_1)$, ${}^r f(e_2)$ et ${}^r f(e_3)$.

315. Mêmes questions qu'à l'exercice précédent pour l'endomorphisme g défini par :

$$g(e_1) = e_1; \quad g(e_2) = e_1 + 3e_2; \quad g(e_3) = e_1 + 3e_2 + e_3$$

316. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le cube dont les sommets sont $a = o = (0; 0; 0)$, $b = e_1 = (1; 0; 0)$, $c = (1; 1; 0)$, $d = e_2 = (0; 1; 0)$, $e = e_3 = (0; 0; 1)$, $f = (1; 0; 1)$, $g = (1; 1; 1)$ et $h = (0; 1; 1)$. Sur le côté bc , le point u est tel que $\widehat{bau} = 30^\circ$. Soit encore r la rotation d'axe $\langle e_3 \rangle$ amenant b sur la droite au , et soit p la projection orthogonale sur le plan $\langle e_2; e_3 \rangle$.

- Donner les matrices canoniques de r , p et $p \circ r$.
- Calculer les images des points e , f , g et h par $p \circ r$, puis dessiner en vraie grandeur l'image du cube par l'application $p \circ r$.

317. On donne deux bases B et B' d'un espace vectoriel E , ainsi que les composantes X d'un vecteur u relativement à la base B . Déterminer les composantes X' de u relativement à B' .

1) $E = \mathbb{R}^2$; $B =$ base canonique ; $B' = ((2; 5); (-1; -3))$; $X = {}^t(12 \quad -1)$.

2) $E = \mathbb{R}^3$; $B =$ base canonique ; $B' = ((2; 1; 0); (0; 0; 1); (-1; 0; 1))$;
 $X = {}^t(2 \quad -3 \quad 7)$.

3) $E = \mathbb{R}^4$; $B =$ base canonique ;
 $B' = ((1; 0; 0; 0); (0; 2; 0; 0); (0; 0; -1; 0); (0; 1; 0; 1))$;
 $X = {}^t(-5 \quad 2 \quad 0 \quad 4)$.

318. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(e_1; e_2)$, on considère les vecteurs

$$u = (2; 1), \quad v = (-1; 1), \quad s = (3; 1), \quad t = \left(2; \frac{1}{3}\right)$$

et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base $(e_1; e_2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

1) $(e_2; e_1)$ 2) $(e_1 + e_2; 3e_2)$ 3) $(u; v)$ 4) $(s; t)$

319. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(e_1; e_2; e_3)$, on considère les vecteurs $u = (1; 1; 1)$ et $v = (1; 1; 0)$ et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $(e_1; e_2; e_3)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

1) $(e_3; e_2; e_1)$ 2) $(u; v; e_1)$

320. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2)$, on considère les sous-espaces vectoriels $U = \langle u \rangle$ et $V = \langle v \rangle$, où $u = (3; 1)$ et $v = (-1; 1)$. On désigne par s la symétrie d'axe U et de direction V , et par p la projection sur V de direction U . Trouver les matrices de s et de p dans la base B .

Indication : commencer par déterminer la matrice relative à la base $B' = (u, v)$, puis effectuer le changement de base $B \rightarrow B'$.

321. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1; e_2; e_3)$, on considère les sous-espaces vectoriels $U = \langle (1; 2; 1) \rangle$ et $V : x - y = 0$. On désigne par s la symétrie d'axe U et de direction V , et par p la projection sur V de direction U . Trouver les matrices de s et de p dans la base B .

322. Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 sont des nombres réels. On considère la base $\mathcal{B} = (1; x; x^2; x^3)$ de P_3 ainsi que l'application $f : P_3 \rightarrow P_3$ qui à toute fonction fait correspondre sa dérivée.

- 1) Vérifier que f est un endomorphisme de P_3 .
- 2) Ecrire la matrice A de f relativement à $\mathcal{B}$.
- 3) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- 4) Montrer que $\mathcal{B}' = (1 + x; x(x - 2); x(x - 1); x(x - 1)(x - 2))$ est une base de P_3 .
- 5) Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

323. Montrer que si M est la matrice d'un endomorphisme h relativement à une base B , et si M' est la matrice de h relativement à une base B' , alors $\text{Det}(M) = \text{Det}(M')$.

Remarque. Cela autorise la définition du déterminant de h .

324. On donne la matrice M d'un endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ relativement à la base canonique.

- Déterminer les valeurs propres de h et, pour chacune d'elles, un vecteur propre associé.
- Donner la matrice M' de h relativement à une nouvelle base formée de vecteurs propres de M .
- En déduire la nature géométrique de h .

1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 13 & 24 \\ -8 & -15 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

8) $\frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$

325. On donne les endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^3$ par leur matrice relativement à la base canonique :

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 42 & -64 \\ 0 & 3 & 84 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque c'est possible, déterminer un changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme, puis caractériser celui-ci géométriquement.

326. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, h un endomorphisme de E , λ une valeur propre de h et u un vecteur propre associé à λ .

- Montrer que, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, αu est aussi un vecteur propre de h .
- Soit E_λ^* l'ensemble des vecteurs propres de h associés à la valeur propre λ . Montrer que $E_\lambda^* \cup \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de E . Ce sous-espace, noté E_λ , est appelé *espace propre* associé à λ . On a : $E_\lambda = \{v \in E \mid h(v) = \lambda v\}$.
- Prouver que $h(E_\lambda) \subset E_\lambda$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer les valeurs propres et espaces propres de la symétrie d'axe $x + y = 0$.

327. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois valeurs propres d'un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$, et u_1, u_2, u_3 des vecteurs propres associés.

Montrer que si (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, alors la matrice de h relativement à cette base est diagonale.

Réciproquement, établir que si la matrice de h relativement à une certaine base est diagonale, alors cette base est constituée de vecteurs propres.

328. Montrer que l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ défini par $h((x; y)) = (-y; x)$ n'admet aucun vecteur propre.

329. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère un endomorphisme h qui admet les valeurs propres 2 et -3 , avec les espaces propres $E_2 = \langle (2; -1) \rangle$ et $E_{-3} = \langle (3; 1) \rangle$. Déterminer la matrice de h dans la base canonique.

330. Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ de matrices :

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} a & a-1 \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

8) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

331. Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ admettant les valeurs propres 0 et 1 est une projection.

332. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère l'endomorphisme h de matrice

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 \\ m-2 & \frac{1}{2}(4-3m) \end{pmatrix}$$

- 1) Trouver $\text{Im}(h)$ et $\text{Ker}(h)$ en fonction du réel m .
- 2) Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme h est-il une projection ?
- 3) Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme h est-il une symétrie ?

400. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ une matrice telle que ${}^t A A = I$.

Montrer que ses vecteurs colonne sont unitaires (= de norme 1), et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

401. Soit A une matrice de type $m \times n$ et B une matrice de type $n \times p$. Démontrer que :

$${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$$

« La transposée d'un produit est égale au produit des transposées dans l'ordre inverse. »

402. On considère deux bases orthonormées B et B' de $\mathbb{R}^n$, et un endomorphisme h dont la matrice relative à B est orthogonale. Montrer qu'alors la matrice de h relative à B' est aussi orthogonale.

Indications. • Remarquez que la matrice de passage de B à B' est orthogonale.

• On rappelle que ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$.

403. Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée et h un endomorphisme orthogonal. Montrer que $(h(e_1), h(e_2), \dots, h(e_n))$ est aussi une base orthonormée.

404. Relativement à une base orthonormée $B = (i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$, déterminer les matrices des endomorphismes suivants :

- Rotation r d'axe $\langle k \rangle$ et d'amplitude α .
- Réflexion s par rapport au plan $\langle i, j \rangle$.
- Rotation-réflexion $s \circ r$ et rotation-réflexion $r \circ s$.

405. Etudier l'endomorphisme orthogonal f de $\mathbb{R}^2$ donné par :

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \right)$$

406. Vérifier que les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ donnés ci-dessous par leur matrice relativement à la base canonique sont des endomorphismes orthogonaux, et les caractériser géométriquement :

1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$

407. Vérifier que les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous par leur matrice relativement à la base canonique sont des endomorphismes orthogonaux, et les caractériser géométriquement :

1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\frac{1}{49} \begin{pmatrix} 23 & -36 & 24 \\ -36 & -31 & -12 \\ 24 & -12 & -41 \end{pmatrix}$

4) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

6) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

408. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de la symétrie orthogonale s de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan $\alpha: x+y+z=0$ et celle de la symétrie orthogonale t de $\mathbb{R}^3$ relativement au plan $\beta: 3x+y+4z=0$. Déterminer ensuite la matrice de $r=s \circ t$ et caractériser géométriquement r .

409. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice canonique d'une rotation d'axe $\langle (1; 1; 1) \rangle$ et d'amplitude α telle que $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

410. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme h de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} \quad [a \text{ désigne un nombre réel non nul}]$$

- 1) Prouver que h est diagonalisable en exhibant une base B' relativement à laquelle la matrice A' de h est diagonale.
- 2) Pour tout entier positif n , calculer $(A')^n$ et A^n .

411.—

- a) Montrer qu'un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ conserve le produit scalaire.
- b) Montrer qu'un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ conserve la norme du produit vectoriel.

Indication. Remarquez d'abord que tout endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est une isométrie, et conserve ainsi la norme et les angles non orientés.

RÉPONSES

50 a) $(4; 6; 4; 19)$ b) $t = 5u - 2v + 7w$ c) non

51
$$\begin{cases} \alpha = -9k \\ \beta = 2k \\ \gamma = 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad ; \quad w = 3u - \frac{2}{3}v$$

52 b) $A =$ droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$; $B = \mathbb{R}^2$

100 1) oui / oui / $n = 0$ / $x' = -x$
2) oui / oui / $n = -2$ / $x' = -(x + 4)$
3) non / oui / non / pas de symétries
4) oui / non / non / pas de symétries

101 non / non

102 oui / oui

103 non / oui

107 1) $x = b' * a' * c$ 2) $x = a' * c * b'$ 3) $x = c * b' * a'$ 4) $x = c' * b' * a'$

108 1) $x = a * b'$ 2) $x = a' * b$

109 $x = a' * b$

110 $x = c'$

119 A) non B) oui C) oui D) non E) oui F) non G) non

124 1) axe Ox 2) plan $z = 0$ 3) plan $x = 0$ 4) droite $x = k, y = 2k, z = 3k$
5) plan $-3y + 2z = 0$ 6) $\mathbb{R}^3$

125 1) ensemble des fonctions constantes 2) $\{x \mapsto mx \mid m \in \mathbb{R}\}$
3) $\{x \mapsto mx + h \mid m, h \in \mathbb{R}\}$ 4) P_2
5) $\{0\}$ 6) P_2

128 1) $m = \frac{2}{5}$ 2) $m = 1$ ou $m = 6$

Réponses

$$135 \quad 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$136 \quad -3u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0$$

$$137 \quad 1) u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 2) u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$138 \quad 1) u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad 2) u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3) u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$139 \quad 1) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad 2) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad 3) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$140 \quad ((3; 2; -2); (0; 23; -17))$$

$$141 \quad (u_1, u_2)$$

$$142 \quad ((1; -1; 0; 0); (0; 0; 1; 1))$$

$$150 \quad \text{a) } ((2; -1; 0; 0); (1; 0; 1; 0); (1; 0; 0; -1)) \\ \text{b) } ((8; -7; 2; 0); (1; -1; 0; -1))$$

$$151 \quad 1) (x; y; z) \quad 2) ((1; 1; 1; 1); (0; 3; 2; 1); (0; 0; 2; 4)) \quad 3) \langle (2; 4; 2; 0); (15; -6; 11; 28) \rangle$$

$$153 \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 14/5 \\ -3/5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$154 \quad ((0; -5; 2))$$

Réponses

201 1) oui 2) oui 3) non 4) oui

203 1) oui 2) non 3) oui 4) oui 5) oui 6) oui 7) oui

204 1) oui 2) non 3) oui

205 1) oui 2) non 3) oui 4) non 5) oui 6) non 7) non 8) oui

206 a) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 6/7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$

d) indéfini e) $\begin{pmatrix} 2-x & 0,6 \\ -20 & 15-x \end{pmatrix}$

207 a) $\begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 18 & 2 & -13 \\ 13 & -10 & -22 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 7 & 25 \\ -8 & 26 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$

208 1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 12 \\ 4 & 8 & 14 \end{pmatrix}$ 2) $AB = (32)$; $BA = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$

3) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$

Réponses

209 1) $A(B+C) = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; ${}^tAB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & 7 \\ 4 & 18 & 10 \end{pmatrix}$; ${}^tBA = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 11 & 18 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$;

2) $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 50 & 45 \\ 4 & 29 & 25 \\ -2 & 15 & 14 \end{pmatrix}$; $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 58 & 41 \\ 7 & 37 & 27 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$;

3) $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 7 & -18 & 3 \\ 2 & -11 & 3 \\ 12 & -7 & -4 \end{pmatrix}$; $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$;

4) $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

211 M_1 : homothétie de centre o et de rapport 3

M_2 : identité

M_3 : symétrie de centre o (= rotation de 180° autour de o)

M_4 : réflexion d'axe $\langle e_1 \rangle$

M_5 : réflexion d'axe $\langle e_2 \rangle$

M_6 : réflexion d'axe $\langle e_1 + e_2 \rangle$

M_7 : affinité de direction $\langle e_2 \rangle$, d'axe $\langle e_1 \rangle$ et de rapport 2

M_8 : affinité de direction $\langle e_1 \rangle$, d'axe $\langle e_2 \rangle$ et de rapport -3

M_9 : affinité de direction $\langle e_1 \rangle$, d'axe $\langle e_2 \rangle$ et de rapport 2, suivie d'une affinité de direction $\langle e_2 \rangle$, d'axe $\langle e_1 \rangle$ et de rapport 3

212 M_1 : homothétie de centre o et de rapport 2

M_2 : affinité de direction $\langle e_1 \rangle$, de rapport 3 et de plan fixe $\langle e_2 ; e_3 \rangle$

M_3 : projection de direction $\langle e_2 \rangle$ sur le plan $\langle e_1 ; e_3 \rangle$

M_4 : symétrie d'axe $\langle e_3 \rangle$ et de direction $\langle e_1 ; e_2 \rangle$

M_5 : rotation de 90° autour de $\langle e_3 \rangle$ amenant e_1 sur e_2

M_6 : rotation de 90° autour de $\langle e_2 \rangle$ amenant e_1 sur e_3

213 a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

216 axe : $x + y = 0$; direction : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; rapport : 3

217 a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\langle e_2 \rangle$; $\langle e_1 \rangle$ b : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\{0\}$; $\mathbb{R}^2$

c : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\{0\}$; $\mathbb{R}^2$ d : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\{0\}$; $\mathbb{R}^2$

e : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\{0\}$; $\mathbb{R}^2$ f : $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$; $\{0\}$; $\mathbb{R}^2$

g : $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$; $\{0\}$; $\mathbb{R}^2$ h : $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$; $\{0\}$; $\mathbb{R}^2$ (si $r \neq 0$)

k : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\{0\}$; $\mathbb{R}^2$

218 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\langle 1; x \rangle$; $\langle x^2 \rangle$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\{0\}$; P_2

3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\langle 1 \rangle$; $\langle x^2 + 1; x \rangle$

219 1) $\text{Ker}(h) = \langle (-5; 2; 8; 1) \rangle$; $\text{Im}(h) = \mathbb{R}^3$

2) $\text{Ker}(h) = \langle (-8; 3; -2; 0; 1); (3; -2; 0; 1; 0) \rangle$;

$\text{Im}(h) = \langle (1; 1; 2; 0); (0; 1; 0; 0); (0; 0; 1; 1) \rangle$

220 1) $\text{Ker}(f) = \langle (2; 1; 1) \rangle$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ $\text{Ker}(g) = \langle (3; 5; 1) \rangle$; $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$

$\text{Ker}(h) = \langle (1; -1; -3) \rangle$; $\text{Im}(h) = \mathbb{R}^2$ $\text{Ker}(i) = \langle (17; 7; -2) \rangle$; $\text{Im}(i) = \mathbb{R}^2$

$\text{Ker}(j) = \{0\}$; $\text{Im}(j) = \langle (1; -2; 0); (-3; 1; -1) \rangle = \text{plan}(2x + y - 5z = 0)$

$\text{Ker}(k) = \langle (3; 1) \rangle$; $\text{Im}(k) = \langle (-1; 2; 1) \rangle$

$\text{Ker}(l) = \{0\}$; $\text{Im}(l) = \langle (1; -1; 2); (3; -1; 4) \rangle = \text{plan}(x - y - z = 0)$

Réponses

$$220 \quad 2) \quad M = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}; \quad \text{Ker}(m) = \text{dte}(x - y = 0); \quad \text{Im}(m) = \langle (5; -8) \rangle$$

$$N = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{Ker}(n) = \text{dte}(3x + 5y = 0); \quad \text{Im}(n) = \langle (1; -1) \rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}; \quad \text{Ker}(p) = \text{dte}(-x + 3y = 0); \quad \text{Im}(p) = \langle (1; -5) \rangle$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{Ker}(q) = \{0\}; \quad \text{Im}(q) = \mathbb{R}^2$$

$$221 \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad MN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$222 \quad \text{Matrices du type } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$223 \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{Ker}(h) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad \text{Im}(h) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

ni injective ni surjective

$$224 \quad M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{Ker}(h) = \{0\}; \quad \text{Im}(h) = E; \quad h \text{ est injectif et surjectif}$$

$$228 \quad \text{Ker}(f): 2x - y = 0; \quad \text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad \text{rg}(f) = 1$$

$$\text{Ker}(g): 7x - 2y - 2z = 0; \quad \text{Im}(g) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad \text{rg}(g) = 1$$

$$\text{Ker}(g \circ f) = \mathbb{R}^3; \quad \text{Im}(g \circ f) = \{0\}; \quad \text{rg}(g \circ f) = 0$$

$$GF = 0; \quad FF = F; \quad GG = G$$

$$229 \quad \dim(h) = 2 \Leftrightarrow a = 1; \quad \text{Si } a = 1, \text{Ker}(h) = \langle (1; b; -1) \rangle$$

$$234 \quad (2 + \sqrt{3}; -1 + 2\sqrt{3}) \text{ ou } (2 - \sqrt{3}; -1 - 2\sqrt{3})$$

Réponses

300 $8 ; 11 ; x^2 - (a+d)x + (ad-bc) ; \lambda^2 - 7\lambda + 2 ; 2m - 4$

302 a) $-40 ; 96$ b) $-30 ; -11$ c) $13 ; 41$

303 ligne 1 : $79 ; 24 ; -5$ ligne 2 : $8 ; 12 ; 178$

308 1) 0 2) $(x-1)(x-a)$ 3) $(x+a+b)(x-a)(x-b)$ 4) $(t+2)(t-2)(4-t)$
5) 0 6) $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

309 $27 ; 86$

310 $(b-a)(c-a)(c-b) ; (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

312 1) $\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3) non inversible 4) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\frac{1}{\cos(2\alpha)} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$ [si $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$] 6) non inversible

7) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ 9) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

10) $\frac{1}{(m-1)(m+2)} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ [si $m \neq 1$ et $m \neq -2$]

11) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

314 1) $\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$, donc f est un automorphisme.

2) ${}^r f(e_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, {}^r f(e_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, {}^r f(e_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Réponses

315 1) $\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$, donc f est un automorphisme.

2) ${}^rg(e_1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}^rg(e_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}^rg(e_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

316 a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(0; 0; 1)$, $(0; \frac{1}{2}; 1)$, $(0; \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1); 1)$, $(0; \frac{1}{2}\sqrt{3}; 1)$

317 1) $X' = {}^t(37 \ 62)$ 2) $X' = {}^t(-3 \ 15 \ -8)$ 3) $X' = {}^t(-5 \ -1 \ 0 \ 4)$

318 1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$ 4) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -21 & -20 \\ 36 & 33 \end{pmatrix}$

319 1) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

320 1) $s: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $p: \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

321 $s: \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $p: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$322 \quad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad \text{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = P_0 ; \quad \text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = P_2$$

$$5) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$324 \quad 1) \quad \text{VAP} : 1 \text{ et } 2 ; \text{ VEP} : u = (1; -1) \text{ et } v = (3; -2) ; M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ;$$

affinité d'axe $\langle v \rangle$, de direction $\langle u \rangle$ et de rapport 2

$$2) \quad \text{VAP} : 0 \text{ et } 1 ; \text{ VEP} : u = (2; 1) \text{ et } v = (3; 1) ; M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

projection sur $\langle v \rangle$ de direction $\langle u \rangle$

$$3) \quad \text{VAP} : -3 \text{ et } 1 ; \text{ VEP} : u = (3; -2) \text{ et } v = (2; -1) ; M' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

affinité d'axe $\langle v \rangle$, de direction $\langle u \rangle$ et de rapport -3

$$4) \quad \text{VAP} : 3 \text{ et } -3 ; \text{ VEP} : u = (2; 1) \text{ et } v = (1; 2) ; M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} ;$$

affinité d'axe $\langle v \rangle$, de direction $\langle u \rangle$ et de rapport 3, suivie d'une affinité d'axe $\langle u \rangle$, de direction $\langle v \rangle$ et de rapport -3 .

$$5) \quad \text{VAP} : 0 \text{ et } 7 ; \text{ VEP} : u = (2; 3) \text{ et } v = (1; -2) ; M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} ;$$

projection sur $\langle v \rangle$ de direction $\langle u \rangle$ suivie d'une homothétie de centre o et de rapport 7

$$6) \quad \text{VAP} : 3 ; \text{ VEP} : u = (1; 0) \text{ et } v = (0; 1) ; M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} ;$$

homothétie de centre o et de rapport 3

$$7) \quad \text{VAP} : -1 \text{ et } 2 ; \text{ VEP} : u = (1; -1) \text{ et } v = (2; -5) ; M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ;$$

affinité de direction $\langle u \rangle$, d'axe $\langle v \rangle$ et de rapport -1 , suivie d'une affinité de direction $\langle v \rangle$, d'axe $\langle u \rangle$ et de rapport 2.

- 324 8) VAP : 1 et -1 ; VEP : $u = (3; 4)$ et $v = (4; -3)$; $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
réflexion d'axe $\langle u \rangle$.

- 325 1) VAP : 2 et 3 ; $E_2 = \left\langle {}^t(3592 \quad -84 \quad 1) \right\rangle$; $E_3 = \left\langle {}^t(1 \quad 0 \quad 0) \right\rangle$; non diagonalisable

- 2) VAP : 2 et 6 ; $E_2 = \left\langle {}^t(-1 \quad 0 \quad 1) ; {}^t(-2 \quad 1 \quad 0) \right\rangle$; $E_6 = \left\langle {}^t(1 \quad 1 \quad 1) \right\rangle$;

$$B' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} ;$$

homothétie de centre o et de rapport 2, suivie d'une affinité de direction E_6 , de plan fixe E_2 et de rapport 3

- 3) VAP : -2 ; 0 ; 2 ; $E_{-2} = \left\langle u_1 = {}^t(0 \quad 0 \quad 1) \right\rangle$; $E_0 = \left\langle u_2 = {}^t(1 \quad 1 \quad 0) \right\rangle$;

$$E_2 = \left\langle u_3 = {}^t(1 \quad -1 \quad 0) \right\rangle$$

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; M' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ;$$

composée de : a) affinité de direction $\langle u_1 \rangle$, de plan fixe $\langle u_2; u_3 \rangle$ et de rapport -2

b) projection de direction $\langle u_2 \rangle$ sur le plan $\langle u_1; u_3 \rangle$

c) affinité de direction $\langle u_3 \rangle$, de plan fixe $\langle u_1; u_2 \rangle$ et de rapport 2

- 4) VAP : 1 ; $E_1 = \left\langle {}^t(1 \quad 2 \quad 6) \right\rangle$; non diagonalisable

- 5) VAP : -3 ; $2 - \sqrt{6}$; $2 + \sqrt{6}$; $E_{-3} = \left\langle u_1 = {}^t(0 \quad -1 \quad 1) \right\rangle$;

$$E_{2-\sqrt{6}} = \left\langle u_2 = {}^t(3\sqrt{6}+4 \quad \sqrt{6}-2 \quad -3) \right\rangle ; E_{2+\sqrt{6}} = \left\langle u_3 = {}^t(3\sqrt{6}-4 \quad \sqrt{6}+2 \quad 3) \right\rangle$$

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3\sqrt{6}+4 \\ \sqrt{6}-2 \\ -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3\sqrt{6}-4 \\ \sqrt{6}+2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) ; M' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{6} \end{pmatrix} ;$$

composée de : a) affinité de direction $\langle u_1 \rangle$, de plan fixe $\langle u_2; u_3 \rangle$ et de rapport -3

b) affinité de direction $\langle u_2 \rangle$ de plan fixe $\langle u_1; u_3 \rangle$ et de rapport $2 - \sqrt{6}$

c) affinité de direction $\langle u_3 \rangle$, de plan fixe $\langle u_1; u_2 \rangle$ et de rapport $2 + \sqrt{6}$

325 6) VAP : $-3; 0; 2$; $E_{-3} = \left\langle u_1 = {}^t(1 \ -1 \ 2) \right\rangle$; $E_0 = \left\langle u_2 = {}^t(-1 \ 1 \ 1) \right\rangle$;

$$E_2 = \left\langle u_3 = {}^t(2 \ 3 \ 4) \right\rangle$$

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) ; M' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ;$$

composée de : a) affinité de direction $\langle u_1 \rangle \dots$ b) projection de direction $\langle u_2 \rangle \dots$
c) affinité de direction $\langle u_3 \rangle \dots$

7) VAP : $1; 2; 3$; $E_1 = \left\langle {}^t(1 \ 2 \ 0) \right\rangle$; $E_2 = \left\langle {}^t(0 \ 1 \ 1) \right\rangle$;

$$E_3 = \left\langle {}^t(1 \ 2 \ -1) \right\rangle$$

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) ; M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; \text{ multi-affinité} \dots$$

8) VAP : $-1; 1$;

$$E_{-1} = \left\langle u_1 = {}^t(1 \ 0 \ 1) ; u_2 = {}^t(0 \ 1 \ 0) \right\rangle ; E_1 = \left\langle u_3 = {}^t(2 \ 1 \ 1) \right\rangle ;$$

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

symétrie d'axe $\langle u_3 \rangle$ et de direction $\langle u_1; u_2 \rangle$

326 d) VAP : $-1; 1$; $E_1 : x + y = 0$; $E_{-1} : x - y = 0$

329 $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

330 4) Projection sur la droite $x + y = 0$, de direction $\begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}$

7) Symétrie de plan fixe $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et de direction $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

8) Projection sur le plan $x + y + z = 0$, de direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Réponses

330 9) Symétrie d'axe $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et de direction $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

332 1) $\text{Det}(A) = \frac{1}{2}m(5-3m)$;

• Si $m \neq 0$ et $m \neq \frac{5}{3}$: $\text{Im}(h) = \mathbb{R}^2$; $\text{Ker}(h) = \{0\}$

• Si $m = 0$: $\text{Im}(h) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$; $\text{Ker}(h) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

• Si $m = \frac{5}{3}$: $\text{Im}(h) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$; $\text{Ker}(h) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $m = 0$

3) $m = 2$

Réponses

404 a) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (idem pour $s \circ r$ et $r \circ s$)

405 Réflexion d'axe $\left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

- 406**
- 1) Symétrie de centre o (= rotation de 180° autour de o)
 - 2) Rotation de centre o et d'amplitude $-\frac{\pi}{2}$
 - 3) Réflexion d'axe $x = 0$
 - 4) Réflexion d'axe $x - y = 0$
 - 5) Rotation de centre o et d'amplitude $+53,13^\circ$
 - 6) Réflexion d'axe $2x + y = 0$
 - 7) Réflexion d'axe $5x - y = 0$
 - 8) Rotation de centre o et d'amplitude $-67,38^\circ$
 - 9) Rotation de centre o et d'amplitude $-\beta$

- 407**
- 1) Symétrie de centre o
 - 2) Rotation de $36,87^\circ$ autour de $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
 - 3) Rotation de 180° autour de $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$
 - 4) Réflexion de plan fixe $2x + y - 2z = 0$
 - 5) Rotation de $73,398^\circ$ autour de $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
 - 6) Rotation-réflexion d'axe $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ et d'amplitude $48,19^\circ$

Réponses

$$408 \quad S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad T = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -12 \\ -3 & 12 & -4 \\ -12 & -4 & -3 \end{pmatrix}; \quad R = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 34 & -19 & 2 \\ 13 & 26 & 26 \\ -14 & -22 & 29 \end{pmatrix};$$

$r = s \circ t$ est une rotation d'axe $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ et d'amplitude $50,13^\circ$

$$409 \quad \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 11 & 2-4\sqrt{3} & 2+4\sqrt{3} \\ 2+4\sqrt{3} & 11 & 2-4\sqrt{3} \\ 2-4\sqrt{3} & 2+4\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix} \text{ ou sa transposée}$$

$$410 \quad 1) \quad \text{VAP : } -a \text{ (double) et } 2a; \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$2) \quad (A')^n = a^n \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix};$$

$$A^n = \frac{a^n}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$$