

ALGÈBRE LINÉAIRE

THÉORIE

2014

TABLE DES MATIÈRES

L'ensemble $\mathbb{R}^n$	1
Notion de groupe	2
Espaces vectoriels	3
Espace vectoriel des fonctions réelles	4
Combinaisons linéaires	5
Dépendance linéaire	6
Bases	7
Base extraite d'une famille génératrice	8
Théorème de la base incomplète	9
Dimension d'un espace vectoriel	10
Théorème de la base à demi-prix	11
Modifier les générateurs	12
Exhiber une base d'un sous-espace	13
Applications linéaires	20
Matrices	21
Matrice d'une application linéaire	22
Affinités dans $\mathbb{R}^2$	23
Cisaillements dans $\mathbb{R}^2$	24
Affinités dans $\mathbb{R}^3$	25
Noyau d'une application linéaire	26
Image d'une application linéaire	27
Générateurs de $\text{Im}(h)$	28
Injectivité, surjectivité, bijectivité	29
Injectivité et surjectivité d'une application linéaire	30
Dimensions du noyau et de l'image	31
Matrice d'une composée	32
Déterminant d'une matrice carrée	40
Propriétés des déterminants	41
Inverse d'une matrice	42
Calcul de l'inverse d'une matrice	43
Déterminant et dépendance des lignes ou colonnes	44
Matrices unimodulaires	45
Déterminant du produit de deux matrices	46
Changement de base	47
Valeurs propres et vecteurs propres	48
Diagonalisation	49
Lemme sur les sommes doublement indicées	50
Trace d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$	51
Matrice d'une rotation linéaire de $\mathbb{R}^2$	60
Matrice d'une réflexion linéaire de $\mathbb{R}^2$	61
Endomorphismes orthogonaux	62
Endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^2$	63
Matrice d'une rotation linéaire de $\mathbb{R}^3$	64
Matrice d'une "rotation-réflexion" de $\mathbb{R}^3$	65
Endomorphismes orthogonaux de déterminant +1 dans $\mathbb{R}^3$	66
Endomorphismes orthogonaux de déterminant -1 dans $\mathbb{R}^3$	67

§ 1. L'ENSEMBLE $\mathbb{R}^n$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble des couples $(a; b)$ où a et b sont des nombres réels. On munit $\mathbb{R}^2$ de deux opérations :

1) l'addition :

Soit $(a; b)$ et $(c; d)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$; on appelle somme de $(a; b)$ et de $(c; d)$, et l'on note $(a; b) + (c; d)$, le couple $(a + c; b + d)$;

2) la multiplication par un nombre réel :

Soit $(a; b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$ et λ un nombre réel ; on appelle produit de $(a; b)$ par λ , et l'on note $\lambda(a; b)$, le couple $(\lambda a; \lambda b)$.

L'ensemble $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ désigne l'ensemble des triplets $(a_1; a_2; a_3)$ où a_1, a_2 et a_3 sont des nombres réels.

On munit $\mathbb{R}^3$ de deux opérations :

1) l'addition :

$$(a_1; a_2; a_3) + (b_1; b_2; b_3) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

2) la multiplication par un nombre réel :

$$\lambda(a_1; a_2; a_3) = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des n -uplets $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des nombres réels.

On munit $\mathbb{R}^n$ de deux opérations :

1) l'addition :

$$(a_1; a_2; \dots; a_n) + (b_1; b_2; \dots; b_n) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots; a_n + b_n)$$

2) la multiplication par un nombre réel :

$$\lambda(a_1; a_2; \dots; a_n) = (\lambda a_1; \lambda a_2; \dots; \lambda a_n)$$

Rappel : Deux n -uplets sont *égaux* ssi leurs coordonnées sont respectivement égales :

$$(a_1; a_2; \dots; a_n) = (b_1; b_2; \dots; b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \text{ et } a_2 = b_2 \text{ et } \dots \text{ et } a_n = b_n$$

§ 2. NOTION DE GROUPE

Définition

Un *groupe* est un ensemble E non vide muni d'une *opération interne*

$$\begin{aligned} \top : E \times E &\rightarrow E \\ (x; y) &\mapsto x \top y \end{aligned}$$

vérifiant les *axiomes* suivants :

1. $\top$ est *associative* :

$$\forall x, y, z \in E, (x \top y) \top z = x \top (y \top z)$$

2. $\top$ admet un *élément neutre* n :

$$\exists n \in E \text{ tel que, } \forall x \in E, x \top n = x \text{ et } n \top x = x$$

3. Chaque élément $x \in E$ possède un *symétrique* $x' \in E$:

$$\forall x \in E, \exists x' \in E \text{ tel que } x \top x' = n \text{ et } x' \top x = n$$

De plus, le groupe $(E; \top)$ est dit *abélien* (ou *commutatif*) si, quels que soient $x, y \in E$,

$$x \top y = y \top x$$

Exemples

- 1) $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition des n -uplets.

Elément neutre : $(0; 0; \dots)$;

Elément symétrique de $(a_1; a_2; \dots) : (-a_1; -a_2; \dots)$.

- 2) *Groupe de l'horloge* :

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 24\} = \{0; 1; 2; 3; \dots; 23\} ;$$

Opération interne : $x \top y = (x + y) \bmod 24$ (= reste de la division de $x + y$ par 24) ;

Elément neutre : 0 ;

Symétrique de x : $24 - x$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$.

§ 3. ESPACES VECTORIELS

Un *espace vectoriel* est un ensemble E d'objets — appelés *vecteurs* — muni d'une opération interne (l'addition des vecteurs)

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E \\ (u ; v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

et d'une opération externe (la multiplication d'un vecteur par un réel) :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &\rightarrow E \\ (\alpha ; u) &\mapsto \alpha u \end{aligned}$$

vérifiant les 8 *axiomes* suivants :

A1. $+$ est *commutative* :

$$\forall u, v \in E, \quad u + v = v + u$$

A2. L'opération $+$ est *associative* :

$$\forall u, v, w \in E, \quad (u + v) + w = u + (v + w)$$

A3. $+$ admet un *élément neutre* n :

$$\exists n \in E \text{ tel que, } \forall u \in E, \quad u + n = u \quad (\text{et } n + u = u)$$

A4. Chaque élément $u \in E$ possède un *symétrique* $u' \in E$:

$$\forall u \in E, \exists u' \in E \text{ tel que } u + u' = n \quad (\text{et } u' + u = n)$$

B1. *Associativité mixte*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \quad \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

B2. *Neutralité de la multiplication par 1*

$$\forall u \in E, \quad 1u = u$$

B3. *Distributivité I*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

B4. *Distributivité II*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

Remarque

Les quatre premiers axiomes signifient que $(E ; +)$ est un *groupe commutatif*.

Notations

Le symétrique d'un vecteur u s'écrit $-u$.

L'élément neutre, appelé vecteur nul, se note o .

Propriétés

Quels que soient le vecteur u et le réel α , on a :

$$1) \quad \alpha o = 0$$

$$2) \quad 0u = 0$$

$$3) \quad \alpha u = o \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } u = o)$$

$$4) \quad -u = (-1)u$$

$$5) \quad -(\alpha u) = (-\alpha)u = \alpha(-u)$$

SOUS-ESPACES VECTORIELS

Un sous-ensemble non vide F de E est un *sous-espace vectoriel* de E si, quels que soient $u, v \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{l} u + v \in F \\ \alpha u \in F \end{array}$$

F est donc aussi un espace vectoriel, dont le vecteur nul est celui de E .

$\{o\}$ et E sont évidemment des sous-espaces vectoriels de E .

§ 4. ESPACE VECTORIEL DES FONCTIONS RÉELLES

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Nous noterons $F(A; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de A vers $\mathbb{R}$.

La somme $f + g$ de deux fonctions f et g de $F(A; \mathbb{R})$ est définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in A$$

On définit aussi le produit αf d'une fonction f de $F(A; \mathbb{R})$ par un réel α comme suit :

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \quad \forall x \in A$$

Théorème

Muni de ces deux opérations, $F(A; \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Preuve

Il suffit de vérifier dans ce cas les huit axiomes qui définissent un espace vectoriel.

Bon courage...

§ 5. COMBINAISONS LINÉAIRES

Soit E un espace vectoriel.

Un vecteur w est **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_k$ de E s'il peut s'écrire sous la forme

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des scalaires.

Les α_i sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

Si $v_1, v_2, \dots, v_k$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel E et si chaque vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_k$, on dit que ces vecteurs *engendrent* E .

Théorème

Soient $v_1, v_2, \dots, v_k$ des vecteurs d'un espace vectoriel E .

L'ensemble F de toutes les combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \dots, v_k$ est un sous-espace vectoriel de E . [Preuve : cf. exercice 123 BIS.]

F est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Le sous-espace vectoriel F formé de toutes les combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \dots, v_k$ est appelé sous-espace *engendré* par les $v_1, v_2, \dots, v_k$. On le note

$$\langle v_1; v_2; \dots; v_k \rangle$$

Un espace vectoriel E est dit **de dimension finie** s'il peut être engendré par un nombre fini de vecteurs.

§ 6. DÉPENDANCE LINÉAIRE

Définitions

Soit $u_1, u_2, \dots, u_k$ ($k \geq 2$) des vecteurs d'un espace vectoriel E .

Les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_k$ sont dits *linéairement dépendants* si l'un d'eux au moins peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Dans un tel cas, on dit aussi que la famille $(u_1; u_2; \dots; u_k)$ est *liée*.

Dans le cas contraire, les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_k$ sont *linéairement indépendants*, et leur famille est *libre*.

On convient encore qu'une famille (u) d'un seul vecteur est libre si et seulement si $u \neq 0$.

Remarques

- 1) Deux vecteurs sont linéairement dépendants ssi ils sont colinéaires.
- 2) Trois vecteurs de l'espace sont linéairement dépendants ssi ils sont coplanaires.
- 3) Une famille libre ne peut contenir le vecteur nul.

Critère d'indépendance

Des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_k$ ($k \geq 1$) sont linéairement indépendants si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle des u_i est celle dont les coefficients sont tous nuls :

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = o) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0)$$

Le vecteur nul o s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_k$

Preuve : Cf. exercice 126.

§ 7. BASES

Définition

Soit $B = (v_1; v_2; v_3; \dots)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

Nous dirons que la famille B est une **base** de E si elle est **libre** et **génératrice***.

* B est *génératrice* si $\langle B \rangle = E$.

Théorème

Soit $B = (v_1; v_2; \dots; v_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

B est une base de E si et seulement si tout vecteur u de E s'écrit, d'une manière unique, comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Si un espace vectoriel E admet une famille $B = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ comme base, un vecteur u de E peut s'écrire, de façon unique, sous la forme $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$.

Les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont appelés **composantes** (ou coordonnées) du vecteur u associées respectivement aux vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ de la base B .

Par rapport à une base B un vecteur u est complètement déterminé par la famille de ses composantes.

$$\text{On note } u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ ou parfois } u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B.$$

Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, la famille $B = (e_1; e_2; e_3; \dots; e_n)$ définie par

$$e_1 = (1; 0; 0; \dots; 0), \quad e_2 = (0; 1; 0; 0; \dots; 0), \quad e_3 = (0; 0; 1; 0; 0; \dots; 0), \dots$$

est une base, appelée *base canonique* de $\mathbb{R}^n$.

§ 8. BASE EXTRAITE D'UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE

Théorème

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie (c'est-à-dire engendré par un nombre fini de vecteurs).

De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E .

Preuve

$G = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ étant une famille génératrice de E , montrons qu'il existe une base B de E contenue dans G .

Comme $E \neq \{0\}$, $\exists u_* \neq 0$ ($u_* \in G$). En renumérotant au besoin, on peut supposer $u_* = u_1$.

Si $\langle u_1 \rangle = E$, on pose $B = (u_1)$. Sinon, $\exists u_* \notin \langle u_1 \rangle$.

En renumérotant : $u_* = u_2$. Si $\langle u_1, u_2 \rangle = E$,

On prend $B = (u_1, u_2)$.

Sinon, $\exists u_* \notin \langle u_1, u_2 \rangle \dots$

Poursuivant ainsi, on exhibe à coup sûr une base de E contenue dans G .

Corollaire

Tout espace vectoriel $E \neq \{0\}$ de dimension finie admet une base.

§ 9. THÉORÈME DE LA BASE INCOMPLÈTE

Théorème

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie.

Toute famille libre de E peut être complétée de manière à former une base de E .

Preuve

Soit $L_p = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille libre de E ,
et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Nous cherchons une base B' de E contenant L_p .

Si $\langle L_p \rangle = E$, on prend $B' = L$.

Sinon, $\exists e_* \notin \langle L_p \rangle$. En renumérotant au
besoin, on peut supposer $e_* = e_1$.

La famille $L_{p+1} = (u_1, \dots, u_p, e_1)$ est alors libre.

Si $\langle u_1, \dots, u_p, e_1 \rangle = E$, on pose $B' = L_{p+1}$.

Sinon, $\exists e_* \notin \langle L_{p+1} \rangle$. Renommer : $e_* = e_2$.

La famille $L_{p+2} = (u_1, \dots, u_p, e_1, e_2)$ est libre ;

si elle engendre E , $B' = L_{p+2}$.

Sinon, on poursuit le raisonnement jusqu'à ce
que L_* soit génératrice, ce qui ne peut
manquer de se produire, les e_i étant en
nombre fini.

§ 10. DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

Théorème

Si $E \neq \{o\}$ est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre est appelé *dimension de E* et noté $\dim(E)$.

Preuve

Soit $B = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ et $B' = (f_1; f_2; \dots; f_m)$ deux bases de E .

On doit établir que $m = n$. Pour ce faire, montrons que $m \neq n$ implique une contradiction.

Nous allons supposer pour fixer les idées que $n = 2$ et $m = 3$, mais le raisonnement qui suit convient également, en l'adaptant, lorsque m et n sont quelconques.

Partons donc de $B = (e_1; e_2)$ et $B' = (f_1; f_2; f_3)$.

Comme $E = \langle e_1; e_2 \rangle$, $\exists \alpha_1, \alpha_2$ tels que $f_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.

Et comme B' est libre, l'un des α_i est non nul, disons α_1 .

$\Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2$ tels que $e_1 = \beta_1 f_1 + \beta_2 e_2$;

$\Rightarrow E = \langle f_1; e_2 \rangle$.

Ainsi, $\exists \gamma_1, \gamma_2$ tels que $f_2 = \gamma_1 f_1 + \gamma_2 e_2$. Or $\gamma_2 \neq 0$, puisque B' est libre.

$\Rightarrow \exists \delta_1, \delta_2$ tels que $e_2 = \delta_1 f_1 + \delta_2 f_2$;

$\Rightarrow E = \langle f_1; f_2 \rangle$, ce qui contredit l'hypothèse que $(f_1; f_2; f_3)$ est libre.

Convention

La dimension de l'espace vectoriel $\{o\}$ est nulle.

§ 11. THÉORÈME DE LA BASE À DEMI-PRIX

Théorème

Soit un espace vectoriel E de dimension n ($n \geq 1$).

Une famille $A = (u_1 ; u_2 ; \dots ; u_n)$ de E est *libre* si et seulement si elle est *génératrice*.

Preuve

1. Si A est libre, il existe une base B de E contenant A (théorème de la base incomplète).
Or B comporte n vecteurs, puisque la dimension de E est n .
Donc $B = A$, et A est génératrice.
2. Si A est génératrice, on sait que l'on peut en extraire une base B .
 B ayant n éléments, on en déduit que $B = A$, et que A est libre.

§ 12. MODIFIER LES GÉNÉRATEURS

Théorème

On considère une famille A contenant (entre autres) les vecteurs u et v .
Le sous-espace engendré par A ne change pas si l'on substitue à u la combinaison linéaire $\alpha u + \beta v$ ($\alpha \neq 0$).

Preuve

L'ordre des vecteurs de la famille n'ayant pas d'influence sur le sous-espace engendré, nous supposons que $A = (u; v; \dots)$. Appelons A' la famille obtenue en remplaçant dans A le vecteur u par $\alpha u + \beta v$: $A' = (\alpha u + \beta v; v; \dots)$.

Il faut établir que $\langle A' \rangle = \langle A \rangle$, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire des vecteurs de A' est une combinaison linéaire des vecteurs de A , et réciproquement.

- Soit $w = \gamma(\alpha u + \beta v) + \delta v + \dots$ une combinaison linéaire des vecteurs de A' .
En écrivant $w = \gamma\alpha u + (\gamma\beta + \delta)v + \dots$, on voit que w est aussi une combinaison linéaire des vecteurs de A .
- Réciproquement, soit $w = \gamma u + \delta v + \dots$ une combinaison linéaire des vecteurs de A . En remplaçant u par $\frac{1}{\alpha}(\alpha u + \beta v) + \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)v$, on a $w = \gamma\left(\frac{1}{\alpha}(\alpha u + \beta v) + \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)v\right) + \delta v + \dots = \frac{\gamma}{\alpha}(\alpha u + \beta v) + \left(-\frac{\beta\gamma}{\alpha} + \delta\right)v + \dots$, ce qui montre que w est bien une combinaison linéaire des vecteurs de A' .

Cas particulier

Le sous-espace engendré par la famille A ne change pas si l'on remplace dans A le vecteur u par le vecteur αu ($\alpha \neq 0$).

§ 13. EXHIBER UNE BASE D'UN SOUS-ESPACE

Exemple

Dans un espace vectoriel de dimension 5, on donne les 6 vecteurs suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \quad u_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

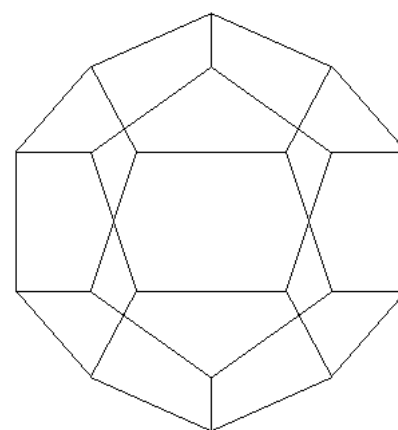
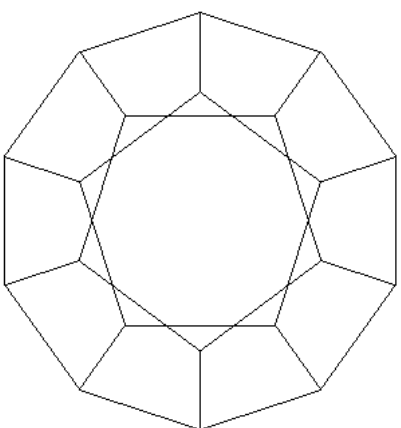
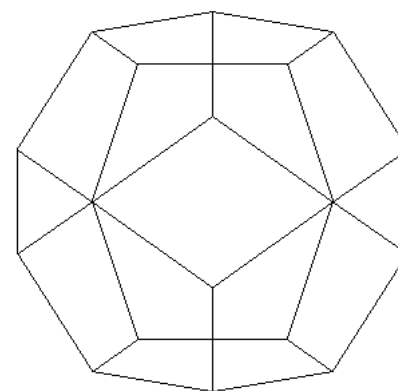
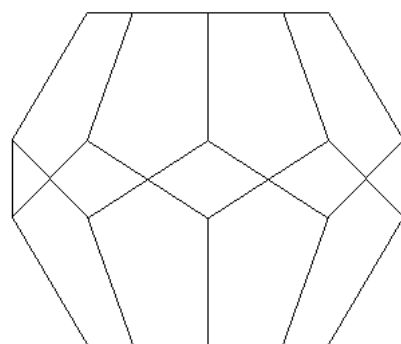
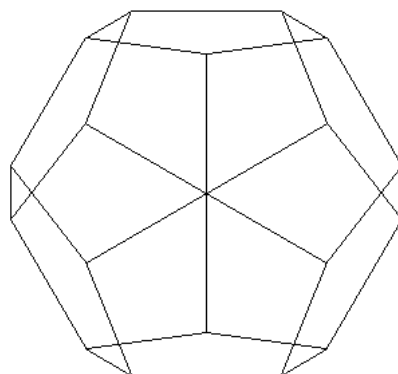
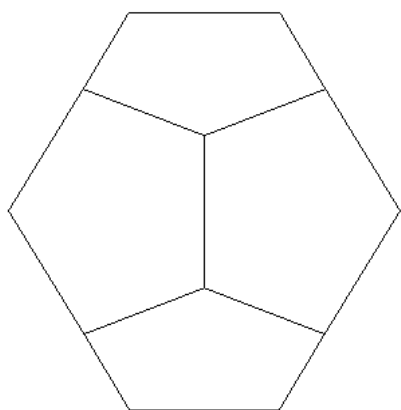
Pour trouver une base du sous-espace $K = \langle u_1; u_2; u_3; u_4; u_5; u_6 \rangle$ engendré par ces vecteurs, on forme un tableau dont les colonnes sont les composantes des vecteurs donnés, puis on l'*échelonne** au moyen de combinaisons linéaires, en remplaçant à chaque pas une colonne par une combinaison bien choisie de cette colonne avec l'une des autres. Ainsi, le sous-espace engendré par les colonnes reste le même au cours du processus, en vertu du paragraphe précédent.

$$\begin{aligned} K = \left\langle \begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 4 & 8 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right\rangle &= \left\langle \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 6 & -2 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

En observant le dernier tableau, on voit que ses quatre colonnes forment une famille libre, et fournissent donc une base de K :

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

* Un tableau de nombres est *échelonné* (relativement aux colonnes) quand le nombre de zéros en début de colonne augmente strictement lorsqu'on passe d'une colonne à sa voisine de droite.



§ 20. APPLICATIONS LINÉAIRES

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels.

On appelle **application linéaire** de E vers F toute application $h : E \rightarrow F$ telle que :

$$1) \quad h(u + v) = h(u) + h(v)$$

$$2) \quad h(\alpha u) = \alpha h(u)$$

quels que soient les éléments u et v de E et le nombre réel α .

Si $E = F$, on parle d'un **endomorphisme** de E .

Conséquences de la définition

1. Quels que soient les éléments u et v de E et les nombres réels α et β , on a

$$h(\alpha u + \beta v) = \alpha h(u) + \beta h(v).$$

2. Soit o_E l'élément neutre de E , o_F celui de F . On a

$$h(o_E) = o_F.$$

3. Pour tout élément u de E , on a

$$h(-u) = -h(u).$$

Exemples

- 1) Pour tout espace vectoriel E , l'identité $\text{id}_E : u \mapsto u$ de E vers E est une application linéaire.
- 2) L'application $h : (x; y; z) \mapsto (x + z; y)$ de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire.
- 3) Dans le plan $\mathbb{R}^2$, les symétries, rotations, projections, homothéties et affinités qui laissent fixe l'origine sont des applications linéaires.
- 4) Soit E l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur l'intervalle $[a; b]$, et F celui des fonctions définies sur $[a; b]$. L'application $d : f \mapsto f'$ de E vers F est linéaire.
- 5) Si E désigne l'espace de fonctions continues sur $[a; b]$, l'application $i : f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ de E vers $\mathbb{R}$ est linéaire.

§ 21. MATRICES

Définitions

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle **matrice de type $n \times p$** un tableau à n lignes et p colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

dont les coefficients a_{ij} sont des nombres réels.

L'ensemble des matrices de type $n \times p$ à coefficients réels se note

$$M_{n,p}(\mathbb{R})$$

Si $n = 1$, A est une **matrice-ligne** et si $p = 1$, A est une **matrice-colonne**.

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre concernant le nombre de lignes et de colonnes de la matrice A , on note

$$A = (a_{ij})$$

On appelle **matrice nulle** de type $n \times p$ la matrice $O = (o_{ij})$ définie, pour tout i de $\{1; 2; \dots; n\}$ et pour tout j de $\{1; 2; \dots; p\}$, par $o_{ij} = 0$.

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $n \times p$, on appelle **transposée** de A la matrice (c_{ij}) de type $p \times n$ définie, pour tout i de $\{1; 2; \dots; p\}$ et pour tout j de $\{1; 2; \dots; n\}$, par $c_{ij} = a_{ji}$. La transposée de A se note

tA

Deux **matrices** $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont **égales** si elles sont de même type $n \times p$ et si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i de $\{1; 2; \dots; n\}$ et pour tout j de $\{1; 2; \dots; p\}$.

Opérations sur les matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de type $n \times p$ et soit λ un nombre réel.

On appelle **somme** de A et de B la matrice $A + B$, de type $n \times p$, définie par $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

On appelle **produit** de A par λ la matrice λA , de type $n \times p$, définie par $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type $n \times p$ et $B = (b_{jk})$ une matrice de type $p \times r$. Le **produit de A par B** , noté AB , est la matrice $C = (c_{ik})$ de type $n \times r$ définie par

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^p a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ip}b_{pk}$$

c_{ik} est le "produit de la i -ème ligne de A par la k -ème colonne de B ".

Propriétés

- Le produit matriciel est associatif.
- Le produit matriciel est distributif par rapport à l'addition matricielle.

Pour toutes les matrices A , B et C de dimensions adéquates, on a

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C \\ A(B + C) &= AB + AC \\ (A + B)C &= AC + BC \end{aligned}$$

Pour tout nombre réel λ et pour toutes les matrices A et B de dimensions adéquates, on a

$$\begin{aligned} {}^t(A + B) &= {}^tA + {}^tB \\ {}^t(\lambda A) &= \lambda {}^tA \\ {}^t(AB) &= {}^tB {}^tA \end{aligned}$$

§ 22. MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

On considère une application linéaire $h : E \rightarrow F$, avec $\dim(E) = 3$ et $\dim(F) = 2$.

Soit $B_E = (e_1; e_2; e_3)$ une base de E et $B_F = (f_1; f_2)$ une base de F .

Relativement à B_F , on a :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad h(e_2) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad h(e_3) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Définition

La matrice $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice de h relative aux bases B_E et B_F** .

Cette définition est motivée par le résultat suivant :

Théorème

Soit $u \in E$, avec $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ relativement à B_E et $h(u) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ relativement à B_F . Alors :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= h(u) = h(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 h(e_1) + x_2 h(e_2) + x_3 h(e_3) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque

Tout ce qui est dit ci-dessus se généralise "sans peine" lorsque $\dim(E)$ et $\dim(F)$ sont quelconques (mais finies).

A retenir

Les colonnes de la matrice relative aux bases B_E et B_F d'une application linéaire $h: E \rightarrow F$ sont les composantes relatives à B_F des images par h des vecteurs de B_E .

Théorème

Considérons deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies, B_E et B_F des bases de E et F , h et g des applications linéaires de E vers F et $\alpha \in \mathbb{R}$. On désigne par H (respectivement G) la matrice de h (respectivement g) relativement à ces bases. Alors :

La matrice de $h + g$ relativement à B_E et B_F est égale à $H + G$.

La matrice de αh relativement à B_E et B_F est égale à αH .

Notons encore le résultat suivant :

Soit E un espace vectoriel de dimension n , muni d'une base B_E ;
 F un espace vectoriel de dimension m , muni d'une base B_F ;
 A une matrice de type $m \times n$.

L'application de E vers F envoyant $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est linéaire.

(Preuve : Cf. exercice 211.)

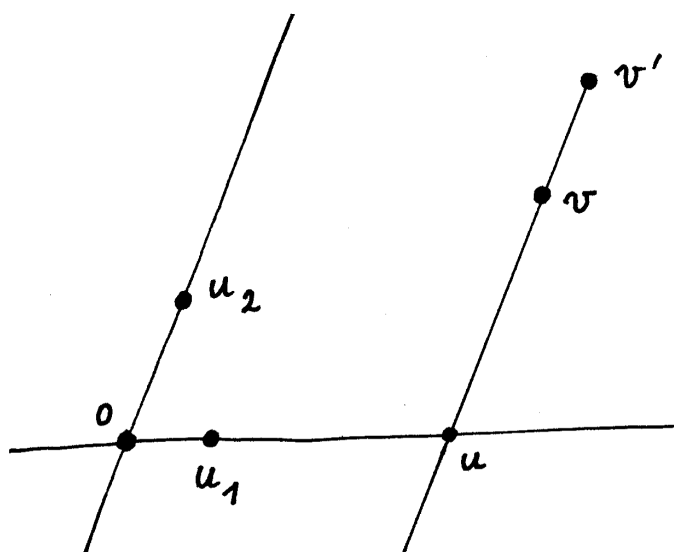
§ 23. AFFINITÉS DANS $\mathbb{R}^2$

Soit $(u_1 ; u_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ et λ un réel non nul.

L'*affinité* de direction $\langle u_2 \rangle$, d'axe $\langle u_1 \rangle$ et de rapport λ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ envoyant un vecteur v sur le vecteur v' défini par

$$\overrightarrow{uv'} = \lambda \overrightarrow{uv}$$

u désignant l'intersection de la droite $\langle u_1 \rangle$ avec la parallèle à $\langle u_2 \rangle$ passant par v .



La matrice de cette affinité, relativement à la base $(u_1 ; u_2)$, est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix} x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

§ 24. CISAILLEMENTS DANS $\mathbb{R}^2$

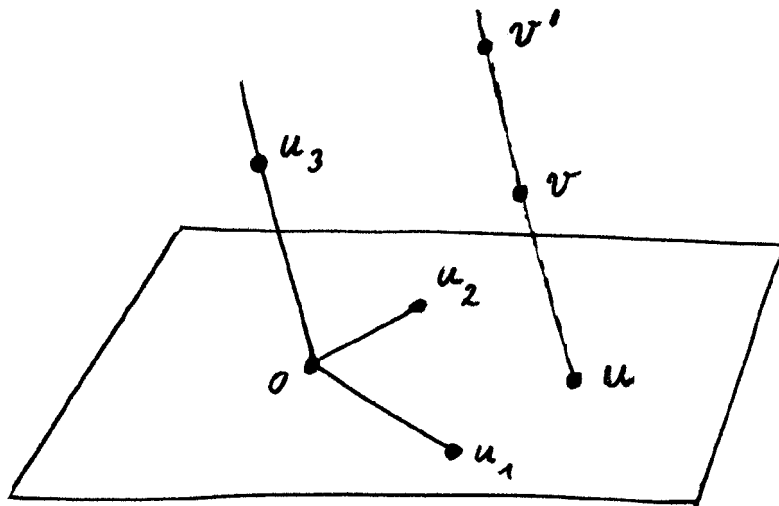
§ 25. AFFINITÉS DANS $\mathbb{R}^3$

Soit (u_1, u_2, u_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel non nul.

1. L'*affinité* de direction $\langle u_3 \rangle$, de plan fixe $\langle u_1, u_2 \rangle$ et de rapport λ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ envoyant un vecteur v sur le vecteur v' défini par

$$\overrightarrow{uv'} = \lambda \overrightarrow{uv}$$

u désignant l'intersection du plan $\langle u_1, u_2 \rangle$ avec la parallèle à $\langle u_3 \rangle$ passant par v .



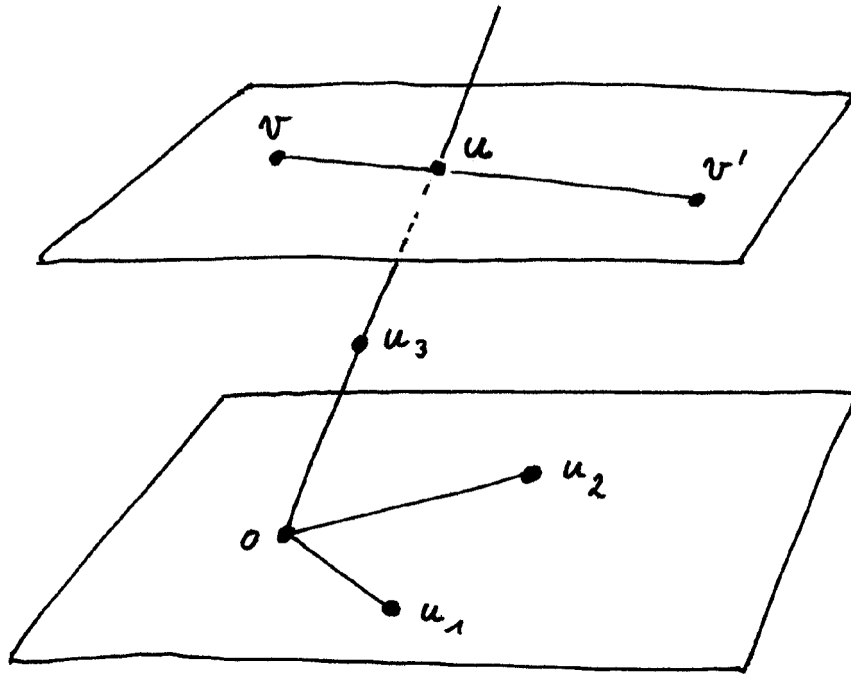
La matrice de cette affinité, relativement à la base (u_1, u_2, u_3) , est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

2. L'*affinité* de direction $\langle u_1, u_2 \rangle$, d'axe $\langle u_3 \rangle$ et de rapport λ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ envoyant un vecteur v sur le vecteur v' défini par

$$\overrightarrow{uv'} = \lambda \overrightarrow{uv}$$

u désignant l'intersection de la droite $\langle u_3 \rangle$ avec le plan parallèle à $\langle u_1, u_2 \rangle$ et passant par v .



La matrice de cette affinité, relativement à la base (u_1, u_2, u_3) , est $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

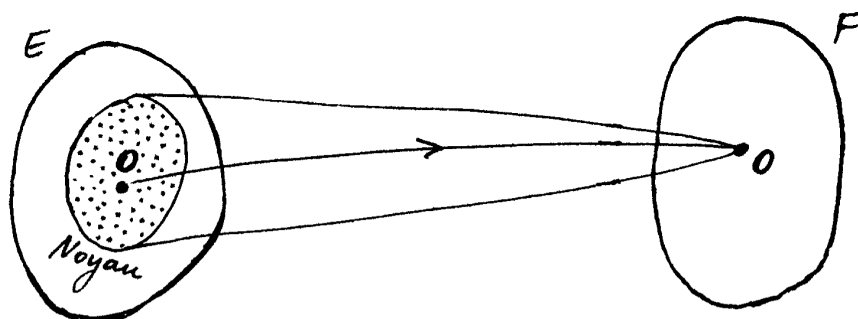
Le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ z \end{pmatrix}$.

§ 26. NOYAU D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Définition

Le noyau d'une application linéaire $h: E \rightarrow F$, noté $\text{Ker}(h)$, est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par h est 0 .

$$\text{Ker}(h) = \{ u \in E \mid h(u) = 0 \}$$



Théorème

$\text{Ker}(h)$ est un sous-espace de E .

Preuve

Soit $u, v \in \text{Ker}(h)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(u+v) &= h(u) + h(v) = 0 + 0 = 0 ; \\ &\Rightarrow u+v \in \text{Ker}(h). \end{aligned}$$

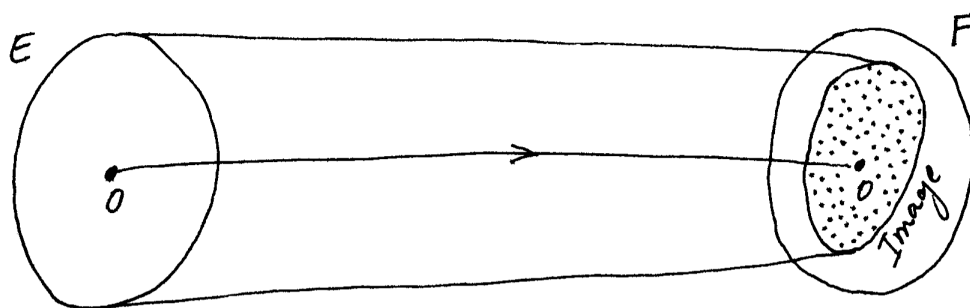
$$\begin{aligned} \bullet \quad h(\alpha u) &= \alpha h(u) = \alpha \cdot 0 = 0 ; \\ &\Rightarrow \alpha u \in \text{Ker}(h). \end{aligned}$$

§ 27. IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Définition

L'image d'une application linéaire $h: E \rightarrow F$, notée $\text{Im}(h)$, est l'ensemble des vecteurs de F ayant une préimage par h au moins.

$$\text{Im}(h) = \{ h(u) \mid u \in E \}$$



Théorème

$\text{Im}(h)$ est un sous-espace de F .

Preuve

Soit $u', v' \in \text{Im}(h)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\exists u, v \in E$ tels que $h(u) = u'$ et $h(v) = v'$.
 $\Rightarrow h(u+v) = h(u) + h(v) = u' + v'$;
 $\Rightarrow u' + v' \in \text{Im}(h)$.
- $h(\alpha u) = \alpha h(u) = \alpha u'$;
 $\Rightarrow \alpha u' \in \text{Im}(h)$.

§ 28. GÉNÉRATEURS DE $\text{Im}(h)$

Soit $h: E \rightarrow F$ une application linéaire.

Théorème

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , alors

$\text{Im}(h)$ est engendrée par $(h(e_1), h(e_2), \dots, h(e_n))$:

$$\text{Im}(h) = \langle h(e_1), h(e_2), \dots, h(e_n) \rangle.$$

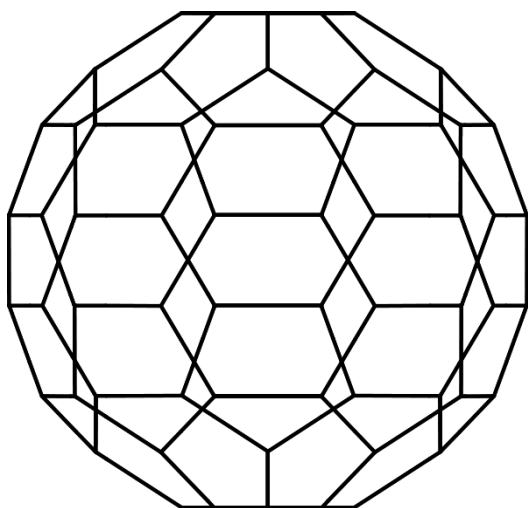
Preuve

$$\begin{aligned} \text{Im}(h) &= \{ h(u) \mid u \in E \} = \\ &= \{ h(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \alpha_1 h(e_1) + \dots + \alpha_n h(e_n) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle h(e_1), h(e_2), \dots, h(e_n) \rangle. \end{aligned}$$

Remarque $(h(e_1), \dots, h(e_n))$ n'est pas forcément une base de $\text{Im}(h)$.

Définition

On appelle rang de l'application h , et on note $\text{rg}(h)$, la dimension de l'espace $\text{Im}(h)$.



§ 29. INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, BIJECTIVITÉ

Soit f une fonction de A dans B .

- f est dite **injective** si chaque élément de B possède *au plus une* préimage par f .

Autrement dit, f est injective si et seulement si :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- f est dite **surjective** si chaque élément de B possède *au moins une* préimage par f .

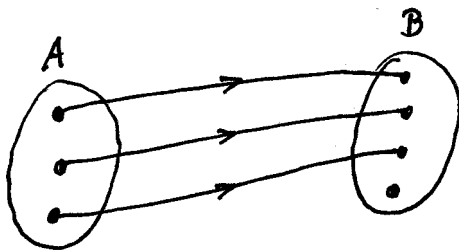
Cela équivaut à dire que :

$$f(A) = B$$

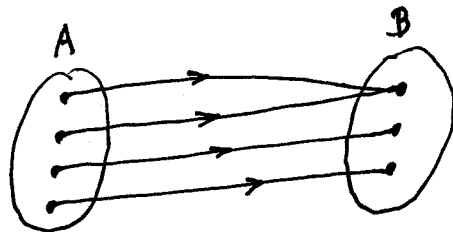
- f est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si chaque élément de B possède *exactement une* préimage par f .

Remarque. Il existe beaucoup de fonctions qui ne sont ni injectives, ni surjectives.

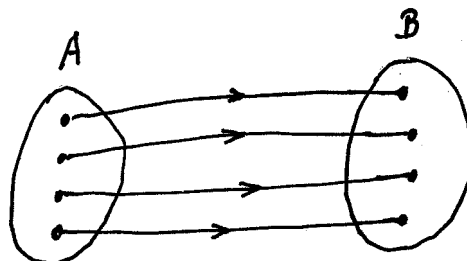
Schémas



Injection non surjective



Surjection non injective



Bijection

Théorème

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est bijective si et seulement si il existe une fonction ${}^r f : B \rightarrow A$ ("*réciproque* de f ") telle que :

$${}^r f \circ f = \text{id}_A \quad \text{et} \quad f \circ {}^r f = \text{id}_B$$

On rappelle que id_E désigne la fonction "identité" de E vers E définie par $\text{id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$.

Preuve

1. Si f est bijective, on définit ${}^r f(y)$, pour tout $y \in B$, comme étant *l'unique préimage de y par f* .

- ${}^r f \circ f = \text{id}_A$? Soit $x \in A$.
 ${}^r f(f(x)) = (\text{unique préimage de } f(x) \text{ par } f) = x \quad \checkmark$
- $f \circ {}^r f = \text{id}_B$? Soit $y \in B$.
 $f({}^r f(y)) = f(\text{préimage de } y) = y \quad \checkmark$

2. Si ${}^r f \circ f = \text{id}_A$ et $f \circ {}^r f = \text{id}_B$: chaque $y \in B$ a-t-il une unique préimage par f ?

- Il y en a au moins une : ${}^r f(y)$. En effet : $f({}^r f(y)) = (f \circ {}^r f)(y) = \text{id}_B(y) = y \quad \checkmark$
- Il y en a au plus une : si x et x' sont tels que $f(x) = f(x')$, alors :
 ${}^r f(f(x)) = {}^r f(f(x')) \Leftrightarrow ({}^r f \circ f)(x) = ({}^r f \circ f)(x') \Leftrightarrow \text{id}_A(x) = \text{id}_A(x') \Leftrightarrow x = x' \quad \checkmark$

Unicité de la réciproque

Une bijection n'a qu'une seule réciproque. En effet :

Soit $g : B \rightarrow A$ telle que $f \circ g = \text{id}_B$. On a alors ${}^r f \circ f \circ g = {}^r f \circ \text{id}_B$, puis $\text{id}_A \circ g = {}^r f$ et finalement $g = {}^r f$.

§ 30. INJECTIVITÉ ET SURJECTIVITÉ D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Théorème

Soit $h : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. h est injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(h) = \{0\}$
2. h est surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(h) = F$

Preuve

La 2^e équivalence est immédiate.

Démontrons la première :

- Si h est injective, 0 a au plus une pré-image par h . 0 est donc l'unique u tel que $h(u) = 0$. $\Rightarrow \text{Ker}(h) = \{0\}$.

- Si $\text{Ker}(h) = \{0\}$:

On doit montrer que $h(u) = h(v)$ implique $u = v$.

$$h(u) = h(v) \Leftrightarrow h(u) - h(v) = 0 \Leftrightarrow h(u - v) = 0 ;$$

Or, le noyau est nul. $\Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$.

Définitions

Une application linéaire qui est bijective (c'est-à-dire injective et surjective) s'appelle un **isomorphisme**.

Une application linéaire bijective d'un espace E vers lui-même s'appelle un **automorphisme** de E .

§ 31. DIMENSIONS DU NOYAU ET DE L'IMAGE

Théorème (dit "K+I")

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $h: E \rightarrow F$ une application linéaire.

Alors :

$$\dim(\text{Ker}(h)) + \dim(\text{Im}(h)) = \dim(E)$$

Démonstration

Soit $B_K = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ une base de $\text{Ker}(h)$. Puisque c'est une famille libre de E , on peut la compléter en une base $B_E = (e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ de E . Le théorème sera prouvé si nous montrons que la famille $(h(e_{k+1}), \dots, h(e_n))$ est une base de $\text{Im}(h)$.

- On sait que $\text{Im}(h) = \langle h(e_1), \dots, h(e_k), h(e_{k+1}), \dots, h(e_n) \rangle$. Or $h(e_1) = h(e_2) = \dots = h(e_k) = 0$, puisque $e_1, e_2, \dots, e_k$ sont dans le noyau de h . Ainsi : $\text{Im}(h) = \langle h(e_{k+1}), \dots, h(e_n) \rangle$.

- Il suffit maintenant d'établir que la famille $(h(e_{k+1}), \dots, h(e_n))$ est libre :

Supposons que $\alpha_{k+1}h(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n h(e_n) = 0$. Alors $h(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0$, et $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$ appartient à $\text{Ker}(h)$. Comme B_K est une base de $\text{Ker}(h)$, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tels que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$, qui équivaut à $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k - \alpha_{k+1}e_{k+1} - \dots - \alpha_n e_n = 0$. Or B_E est une base, donc une famille libre. D'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Corollaire

Soit un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Un endomorphisme de E est bijectif ssi son noyau est nul.
2. Un endomorphisme de E est bijectif ssi son image est égale à E .

§ 32. MATRICE D'UNE COMPOSÉE

Théorème

Soit E , F , et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, B_E , B_F et B_G des bases de ces espaces, $h: E \rightarrow F$ et $k: F \rightarrow G$ deux applications linéaires dont les matrices relativement à ces bases sont H et K respectivement. Alors $k \circ h$ est linéaire et :

La matrice de $k \circ h$ relative aux bases B_E et B_G est égale à KH .

"La matrice d'un produit ($\circ$) est égale au produit des matrices"

Démonstration

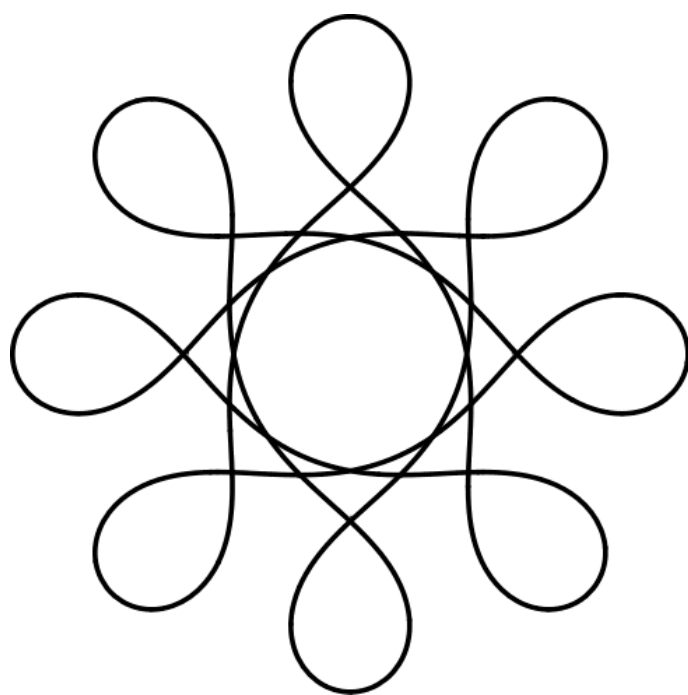
Il n'est pas difficile de vérifier que $k \circ h$ est linéaire. Déterminons ensuite sa matrice :

Soit e_j le j -ème vecteur de la base B_E . La j -ème colonne de la matrice de $k \circ h$ est formée des composantes de $(k \circ h)(e_j) = k(h(e_j))$ dans B_G . Elle est donc égale à :

$$K \begin{pmatrix} h_{1j} \\ h_{2j} \\ h_{3j} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Il en résulte que l'élément situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de la matrice de $k \circ h$ est le produit de la i -ème ligne de K par la j -ème colonne de H .

La matrice de $k \circ h$ est donc bien égale à KH .



$$\text{CR}\left(\frac{1}{8z^3 - 4z^{11}}\right)$$

§ 40. DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Déterminant d'ordre 2

Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le nombre $ad - bc$.

On le note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, ou $\text{Det}(A)$.

Déterminant d'ordre n

Le déterminant d'ordre n est défini par récurrence à l'aide des déterminants d'ordre $n - 1$.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n .

On appelle **mineur** associé à l'élément a_{ij} — et l'on note M_{ij} — le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de la matrice A . On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le nombre $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

On définit alors le déterminant de A comme suit :

$$\text{Det}(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} + \dots + a_{n1}\alpha_{n1}$$

$\text{Det}(A)$ est donc la somme des produits de chaque terme de la première colonne par son cofacteur.

Théorème

Le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n est égal à la somme des produits de chaque terme d'une ligne ou d'une colonne par son cofacteur :

$$\text{Det}(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + a_{i3}\alpha_{i3} + \dots + a_{in}\alpha_{in}$$

(développement selon la i -ème ligne)

$$\text{Det}(A) = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + a_{3j}\alpha_{3j} + \dots + a_{nj}\alpha_{nj}$$

(développement selon la j -ème colonne)

§ 41. PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n , et tA la transposée de A .

- (1) $\text{Det}(I_n) = 1$
- (2) $\text{Det}(\lambda A) = \lambda^n \text{Det}(A)$
- (3) $\text{Det}({}^tA) = \text{Det}(A)$
- (4) Si A est une matrice triangulaire (ou diagonale), alors $\text{Det}(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$
- (5) $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$
- (6) Si l'on multiplie une colonne (resp. une ligne) d'une matrice par un nombre λ , le déterminant est multiplié par λ .
- (7) Si l'on permute deux colonnes (resp. deux lignes) d'une matrice, le déterminant change de signe.
- (8) Le déterminant ne change pas si l'on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de la matrice une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).
- (9) Si les colonnes (resp. lignes) d'une matrice sont linéairement dépendantes, le déterminant est nul.

§ 42. INVERSE D'UNE MATRICE

Considérons un endomorphisme h bijectif d'un espace vectoriel E de dimension n . On sait que l'application réciproque ${}^r h$ de h , également linéaire, est telle que :

$$h \circ {}^r h = \text{id}_E \quad \text{et} \quad {}^r h \circ h = \text{id}_E$$

En désignant par A et B les matrices de h et ${}^r h$ relativement à une base de E , on a :

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

On dit alors que les matrices A et B sont *inverses* l'une de l'autre.

Définition

Deux matrices carrées A et B de dimension n sont dites *inverses* l'une de l'autre si

$$AB = BA = I_n$$

Il n'est pas difficile d'établir que si A et B sont inverses l'une de l'autre, et si une matrice B' vérifie $AB' = I_n$ ou $B'A = I_n$, alors $B = B'$:

$$AB' = I_n \Rightarrow BAB' = BI_n \Rightarrow I_n B' = BI_n \Rightarrow B' = B ;$$

$$B'A = I_n \Rightarrow B'AB = I_n B \Rightarrow B'I_n = I_n B \Rightarrow B' = B$$

Cela permet d'appeler B la *matrice inverse* de A , et de noter $B = A^{-1}$.

Par symétrie, on a aussi $A = B^{-1}$.

Exemple

L'inverse d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont le déterminant $\text{Det}(A) = ad - bc$ n'est pas nul est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Si $\text{Det}(A) = 0$, A n'a pas d'inverse.

Pour une justification, voyez l'exercice 311.

§ 43. CALCUL DE L'INVERSE D'UNE MATRICE

Lemme

La somme des produits des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'une matrice carrée par les cofacteurs des éléments d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) est nulle.

Démonstration

Pour fixer les idées, donnons la preuve pour la 2^e ligne et les cofacteurs de la 3^e ligne d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type 3×3 . En notant α_{ij} le cofacteur de a_{ij} , on doit établir que $a_{21}\alpha_{31} + a_{22}\alpha_{32} + a_{23}\alpha_{33} = 0$.

On remarque que $a_{21}\alpha_{31} + a_{22}\alpha_{32} + a_{23}\alpha_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$. Or, ce déterminant est nul,

puisque il a deux lignes égales. Par conséquent $a_{21}\alpha_{31} + a_{22}\alpha_{32} + a_{23}\alpha_{33} = 0$.

Théorème

La matrice inverse A^{-1} d'une matrice A de déterminant non nul est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot {}^t F$$

où F désigne la matrice des cofacteurs de A .

Démonstration

Calculons le produit de A par la matrice ${}^t F$. L'élément p_{ij} situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de $A \cdot {}^t F$ est égal à la somme des produits des éléments de la i -ème ligne de A par les cofacteurs des éléments de la j -ème ligne de A . En appliquant le lemme et la formule de développement d'un déterminant selon la i -ème ligne, on trouve :

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \text{Det}(A) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Il en résulte que $A \cdot {}^t F = \text{Det}(A) \cdot I$.

On obtient de même ${}^t F \cdot A = \text{Det}(A) \cdot I$, ce qui achève de prouver que $A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot {}^t F$.

§ 44. DÉTERMINANT ET DÉPENDANCE DES LIGNES OU COLONNES

Préparatifs

Appelons *opération élémentaire* sur les lignes d'une matrice chacune des trois actions suivantes :

- 1) Permuter deux lignes
- 2) Multiplier une ligne par un réel λ non nul
- 3) Ajouter à une ligne λ fois une autre ligne ($\lambda \in \mathbb{R}^*$)

Dans le cas d'une matrice carrée, les effets sur le déterminant de ces opérations sont :

Opération 1 : le déterminant est multiplié par -1

Opération 2 : le déterminant est multiplié par le réel non nul λ

Opération 3 : le déterminant ne change pas

Au moyen d'opérations élémentaires sur les lignes, toute matrice carrée peut être mise sous forme échelonnée. Donnons un simple exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 5 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(6)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 18/5 \\ 0 & 0 & 5 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(7)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Etape 1 : permuter les lignes 1 et 3

Etape 2 : multiplier la 1^{re} ligne par $\frac{1}{2}$

Etape 3 : ajouter à la 4^e ligne (-4) fois la 1^{re}

Etape 4 : multiplier la 2^e ligne par -1

Etape 5 : ajouter à la 3^e ligne (-3) fois la 2^e, puis ajouter à la 4^e ligne (-4) fois la 2^e

Etape 6 : multiplier la 3^e ligne par $\frac{1}{5}$

Etape 7 : ajouter à la 4^e ligne (-5) fois la 3^e

Théorème

Le déterminant d'une matrice carrée est nul *ssi* ses lignes sont liées.

Preuve

Soit A une matrice carrée et R la matrice obtenue à partir de A au terme d'un processus d'échelonnement via des opérations élémentaires. Les coefficients diagonaux de R sont soit tous égaux à 1, soit nuls à partir d'un certain indice de ligne (le déterminant de R est donc égal à 1 ou à 0). De plus, les opérations élémentaires ne changent pas le sous-espace engendré par les lignes de la matrice, et ne changent pas non plus la nullité du déterminant, puisqu'une telle opération ne fait que multiplier le déterminant par un réel non nul. On en tire les équivalences suivantes :

$\text{Det}(A) = 0 \Leftrightarrow \text{Det}(R) = 0 \Leftrightarrow$ la dernière ligne de R est nulle
 $\Leftrightarrow$ la dimension du sous-espace engendré par les lignes de R est strictement inférieure à n
 $\Leftrightarrow$ la dimension du sous-espace engendré par les lignes de A est strictement inférieure à n
 $\Leftrightarrow$ les lignes de A sont liées

Ainsi : $\text{Det}(A) = 0 \Leftrightarrow$ les lignes de A sont liées.

Corollaires

Le déterminant d'une matrice carrée est nul *ssi* ses colonnes sont liées.

Soit h un endomorphisme d'un espace E , et H sa matrice relative à une base B de E .
Alors : **h est bijectif *ssi* le déterminant de H est non nul.**

§ 45. MATRICES UNIMODULAIRES

Définition et propriétés

Soit i, j deux entiers distincts compris entre 1 et n , et λ un nombre réel. On appelle *matrice unimodulaire* $U_{ij}(\lambda)$ toute matrice de type $n \times n$ vérifiant les propriétés suivantes :

- Les éléments diagonaux de $U_{ij}(\lambda)$ sont tous égaux à 1.
- L'élément situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de $U_{ij}(\lambda)$ est égal à λ .
- Tous les autres éléments de $U_{ij}(\lambda)$ sont nuls.

Il est aisé de voir que :

La matrice $U_{ij}(\lambda) A$ s'obtient en ajoutant à la i -ème ligne de A λ fois sa j -ème ligne;
La matrice $A U_{ij}(\lambda)$ s'obtient en ajoutant à la j -ème colonne de A λ fois sa i -ème colonne.

On sait d'autre part qu'ajouter à une ligne (ou à une colonne) d'une matrice un multiple d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) ne modifie pas le déterminant. Par conséquent :

Quelle que soit la matrice A et la matrice unimodulaire $U_{ij}(\lambda)$, on a :

$$\text{Det}(U_{ij}(\lambda) A) = \text{Det}(A) = \text{Det}(A U_{ij}(\lambda))$$

Remarquons encore que l'inverse de $U_{ij}(\lambda)$ est $U_{ij}(-\lambda)$.

Diagonalisation par matrices unimodulaires

Notons $D(\alpha)$ la matrice diagonale égale à la matrice unité, sauf qu'on y trouve le nombre α à l'intersection de la dernière ligne et de la dernière colonne.

Théorème

Pour toute matrice A de déterminant $\alpha \neq 0$, il existe des matrices unimodulaires $U_1, U_2, \dots, U_p, V_1, V_2, \dots, V_q$ telles que :

$$U_p \dots U_2 U_1 A = D(\alpha) = A V_1 V_2 \dots V_q$$

§ 46. DÉTERMINANT DU PRODUIT DE DEUX MATRICES

Théorème

Si A et B sont deux matrices carrées,

$$\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$$

Preuve

1. Si $\alpha = \text{Det}(A) \neq 0$ et $\beta = \text{Det}(B) \neq 0$

D'après le paragraphe précédent, il existe des matrices unimodulaires $U_1, U_2, \dots, U_p$ et $V_1, V_2, \dots, V_q$ telles que :

$$U_p \dots U_2 U_1 A = D(\alpha) \quad \text{et} \quad D(\beta) = B V_1 V_2 \dots V_q$$

En se rappelant que la multiplication par une matrice unimodulaire ne change pas le déterminant, on peut écrire :

$$\text{Det}(AB) = \text{Det}(U_p \dots U_2 U_1 A B V_1 V_2 \dots V_q) = \text{Det}(D(\alpha)D(\beta)) = \text{Det}(D(\alpha\beta)) = \alpha\beta.$$

Ainsi : $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$.

2. Si $\text{Det}(A) = 0$ ou $\text{Det}(B) = 0$

Considérons les endomorphismes a et b canoniquement associés aux matrices A et B . Si $\text{Det}(A) = 0$ ou $\text{Det}(B) = 0$, l'un au moins des endomorphismes a et b n'est pas bijectif. $a \circ b$ n'est donc pas non plus bijectif, et $\text{Det}(AB) = 0$.

Corollaire

Si la matrice A est inversible,

$$\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$$

Preuve. De $AA^{-1} = I$, on tire $\text{Det}(AA^{-1}) = \text{Det}(I)$, puis $\text{Det}(A)\text{Det}(A^{-1}) = 1$.

§ 47. CHANGEMENT DE BASE

Soient $B = (e_1; e_2; \dots)$ et $B' = (e'_1; e'_2; \dots)$ deux bases de d'un espace E de dimension n . Supposons que

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + \dots \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + \dots \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

La matrice $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de B'

relativement à B est appelée **matrice de passage** de B à B' .

Théorème

Si x est un élément de E , X la matrice-colonne des composantes de x relativement à B et X' la matrice-colonne des composantes de x relativement à B' , on a :

$$X = PX'$$

Preuve

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x'_j \right) e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j \right) e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j \right) e_i.$$

Il en résulte que $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j$, donc que la i -ème composante de x relativement à B est le produit de la i -ème ligne de P par la matrice-colonne X' .

Théorème

Soit M la matrice d'un endomorphisme h de E relativement à la base B , M' sa matrice relativement à la base B' et P la matrice de passage de B à B' . Alors :

$$M' = P^{-1}MP$$

Preuve. Soit x un vecteur de E , X sa matrice dans B , X' sa matrice dans B' , Y la matrice de $h(x)$ dans B et Y' la matrice de $h(x)$ dans B' . Alors $Y = MX$, $X = PX'$ et $Y = PY'$.

Ainsi : $Y' = P^{-1}Y = P^{-1}MX = P^{-1}MPX'$.

La matrice M' de h dans la base B' est donc égale à $P^{-1}MP$.

§ 48. VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

On considère un espace vectoriel E de dimension finie, et un endomorphisme h de E .

Définitions

On appelle **valeur propre** de h tout scalaire λ tel qu'il existe un vecteur non nul u vérifiant

$$h(u) = \lambda u$$

On appelle **vecteur propre** de h , associé à la valeur propre λ , tout vecteur non nul u de E tel que

$$h(u) = \lambda u$$

Notons E_λ^* l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ . $E_\lambda^* \cup \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de E , noté E_λ et appelé **sous-espace propre** associé à λ .

$$E_\lambda = \{ u \mid h(u) = \lambda u \} = \text{Ker}(h - \lambda \cdot \text{id})$$

Théorème

λ est une valeur propre de h si et seulement si

$$\text{Det}(h - \lambda \cdot \text{id}) = 0$$

Preuve

λ valeur propre de $h \iff \exists u \neq 0$ tel que $h(u) = \lambda u \iff \exists u \neq 0$ tel que $h(u) - \lambda u = 0$
 $\iff \exists u \neq 0$ tel que $(h - \lambda \cdot \text{id})(u) = 0 \iff h - \lambda \cdot \text{id}$ n'est pas bijectif $\iff \text{Det}(h - \lambda \cdot \text{id}) = 0$.

Les valeurs propres sont donc les solutions de l'équation $\text{Det}(h - x \cdot \text{id}) = 0$, dite **équation caractéristique** de h . $\text{Det}(h - x \cdot \text{id})$ est le **polynôme caractéristique** de h .

§ 49. DIAGONALISATION

Définition

Un endomorphisme h d'un espace E est diagonalisable s'il existe une base de E relativement à laquelle sa matrice est diagonale.

Théorèmes

Un endomorphisme h de E est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de h .

Si $(u_1 ; u_2 ; \dots ; u_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres u_i associés aux valeurs propres λ_i de h , la matrice de h relativement à cette base est alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Preuves : Cf. exercice 327.

Remarques. 1) Les valeurs propres λ_i ne sont pas nécessairement distinctes.
2) Si la multiplicité de la valeur propre λ_i dans le polynôme caractéristique est m_i , alors λ_i se trouve m_i fois dans la diagonale.

Théorèmes

Soit h un endomorphisme d'un espace E de dimension n , et $C_h(x)$ son polynôme caractéristique.

Si h possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors h est diagonalisable.

h est diagonalisable ssi les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) $C_h(x)$ peut s'écrire $(-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$, les λ_i étant distincts ;
- (b) Pour tout i , $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$. « Les multiplicités algébriques et géométriques de chaque valeur propre sont égales. »

§ 50. LEMME SUR LES SOMMES DOUBLEMENT INDICÉES

Si (a_{ij}) est une famille de réels
doublement indexée par $i \in \{1; 2; \dots; m\}$
et $j \in \{1; 2; \dots; n\}$, alors :

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right) = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right)$$

Preuve

$\sum_j a_{ij}$ est la somme de la
 i -e ligne du tableau ci-contre.

Donc $\sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right)$ totalise les
 m sommes de chaque ligne,
et donne donc la somme
de tous les a_{ij} , notée $\sum_{i,j} a_{ij}$.

$i \backslash j$	1	2	...	n
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
m	a_{m1}	...		a_{mn}

Analogue pour montrer que $\sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right) = \sum_{i,j} a_{ij}$.

§ 51. TRACE D'UN ENDOMORPHISME DE $\mathbb{R}^n$

Définition

On appelle *trace d'une matrice carrée* A de type $n \times n$ la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Théorème

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Preuve

Posant $C = AB$ et $D = BA$, on a :

$$\text{Tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ji} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n d_{jj} = \text{Tr}(D).$$

Mise en garde : $\text{Tr}(AB)$ n'est pas égale en général à $\text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B)$.

Théorème

Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, M sa matrice relativement à une base B et M' sa matrice relativement à une base B' . Alors : $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M')$.

Preuve

P désignant la matrice de passage de B à B' , on peut écrire :

$$\text{Tr}(M') = \text{Tr}(P^{-1}MP) \stackrel{*}{=} \text{Tr}(PP^{-1}M) = \text{Tr}(IM) = \text{Tr}(M)$$

* Cf. théorème précédent

Ce résultat autorise la définition suivante :

Définition. On appelle *trace d'un endomorphisme* h de $\mathbb{R}^n$ — et l'on note $\text{Tr}(h)$ — la trace de la matrice de h relativement à une base quelconque de $\mathbb{R}^n$.

§ 60. MATRICE D'UNE ROTATION LINÉAIRE DE $\mathbb{R}^2$

Théorème

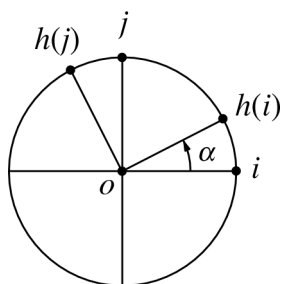
Soit $B = (i ; j)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, orientée positivement.

La matrice relativement à B de la rotation d'amplitude α et de centre o est

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Preuve

Désignons par h la rotation de centre o et d'amplitude α .



En se référant au cercle trigonométrique, on voit que :

$$h(i) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h(j) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

D'où la matrice relative à B de h : $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Remarques

- Les vecteurs-colonne de M sont unitaires (= de norme 1), et ils sont orthogonaux entre eux.
- $\text{Det}(M) = 1$.

§ 61. MATRICE D'UNE RÉFLEXION LINÉAIRE DE $\mathbb{R}^2$

Théorème

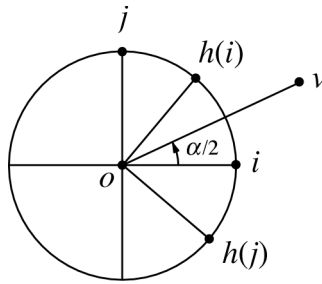
Soit $B = (i ; j)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ orientée positivement, et soit v un vecteur non nul tel que $\angle(i ; v) = \frac{\alpha}{2}$.

La matrice relativement à B de la réflexion d'axe $\langle v \rangle$ est

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Preuve

Nommons h la réflexion d'axe $\langle v \rangle$.



Puisque $\angle(i ; v) = \frac{\alpha}{2}$, on a $\angle(i ; h(i)) = \alpha$ et $\angle(i ; h(j)) = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Il s'ensuit que

$$h(i) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h(j) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice relative à B de h est $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$.

Remarques

- Les vecteurs-colonne de M sont unitaires (= de norme 1), et ils sont orthogonaux entre eux.
- $\text{Det}(M) = -1$.

§ 62. ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX

Définition

On appelle *matrice orthogonale* toute matrice carrée A telle que

$${}^t A A = I$$

ou, ce qui est équivalent, toute matrice carrée dont les vecteurs-colonne sont unitaires (= de norme 1) et deux à deux orthogonaux.

Une matrice orthogonale est donc inversible, et *son inverse est égale à sa transposée*.

Proposition

Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1 .

Preuve

$$\begin{aligned} {}^t A A = I &\Rightarrow \operatorname{Det}({}^t A A) = 1 &\Rightarrow \operatorname{Det}({}^t A) \operatorname{Det}(A) = 1 &\Rightarrow \operatorname{Det}(A) \operatorname{Det}(A) = 1 \\ &\Rightarrow \operatorname{Det}(A) = \pm 1. \end{aligned}$$

Définition

On appelle *endomorphisme orthogonal* de $\mathbb{R}^n$ tout endomorphisme dont la matrice relative à une certaine base *orthonormée* est orthogonale.

Propriétés

La matrice d'un endomorphisme orthogonal relative à n'importe quelle base orthonormée est orthogonale.

Un endomorphisme orthogonal transforme toute base orthonormée en une base orthonormée. Réciproquement, si l'image par un endomorphisme orthogonal h d'une certaine base orthonormée est orthonormée, alors h est orthogonal.

Un endomorphisme orthogonal conserve le produit scalaire, donc aussi la norme d'un vecteur et l'orthogonalité d'une paire de vecteurs.

§ 63. ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX DE $\mathbb{R}^2$

Théorème

Si h est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$, alors h est une *rotation* ou une *réflexion*.
C'est une rotation si $\text{Det}(h) = +1$ et une réflexion si $\text{Det}(h) = -1$.

Preuve

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ la matrice de h relativement à la base canonique.

Comme le premier vecteur-colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est unitaire, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ (cf. cercle trigonométrique). On sait de plus que le deuxième vecteur-colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et de même norme. On peut donc écrire : $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Ainsi :
$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Cela montre que h est une rotation ou une réflexion, et que le déterminant de h vaut $+1$ dans le premier cas et -1 dans le second.

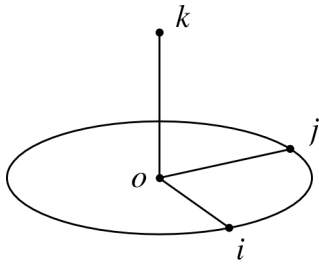
§ 64. MATRICE D'UNE ROTATION LINÉAIRE DE $\mathbb{R}^3$

Théorème

Soit $(i; j; k)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ orientée positivement ($k = i \times j$). La matrice M de la rotation d'axe orienté $(o; k)$ et d'amplitude α relativement à cette base est

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Preuve



Soit h cette rotation.

Comme la restriction de h au plan $\langle i; j \rangle$ est une rotation de centre o et d'amplitude α , sa matrice relativement à $(i; j)$ est

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

D'où les quatre premiers coefficients de M .

De $h(k) = k$ résulte la troisième colonne de M .

Les deux zéros de la troisième ligne de M proviennent de ce que $h(i)$ et $h(j)$ sont dans $\langle i; j \rangle$.

Remarques

- M est orthogonale, $\text{Det}(M) = 1$ et $\text{Tr}(M) = 2 \cos \alpha + 1$.

- Si la rotation se fait autour de $\langle i \rangle$, la matrice devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$;

si c'est autour de $\langle j \rangle$, la matrice est $\begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

§ 65. MATRICE D'UNE "ROTATION-RÉFLEXION" DE $\mathbb{R}^3$

Soit $\Delta = (o; v)$ une droite vectorielle orientée et Π le plan vectoriel perpendiculaire à Δ .

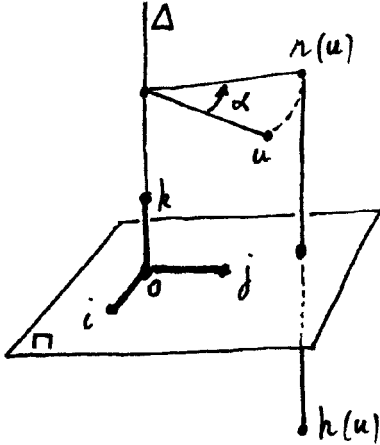
Appelons *rotation-réflexion d'axe Δ et d'amplitude α* l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ obtenu en composant la rotation r d'axe Δ et d'amplitude α avec la réflexion s de plan Π ($h = s \circ r = r \circ s$).

Théorème

Soit $(i; j; k)$ une base orthonormée orientée positivement. La matrice M de la rotation-réflexion h d'axe $\Delta = (o; k)$ et d'amplitude α relativement à cette base est

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Preuve



On sait déjà que la matrice de r relativement à $(i; j; k)$ est

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, la matrice de s relativement à la même base est

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice M de $h = s \circ r$ est donc égale à SR . On obtient la conclusion en effectuant le produit SR .

Remarques

- M est orthogonale
- $\text{Det}(M) = -1$
- $\text{Tr}(M) = 2 \cos \alpha - 1$

§ 66. ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX DE DÉTERMINANT +1 DANS $\mathbb{R}^3$

Lemme

Si A est une matrice orthogonale d'ordre 3 et de déterminant +1, A admet la valeur propre 1.

Démonstration

$$\begin{aligned}\det(A - I) &= \det(A - {}^tAA) = \det((I - {}^tA)A) = \det(I - {}^tA) \det(A) = \det(I - {}^tA) \\ &= \det({}^t(I - {}^tA)) = \det(I - A) = \det(-(A - I)) = (-1)^3 \det(A - I) = -\det(A - I).\end{aligned}$$

Ainsi $\det(A - I) = 0$, et A admet la valeur propre 1.

Théorème

Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^3$ de déterminant +1 est une *rotation* autour d'un axe. L'amplitude α de cette rotation est telle que :

$$\operatorname{Tr}(h) = 2 \cos \alpha + 1$$

Démonstration

Par le lemme précédent, il existe un vecteur unitaire w fixe par h . Soit $B = (u; v; w)$ une base orthonormée admettant w comme troisième vecteur. Relativement à B , la matrice A de h est

orthogonale, et elle a la forme $\begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{pmatrix}$. Ses vecteurs-colonne étant orthogonaux, on a

$c = f = 0$. Donc $A = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix}$ doit être orthogonale et de déterminant +1.

En se référant à ce qui a été établi dans $\mathbb{R}^2$, on voit que A peut s'écrire $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

h est donc bien une rotation d'amplitude α , et $\operatorname{Tr}(h) = \operatorname{Tr}(A) = 2 \cos \alpha + 1$.

Remarque. L'axe de la rotation est l'espace propre E_1 , sauf si $h = \operatorname{id}$.

§ 67. ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX DE DÉTERMINANT -1 DANS $\mathbb{R}^3$

Lemme

Si A est une matrice orthogonale de déterminant -1 , A admet la valeur propre -1 .

Démonstration

$\text{Det}(A - (-1)I) = \text{Det}(A + I) = \text{Det}(A + {}^tAA) = \text{Det}((I + {}^tA)A) = \text{Det}(I + {}^tA) \text{Det}(A)$
 $= -\text{Det}(I + {}^tA) = -\text{Det}({}^t(I + A)) = -\text{Det}(I + A) = -\text{Det}(A + I)$. Ainsi $\text{Det}(A + I) = 0$, et A admet la valeur propre -1 .

Théorème

Un endomorphisme orthogonal h de $\mathbb{R}^3$ de déterminant -1 est une *rotation-réflexion* dont l'amplitude α est telle que :

$$\text{Tr}(h) = 2 \cos \alpha - 1$$

Démonstration

Par le lemme, il existe un vecteur unitaire w tel que $h(w) = -w$. Soit $B = (u; v; w)$ une base orthonormée admettant w comme troisième vecteur. En procédant comme au numéro précédent,

on établit que la matrice de h relativement à B peut s'écrire $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

h est donc bien une rotation-réflexion, et $\text{Tr}(h) = \text{Tr}(A) = 2 \cos \alpha - 1$.

Remarques

- L'axe de la rotation est l'espace propre E_{-1} , sauf si $h = -\text{id}$ (symétrie centrale).
- h est une réflexion si $\text{Tr}(h) = 1$.