

ANALYSE 2^{MR}

EXERCICES

DER

5. Dériver les produits suivants *au moyen de la formule* $(fg)' = f'g + fg'$:

1. $(x+1)(x^2-2x+3)$

4. $(3x^2-x+1)(x^3-7x)$

2. $(3-x) \cdot 5x^3$

5. $(\frac{x}{2}-3)(3x+1)$

3. $-\frac{x^2}{2}(2x+1)$

6. $f(x) \cdot (5x^2+2x)$

Rép.

1) $3x^2-2x+1$ 2) $5x^2(9-4x)$ 3) $-x(3x+1)$

4) $15x^4-4x^3-60x^2+14x-7$ 5) $\frac{1}{2}(6x-17)$

6) $f'(x) \cdot (5x^2+2x) + f(x) \cdot (10x+2)$

6. Dériver :

1) $\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + 1$

2) $\frac{3x^7}{2} - \frac{7x}{3}$

3) $(3x^2+5)(x^2-1)$

4) $(7x-1)(3x^2-x+5)$

5) $\frac{x+5}{x-1}$

6) $\frac{x^2}{x^2-2x}$

7) $\frac{x^3}{x+1}$

8) $\frac{3}{x}$

Rép. 1) $\frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$ 2) $\frac{21x^6}{2} - \frac{7}{3}$ 3) $12x^3+4x$ 4) $63x^2-20x+36$

5) $\frac{-6}{(x-1)^2}$ 6) $\frac{-2}{(x-2)^2}$ 7) $\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ 8) $\frac{-3}{x^2}$

7. Dériver :

1) $-\frac{2}{3}x^4$

2) $-2x^3 + \frac{x^2}{3}$

3) $\frac{1}{3}(3x+1)$

4) $7(x^3-5x+9)$

5) $\frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{7}-2x\right)$

6) $\frac{7}{x}$

Rép. 1) $-\frac{8}{3}x^3$ 2) $-6x^2 + \frac{2}{3}x$ 3) 1 4) $21x^2-35$ 5) $\frac{4}{35}x - \frac{4}{5}$ 6) $\frac{-7}{x^2}$

DER

8. Calculer la dérivée de la fonction f , puis compléter le tableau. Placer ensuite dans un système d'axes Oxy (unité : 5 carrés ; origine au centre d'une page) les points du graphe de f donnés par le tableau, et dessiner en chacun de ces points un segment de la tangente au graphe, sans tracer celui-ci.

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	2				
$f'(x)$	-4,5				

2) $f(x) = \frac{1}{16}(3x^5 - 15x^4 + 20x^3)$

x	-1	0	1	2	2,8
$f(x)$	-2,4				
$f'(x)$			0,94		4,7

Rép. 1) $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x$ 2) $f'(x) = \frac{15}{16}(x^4 - 4x^3 + 4x^2)$

9. Déterminer la pente du graphe de f à l'abscisse a , sans calcul de limite :

1) $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$; $a = 1$

2) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$; $a = -3$

3) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x$; $a = \frac{3}{4}$

4) $f(x) = 5x^2 + 6x + 2$; $a = -1$

5) $f(x) = \frac{3x-2}{5x+1}$; $a = 0$

6) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$; $a = 1$

Rép. 1) 4 2) 8 3) 4 4) -4 5) 13 6) -1

10. Dériver :

1) $\frac{5}{x}$

2) $\frac{1}{x+3}$

3) $\frac{1}{2x+1}$

4) $\frac{2x-1}{x+1}$

5) $\frac{x^2}{3}$

6) $\frac{1}{g(x)}$

7) $\frac{2x}{x^2+1}$

8) $\frac{1}{3x-2}$

Rép. 1) $-\frac{5}{x^2}$ 2) $-\frac{1}{(x+3)^2}$ 3) $-\frac{2}{(2x+1)^2}$ 4) $-\frac{3}{(x+1)^2}$ 5) $\frac{2x}{3}$ 6) $\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

7) $\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ 8) $\frac{-3}{(3x-2)^2}$

DER

11. Dériver :

- | | | |
|------------------------------------|--------------------|--------------------|
| 1) $(3x+1)^5$ | 2) $(1-x)^4$ | 3) $(3x^2-2x+1)^7$ |
| 4) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3$ | 5) $(6x^3-x)^{12}$ | 6) $(-x^2+1)^2$ |

- Rép.* 1) $15(3x+1)^4$ 2) $-4(1-x)^3$ 3) $14(3x^2-2x+1)^6(3x-1)$
4) $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$ 5) $12(6x^3-x)^{11}(18x^2-1)$ 6) $-4x(-x^2+1)$

12. Dériver :

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 1) $y = 3x^2 - 5x + 4$ | 2) $y = x + 5$ |
| 3) $y = 4x^7 - 2x^3 + 6$ | 4) $y = \frac{x^2}{3} - x$ |
| 5) $y = (2x+1)^5$ | 6) $y = (3x-5)^8$ |
| 7) $y = (1-x)^7$ | 8) $y = (x^2-3x+1)^4$ |

- Rép.* 1) $6x-5$ 2) 1 3) $28x^6-6x^2$ 4) $\frac{2}{3}x-1$ 5) $10(2x+1)^4$
6) $24(3x-5)^7$ 7) $-7(1-x)^6$ 8) $4(x^2-3x+1)^3(2x-3)$

13. Dériver :

- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1) $(4-x)^3$ | 2) $(x-1)^2(x+2)$ | 3) $(2x-1)^3(x+2)^2$ |
| 4) $\left(\frac{3x^5}{2} + 5x\right)^4$ | 5) $\frac{x^3}{(x-1)^2}$ | 6) $(x+2)^3x^2$ |
| 7) $(2x+3)^3x^2$ | 8) $x(7-x)^5$ | 9) $\frac{(5-2x)^3}{4x}$ |

- Rép.* 1) $-3(4-x)^2$ 2) $3(x-1)(x+1)$ 3) $10(x+1)(x+2)(2x-1)^2$
4) $4\left(\frac{3x^5}{2} + 5x\right)^3\left(\frac{15x^4}{2} + 5\right)$ 5) $\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ 6) $x(x+2)^2(5x+4)$
7) $2x(2x+3)^2(5x+3)$ 8) $(7-x)^4(7-6x)$ 9) $\frac{(5-2x)^2(-4x-5)}{4x^2}$

DER

14. Dériver :

1) $y = x^2(x+3)$

2) $y = \frac{(x+1)^3}{x-1}$

3) $y = \frac{x^2}{x-1}$

4) $y = (x+2)^4 x$

5) $y = (2x+1)^5 x^2$

6) $y = \frac{x-1}{(2x+1)^3}$

Rép. 1) $3x(x+2)$ 2) $\frac{2(x+1)^2(x-2)}{(x-1)^2}$ 3) $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ 4) $(x+2)^3(5x+2)$
 5) $2x(2x+1)^4(7x+1)$ 6) $\frac{7-4x}{(2x+1)^4}$

15. Etudier le signe de la fonction f :

1) $f(x) = -2x + 3$

2) $f(x) = (x-5)(2x+1)$

3) $f(x) = -x^2 - 3x$

Rép. 1)

x	$3/2$
$f(x)$	$+ \quad 0 \quad -$

 2)

x	$-1/2$	5
$f(x)$	$+ \quad 0 \quad -$	$0 \quad +$

 3)

x	-3	0
$f(x)$	$- \quad 0 \quad +$	$0 \quad -$

16. Etudier le signe de f :

1) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

2) $f(x) = \frac{2x+5}{x}$

3) $f(x) = \frac{x(x+3)}{7-x}$

4) $f(x) = \frac{(x+3)^2(x-1)}{x^3}$

5) $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$

6) $f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$

Rép. 1. zéros et pôles : $-2 ; 3$ signe : $+ \parallel - 0 +$
 2. zéros et pôles : $-\frac{5}{2} ; 0$ signe : $+ 0 - \parallel +$
 3. zéros et pôles : $-3 ; 0 ; 7$ signe : $+ 0 - 0 + \parallel -$
 4. zéros et pôles : $-3 ; 0 ; 1$ signe : $+ 0 + \parallel - 0 +$
 5. zéros et pôles : $-2 ; 5$ signe : $- 0 + 0 -$
 6. zéros et pôles : $-3 ; -1 ; 0 ; 1$ signe : $+ 0 - \parallel + 0 - \parallel +$

DER

17. Etudier la croissance de f :

1) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

3) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

Rép. 1. $f'(x) = 2x - 5$ / zéros et pôles de f' : $\frac{5}{2}$ / signe de f' : $- 0 +$
croissance : $\searrow m \nearrow$

2. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ / zéros et pôles de f' : -3 ; 1
signe de f' : $+ 0 - 0 +$ / croissance : $\nearrow M \searrow m \nearrow$

3. $f'(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2}$ / zéros et pôles de f' : $-\frac{1}{2}$ / signe de f' : $- || -$
croissance : $\searrow \searrow$

4. $f'(x) = 4x^3 - 16x$ / zéros et pôles de f' : -2 ; 0 ; 2
signe de f' : $- 0 + 0 - 0 +$ / croissance : $\searrow m \nearrow M \searrow m \nearrow$

18. Etudier la croissance de la fonction f :

1) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

3) $f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 18x$

4) $f(x) = (4-x)^3$

5) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$

6) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

Rép. 1. $f'(x) = 4x - 5$ / zéros et pôles de f' : $\frac{5}{4}$ / signe de f' : $- 0 +$
croissance : $\searrow m \nearrow$

2. $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$ / zéros et pôles de f' : -2 ; 1
signe de f' : $+ 0 - 0 +$ / croissance : $\nearrow M \searrow m \nearrow$

3. $f'(x) = -3(x-2)(x+3)$ / zéros et pôles de f' : -3 ; 2
signe de f' : $- 0 + 0 -$ / croissance : $\searrow m \nearrow M \searrow$

4. $f'(x) = -3(4-x)^2$ / zéros et pôles de f' : 4 / signe de f' : $- 0 -$
croissance : $\searrow p \searrow$

5. $f'(x) = \frac{6(x-2)}{(x+1)^3}$ / zéros et pôles de f' : -1 ; 2
signe de f' : $+ || - 0 +$ / croissance : $\nearrow \searrow m \nearrow$

6. $f'(x) = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ / zéros et pôles de f' : $-\frac{3}{2}$; -1 ; 0
signe de f' : $- 0 + || + 0 +$ / croissance : $\searrow m \nearrow \nearrow p \nearrow$

DER

18 BIS. Etudier la croissance de la fonction f :

1) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x + 3}$

2) $f(x) = (x + 2)^3 x^2$

Rép. 1. $f'(x) = \frac{2x(x+3)}{(2x+3)^2}$ / zéros et pôles de f' : -3 ; $-\frac{3}{2}$; 0

signe de f' : $+ \ 0 \ - \ || \ - \ 0 \ + \ /$ croissance: $\nearrow M \searrow \searrow m \nearrow$

2. $f'(x) = x(x+2)^2(5x+4)$ / zéros et pôles de f' : -2 ; $-\frac{4}{5}$; 0

signe de f' : $+ \ 0 \ + \ 0 \ - \ 0 \ + \ /$ croissance: $\nearrow p \nearrow M \searrow m \nearrow$

19. On donne la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{10}(x^3 - 4x + 3)$. Dans un repère Oxy , placer les points du graphe de f dont les abscisses sont: -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 . (Unité sur les axes: 10 carrés.)

Dessiner ensuite en chacun de ces points un segment de la tangente au graphe, sans tracer le graphe.

20. Le graphe des fonctions suivantes, toutes du deuxième degré, est une parabole. Au moyen de la dérivée, déterminer les coordonnées du sommet de cette parabole.

1) $x^2 - 6x + 14$

2) $x^2 + 10x + 21$

3) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{67}{9}$

4) $-x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{236}{49}$

Rép. 1) $(3; 5)$ 2) $(-5; -4)$ 3) $(\frac{2}{3}; 7)$ 4) $(-\frac{3}{7}; 5)$

21. Déterminer le nombre a de façon que le graphe de f ait une pente 3 à l'abscisse 1:

1) $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$

2) $f(x) = \frac{x-a}{x+1}$

Rép. 1) $a = 2$ 2) $a = 11$

22. Mettre sous forme d'une puissance de a : (on rappelle que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ et que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$)

1) $\sqrt{a}$ 2) $\frac{1}{a^3}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 4) $\sqrt[3]{a^5}$ 5) $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$ 6) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$

Ecrire sans exposants négatifs ou fractionnaires:

7) a^{-5} 8) $a^{-2/3}$ 9) $(x+1)^{-1/2}$ 10) $(2x+3)^{3/2}$ 11) $x^{-9}x^{1/2}$ 12) $(ab)^{3/4}$

Rép. 1) $a^{1/2}$ 2) a^{-3} 3) $a^{-1/2}$ 4) $a^{5/3}$ 5) $a^{-1/3}$ 6) $a^{1/3}$ 7) $\frac{1}{a^5}$ 8) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

9) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 10) $\sqrt{(2x+3)^3}$ 11) $\frac{1}{\sqrt{x^{17}}}$ 12) $\sqrt[4]{a^3b^3}$

DER

23. Dériver :

1. $x^{\frac{1}{2}}$

3. $\sqrt{2x+1}$

5. $\sqrt[3]{x^2}$

2. $\sqrt{x}$

4. $\frac{1}{\sqrt{x}}$

6. $\frac{1}{\sqrt[3]{5x+1}}$

Rép.

1) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

4) $\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

5) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

6) $\frac{-5}{3\sqrt[3]{(5x+1)^4}}$

24. Dériver :

1) $\sqrt[3]{(x+1)^2}$

2) $\sqrt[3]{2x^3-1}$

3) $\frac{1}{\sqrt[5]{3x}}$

4) $\frac{2}{\sqrt{3x}}$

5) $\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

6) $\sqrt[4]{7x+1}$

Rép. 1) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$

2) $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-1)^2}}$

3) $\frac{-3}{5\sqrt[5]{(3x)^6}}$

4) $\frac{-3}{\sqrt{(3x)^3}}$

5) $\frac{-4}{3\sqrt[3]{(2x+1)^5}}$

6) $\frac{7}{4\sqrt[4]{(7x+1)^3}}$

25. Trouver l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a :

1) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $a = 3$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $a = 1$

Rép. 1) $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

2) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

26. Etudier la croissance de $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Rép. $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

x	0	2
$f'(x)$	- indéfini +	
$f(x)$	$\searrow$ m	m $\nearrow$

DER

27. Remarque préliminaire : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ implique $(\sqrt{g(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$.

Dériver :

- | | | |
|--------------------|---------------------|-----------------------------|
| 1) $\sqrt{2x+5}$ | 2) $\sqrt{1-3x}$ | 3) $\sqrt{x^2+3x+5}$ |
| 4) $\sqrt{x^2+2x}$ | 5) $x\sqrt{3x^2+1}$ | 6) $\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}$ |

- Rép.
- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$ | 2) $\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$ | 3) $\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$ |
| 4) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ | 5) $\frac{6x^2+1}{\sqrt{3x^2+1}}$ | 6) $\frac{2(x+1)}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$ |

28. Dériver :

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\sqrt{3x+1}$ | 2) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ | 3) $\frac{1}{\sqrt{1-5x}}$ |
| 4) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ | 5) $x\sqrt{2x+1}$ | 6) $(x+1)\sqrt{x+2}$ |

- Rép.
- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1) $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ | 2) $\frac{-2}{3\sqrt[3]{x^4}}$ | 3) $\frac{5}{2\sqrt{(1-5x)^3}}$ |
| 4) $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ | 5) $\frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$ | 6) $\frac{3x+5}{2\sqrt{x+2}}$ |

29. Etudier la croissance de la fonction f :

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ | 2) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$ |
| 3) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ | 4) $f(x) = \frac{x-5}{x^3}$ |

Rép.

1) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

x	0
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	↘ m ↗

2) $f'(x) = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$

x	
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

3) et 4) : page suivante.

DER

$$3) \quad f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

x	-4	-2	0	
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	↗	M	↘	m ↗

$$4) \quad f'(x) = \frac{-2x+15}{x^4}$$

x	0	15/2	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	↗	M ↘

30. Etudier la croissance de la fonction f :

$$1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x-5}{x^3}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{(2x+1)^3}{x-2}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{x+5}{(2-x)^3}$$

Rép.

$$1) \quad f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

x	-4	-2	0	
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	↗	M	↘	m ↗

$$2) \quad f'(x) = \frac{-2x+15}{x^4}$$

x	0	15/2	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	↗	M ↘

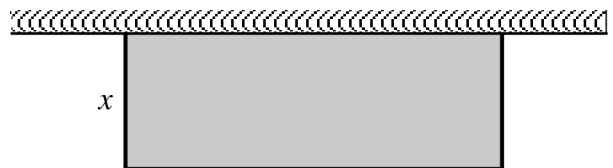
$$3) \quad f'(x) = \frac{(2x+1)^2(4x-13)}{(x-2)^2}$$

x	-1/2	2	13/4	
$f'(x)$	-	0	-	+
$f(x)$	↘	p	↘	m ↗

$$4) \quad f'(x) = \frac{2x+17}{(2-x)^4}$$

x	-17/2	2	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	m	↗

34. On dispose de barrières d'une longueur totale de 40 m pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur rectiligne. Quelles dimensions faut-il donner à cet enclos pour que le pré qu'il délimite ait une aire maximale ?



Indication : exprimer l'aire de l'enclos en fonction de x (cf. figure), et faire une étude de la croissance de cette fonction.

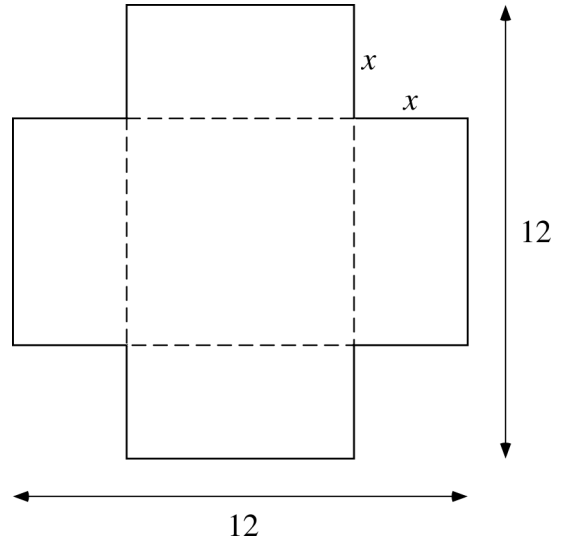
Rép. 10 m, 20 m

DER

35. D'une plaque de carton carrée de 12 cm de côté, on enlève en chaque coin un petit carré de côté x (cf. figure). En pliant selon le traitillé, on peut former une boîte (sans couvercle).

- Exprimer le volume de cette boîte en fonction de x .
- Que doit valoir x si l'on veut que le volume de la boîte soit maximal ?

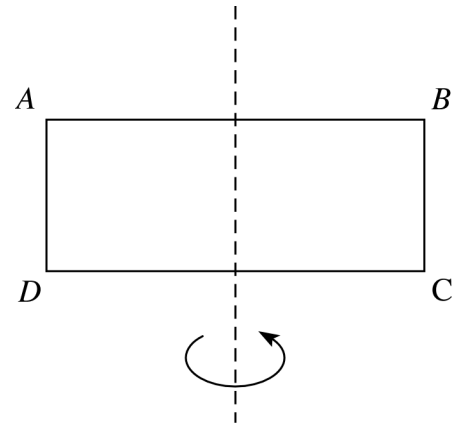
Rép. $x = 2$



36. En faisant tourner un rectangle $ABCD$ de périmètre 12 et de longueur $AB = 2x$ autour de son axe de symétrie perpendiculaire à AB , on obtient un cylindre. Déterminer x pour que le volume V de ce cylindre soit maximal.

Rappel : $V = (\text{aire du cercle de base}) \cdot (\text{hauteur})$

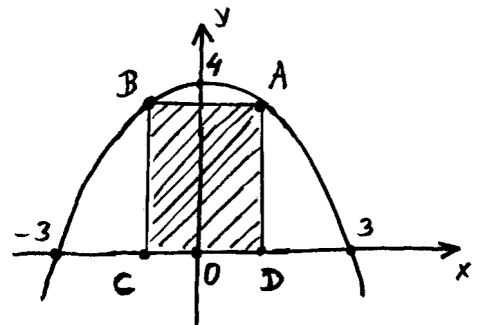
Rép. $x = 2$



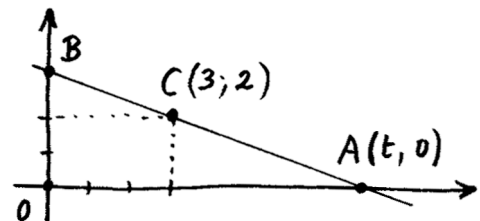
37. Un rectangle $ABCD$ est inscrit entre la parabole $y = -\frac{4}{9}(x^2 - 9)$ et l'axe Ox , comme le montre la figure ci-contre. Soit x l'abscisse de A .

- Exprimer l'aire du rectangle en fonction de x .
- Déterminer x de sorte que l'aire du rectangle soit maximale.

Rép. a) $-\frac{8}{9}(x^3 - 9x)$ b) $x = \sqrt{3}$



38. Une droite passant par le point $C(3; 2)$ coupe l'axe Ox en $A(t, 0)$ et l'axe Oy en B ($t > 3$). Déterminer t afin que l'aire du triangle OAB soit minimale. [Rép. $t = 6$]

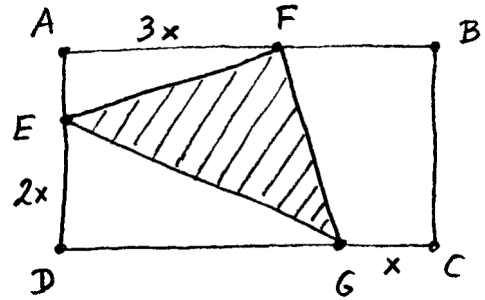


DER

39. Un rectangle $ABCD$ est tel que $AB = 12$ et $BC = 6$. On y inscrit un triangle EFG de sorte que $CG = x$; $ED = 2x$ et $AF = 3x$.

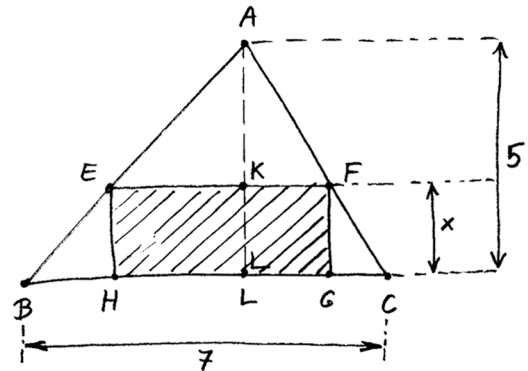
- Exprimer l'aire du triangle EFG en fonction de x .
- Pour quelle valeur de x l'aire de EFG est-elle minimale ? maximale ?

Rép. a) $4x^2 - 15x + 36$ b) $\frac{15}{8}$; 0



40. Dans un triangle ABC , on inscrit un rectangle $EFGH$ tel que EF soit parallèle à BC . On donne $BC = 7$, $h_A = 5$ (hauteur issue de A) et on pose $x = FG$.

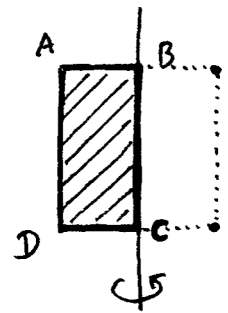
- Exprimer EF en fonction de x .
Indication : les triangles ABC et AEF étant semblables, on a la proportion $\frac{AK}{EF} = \frac{AL}{BC}$.
- Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $EFGH$ est-elle maximale ?
Quelle est l'aire maximale ?



Rép. a) $EF = \frac{7}{5}(5 - x)$ b) $x = \frac{5}{2}$; aire maximale: $\frac{35}{4}$

41. Un rectangle $ABCD$ engendre par rotation autour de son côté BC un cylindre.

- Sachant que le périmètre du rectangle $ABCD$ est 15, exprimer le volume du cylindre en fonction de $x = AB$.
- Déterminer x pour que le volume du cylindre soit maximal, et calculer le volume maximal.



Rép. a) $V(x) = \frac{\pi}{2}(15x^2 - 2x^3)$ b) 5 ; $\frac{125\pi}{2}$

42. Soit $f(x) = \frac{-4(x^2 - 9)}{9}$ et $g(x) = \frac{8(x + 3)}{9}$.

- Calculer les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et g , puis esquisser les deux "courbes" dans un même repère Oxy .
- Déterminer l'abscisse x ($-3 < x < 1$) du plus long segment vertical dont les extrémités sont sur les graphes de f et g .

Rép. a) $(-3; 0)$ et $(1; \frac{32}{9})$ b) $x = -1$

DER

43. Relativement à un repère orthonormé Oxy du plan, on donne le point $P(4; 2)$ et la droite d d'équation $y = 2x - 1$. Soit $M(x, 2x - 1)$ un point variable sur d .

- a) Exprimer la distance de P à M en fonction de x (utiliser la norme du vecteur $\overrightarrow{PM}$).
- b) On pose $f(x) = \|\overrightarrow{PM}\|^2$. Pour quelle valeur de x la distance PM est-elle minimale ?
En déduire les coordonnées de la projection H de P sur d , et la distance de P à d .

Rép. $f(x) = 5x^2 - 20x + 25$ / $H(2; 3)$ / $\delta(P, d) = \sqrt{5}$

44. En appliquant la méthode de l'exercice précédent, calculer les coordonnées de la projection de P sur d :

- a) $P(4; 4)$ $d: y = 3x + 2$ b) $P(-10; 2)$ $d: 3x - 4y + 13 = 0$

Rép. a) $(1; 5)$ b) $(-7; -2)$

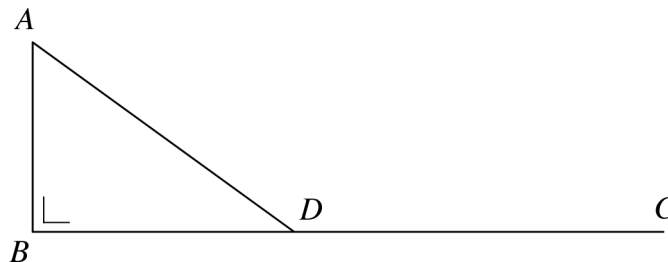
45. On considère la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- a) Déterminer les valeurs de a , b et c pour que son graphe passe par $A(2; 2)$ et $B(3; 7)$ et que la tangente t à la courbe au point P d'abscisse $\frac{2}{3}$ ait une pente de $-\frac{7}{3}$.
- b) Calculer les coordonnées de P , celles du sommet de la courbe, et donner l'équation de t .

Rép. $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$; $P(\frac{2}{3}; \frac{14}{9})$; $S(\frac{5}{4}; \frac{7}{8})$; $y = -\frac{7}{3}x + \frac{28}{9}$

46. On veut produire des briques de 1 litre de lait, à base carrée. Déterminer les dimensions qu'il faut donner à ces briques de manière à minimiser le coût de l'emballage.

47. Une île A est située à 5 km du point B de la côte le plus proche de A . Une usine électrique C , sur la côte, est sise à 10 km de B . On pose une ligne électrique reliant A et C en passant par un point D de la côte. Le coût d'une ligne terrestre est de 3 millions de francs par km, et celui d'une ligne maritime de 5 millions de francs par km. Déterminer la distance x de B à D telle que le coût de la ligne soit minimal.



Rép. coût minimal lorsque $BD = 3,75$ km

DRV

59. Dériver :

- | | | |
|--------------------|-----------------------|------------------------------------|
| 1. $\sin(3x)$ | 9. $(2x+1)^7$ | 17. $\frac{1}{\sin x}$ |
| 2. $\sin(x^2+3x)$ | 10. $(-6x^2+x)^{15}$ | 18. $\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| 3. $\cos(x^3+1)$ | 11. $(\sin x)^{13}$ | 19. $\sin(\sqrt{x})$ |
| 4. $\cos(-2x^2)$ | 12. $(\tan x)^2$ | 20. $\tan(3x+1)$ |
| 5. $\sqrt{2x}$ | 13. $(5x^4+2)^9$ | 21. x^{-3} |
| 6. $\sqrt{3x+1}$ | 14. $\frac{1}{x}$ | 22. $(3x+1)^{-3}$ |
| 7. $\sqrt{\sin x}$ | 15. $\frac{1}{2x+1}$ | 23. $(x^5+1)^{-5}$ |
| 8. $\sqrt{-3x^5}$ | 16. $\frac{1}{x^4+9}$ | 24. $(\sin x)^{-9}$ |

Réponses

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|---|
| 1. $3 \cos(3x)$ | 9. $14(2x+1)^6$ | 17. $\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$ |
| 2. $\cos(x^2+3x) \cdot (2x+3)$ | 10. $15(-12x+1)(-6x^2+x)^{14}$ | 18. $\frac{-1}{x^2 \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$ |
| 3. $-3x^2 \sin(x^3+1)$ | 11. $13(\sin x)^{12} \cdot \cos x$ | 19. $\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ |
| 4. $4x \sin(-2x^2)$ | 12. $\frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$ | 20. $\frac{3}{\cos^2(3x+1)}$ |
| 5. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ | 13. $180x^3(5x^4+2)^8$ | 21. $-3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$ |
| 6. $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ | 14. $-\frac{1}{x^2}$ | 22. $\frac{-9}{(3x+1)^4}$ |
| 7. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ | 15. $\frac{-2}{(2x+1)^2}$ | 23. $\frac{-25x^4}{(x^5+1)^6}$ |
| 8. $\frac{-15x^4}{2\sqrt{-3x^5}}$ | 16. $\frac{-4x^3}{(x^4+9)^2}$ | 24. $\frac{-9 \cos x}{\sin^{10} x}$ |



DRV

70. Inscrire entre les courbes qui représentent les fonctions f et g le plus grand segment possible parallèle à l'axe Oy .

1) $f(x) = \frac{x^2}{8}$; $g(x) = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 4$) 2) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$

Rép. abscisse du plus long segment : 1) $\sqrt[3]{4}$ 2) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$

71. Trouver l'angle d'intersection des graphes des fonctions f et g :

1) $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3$ 2) $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{x^2}{4} + 3$
3) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$

Rép. 1) 0 ; $8,1^\circ$ 2) $30,96^\circ$; $30,96^\circ$ 3) $70,5^\circ$

85. Soit $a, b > 0$. Déterminer le rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire dans l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Rép. longueur : $a\sqrt{2}$; largeur : $b\sqrt{2}$

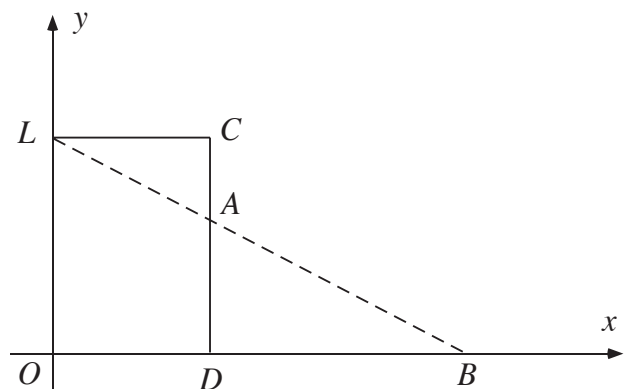
86. Deux mobiles partent au même instant d'un même point. Ils décrivent chacun une demi-droite à vitesse constante v_1 , respectivement v_2 , les deux demi-droites formant un angle α . A quelle vitesse ces deux mobiles s'éloignent-ils l'un de l'autre ?

Rép. $\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}$

87. Un objet ponctuel A , lâché de $C(a, h)$ au temps $t = 0$, tombe verticalement. Une source lumineuse est placée en L . Déterminer la vitesse de l'ombre B de A sur le sol.

On sait que la distance déjà parcourue par A au temps t est $\frac{1}{2}gt^2$.

Rép. $\frac{-4ah}{gt^3}$



DRV

88. Un tapis roulant débite du gravier à raison de 2 m^3 par seconde. Le gravier s'entasse en formant un cône de hauteur égale au rayon. A quelle vitesse la hauteur de ce cône augmente-t-elle ?

Rép. $\sqrt[3]{\frac{2}{9\pi t^2}}$

89. A midi, un navire B est à 40 km à l'est d'un navire A . A se déplace à la vitesse de 20 km/h dans la direction 30° Est, tandis que B se déplace à la vitesse de 10 km/h dans la direction 30° Ouest (les angles sont mesurés par rapport à la direction Nord). A quelle heure les navires seront-ils le plus proche l'un de l'autre ? Quelle sera alors la position de B relativement à A ? (On admet que la surface de la mer est plane.)

Rép. à 14 h ; B est alors à 20 km de A dans la direction 150° Est.

EF

1. Etudier la convexité des fonctions suivantes et donner les coordonnées des points d'inflexion.

1) $f(x) = x^3 - 3x$

2) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2$

3) $f(x) = (x-1)^3(x+1)$

4) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 3x$

Rép. 1) $(0; 0)$

2) $\left(-1; -\frac{3}{4}\right), \left(1; -\frac{3}{4}\right)$

3) $(0; -1), (1; 0)$

4) $\left(-1; \frac{52}{15}\right), (0; 0), \left(1; -\frac{52}{15}\right)$

2. Etudier les fonctions suivantes, convexité comprise.

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - \frac{11}{3}$

2) $f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 6x^3 + 12x^2)$

3) $f(x) = \frac{1}{16}(3x^5 - 15x^4 + 20x^3)$

4) $f(x) = \frac{1}{64}(x-4)^4(x+1)$

3. Trouver l'abscisse des extrémums, **sans** tableau de croissance :

1) $f(x) = x^2(1-x)^2$

2) $f(x) = \sin x + \cos x$

3) $f(x) = \sin x \sin(a-x)$

4)

Rép. 1) min : $x = 0, x = 1$; max : $x = \frac{1}{2}$

2) min : $x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$; max : $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

3) min : $x = \frac{a+\pi}{2} + k\pi$; max : $x = \frac{a}{2} + k\pi$

4. Soit f une fonction telle que $f''(x) = x^2 - 1$. Trouver f sachant que son graphe passe par le point $A(1; 1)$, en lequel il admet pour tangente la droite d'équation $x + 12y = 13$.

Rép. $f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 6x^2 + 7x + 10)$

5. La fonction f , deux fois dérivable, vérifie $f(1) = 1$ et $f''(1) \neq 2$. Quelles autres hypothèses doit-on faire sur f pour que g , définie par $g(x) = x f(x)$, admette un maximum en $x = 1$?

Rép. $f'(1) = -1$ et $f''(1) < 2$

6. Déterminer les abscisses des points d'inflexions des fonctions suivantes :

1) x^3

2) $\frac{x^3 - 8}{x}$

3) $x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

4) x^4

5) $\frac{6x}{1+x^2}$

Rép. 1) 0 2) 2 3) 1 4) néant 5) $0; \pm\sqrt{3}$

7. Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{x - 7}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x - 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{\sqrt{x + 1} - 2}$$

Rép. 1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ 4) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 5) 3 6) $-\frac{2}{3}$

8. Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5x + 3\sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5x + 3\sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

Rép. 1) 1 2) -1 3) $+\infty$ 4) $-\infty$ 5) 0 6) $-\infty$ 7) $\frac{1}{2}$ 8) $-\frac{1}{2}$

9. Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4} \right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x > 8}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{8} + \sqrt{x - 8}}{\sqrt{x^2 - 64}}$$

Rép. 1) 1 2) -1 3) 0 4) -2 5) $\frac{1}{2}$ 6) $\frac{1}{4}$

EF

10. Etudier la croissance de la fonction f :

$$1) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x+2}$$

$$2) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}}$$

11. Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes de la fonction f :

$$1) \quad f(x) = x + 2 + \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{2x\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$3) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

4)

12. Etudier les fonctions suivantes :

$$1) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (\text{convexité comprise})$$

$$2) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x+1}$$

$$3) \quad f(x) = x + \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$$

$$4) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

$$5) \quad f(x) = x\sqrt{1-x} \quad (\text{convexité comprise})$$

$$6) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$7) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - x$$

$$8) \quad f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$$

Rép. (>> fin de la série)

13. Parmi tous les rectangles inscriptibles dans un cercle donné de rayon r , quel est celui dont le périmètre est le plus grand ?

Indication : exprimer le périmètre en fonction de l'une des dimensions du rectangle.

Rép. le carré

14. Parmi tous les cônes de révolution d'aire latérale π , quel est celui dont le volume est maximal ? *Indication* : exprimer le volume en fonction du rayon du cercle de base.

Rép. celui dont le rayon de base est $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

16. Etudier le signe de f entre 0 et 2π :

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = \sin(2x)$ | 2) $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ |
| 3) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ | 4) $f(x) = \frac{\cos(2x)}{1 - \sin x}$ |

Rép. 1) zéros de f : $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ / signe de f : $0 + 0 - 0 + 0 - 0$
 2) zéros de f : $0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; 2\pi$ / signe de f : $0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0$
 3) zéros et pôles de f : $0; \pi; 2\pi$ / signe de f : $0 + \parallel - 0$
 4) zéros et pôles de f : $\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$ / signe de f : $+ 0 - \parallel - 0 + 0 - 0 +$

18. Etudier les fonctions suivantes entre 0 et 2π . Points à traiter : signe de f , croissance, points à tangente horizontale, asymptotes verticales, esquisse du graphe.

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ | 2) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$ | 3) $f(x) = \sin x - \sin^2 x$ |
|--------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|

Rép. 1) zéros de f : $\frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{10\pi}{6}$ / $f'(x) = 2 \cos x(2x - \frac{\pi}{3})$
 zéros de f' : $\frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}; \frac{23\pi}{12}$ / 2 max. d'ordonnée 1 / 2 min. d'ordonnée -1
 2) zéros et pôles de f : $0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ / $f'(x) = (-\sin x)/(1 - \cos x)^2$
 zéros et pôles de f' : $0; \pi; 2\pi$ / min: $(\pi; -\frac{1}{2})$ / AV: $x = 0; x = 2\pi$
 3) zéros de f : $0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi$ / $f'(x) = \cos x(1 - 2 \sin x)$
 zéros de f' : $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}$ / max: $(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{4}); (\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{4})$ / min: $(\frac{\pi}{2}; 0); (\frac{3\pi}{2}; -2)$

19. Etudier les fonctions suivantes :

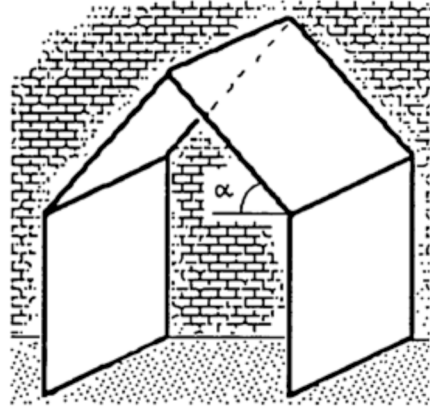
- | | |
|---|--|
| 1) $f(x) = \sin^2 x \cos(2x)$ | 2) $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ (avec courbure) |
| 3) $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos x$ (avec courbure) | 4) $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ |
| 5) $f(x) = \frac{4 \cos^2 x - 1}{2 \cos x}$ | 6) $f(x) = \frac{\tan x}{1 - 2 \sin x}$ |

Rép. (>> fin de la série)

23. Avec quatre planches carrées de côté a , on fabrique une niche à chien contre le mur d'une maison (cf. figure).

Déterminer l'angle α afin que le volume de la niche soit maximal.

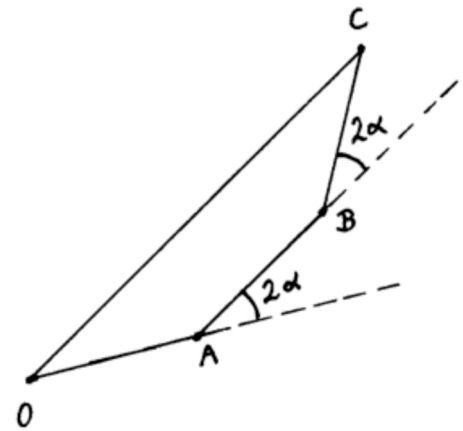
Rép. volume de la niche :
 $a^3(2\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha)$;
 maximal lorsque $\alpha = 21,47^\circ$



24. Dans la figure ci-contre, $OA = AB = BC = 1$.

L'angle α est compris entre 0° et 60° . Déterminer α de sorte que l'aire du trapèze soit maximale.

Rép. aire du trapèze : $(1 + \cos(2\alpha))\sin(2\alpha)$;
 maximale lorsque $\alpha = 30^\circ$



EF : Réponses

12.1

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} ; D = [-1; 1] ; \text{paire} ;$$

x	-1	1
$f(x)$	0	0

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1	0	1
$f'(x)$	/	+	0 - / / /
$f(x)$	m ↗ M ↘ m		

$$f''(x) = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

max : (0; 1)
min : (-1; 0) , (1; 0)

x	-1	1
$f''(x)$	/	- / / /
$f(x)$	⌒	

Pas d'asymptotes. Tangentes verticales en $(-1; 0)$ et $(1; 0)$

12.2

$$D = (]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[) - \{-1\}$$

x	-1	1	3
$f(x)$	-	+	0 / / / 0 +

$$f'(x) = \frac{3x-5}{(x+1)^2\sqrt{(x-1)(x-3)}} ;$$

x	-1	1	3
$f'(x)$	-	- / / / /	+
$f(x)$	↘	↘ m	m ↗

AV: $x = -1$; AHD: $y = 1$; AHG: $y = -1$

Graphes 1 asymptotes: $(\frac{1}{3}; 1)$

Tangentes verticales en $(1; 0)$ et $(3; 0)$

EF : Réponses

12.3

$$D =]-\infty; -1[\cup [2; +\infty[$$

x	-2	-1	2
f(x)	-	0	+

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2\sqrt{(x-2)(x+1)^3}}$$

x	-1	2
f'(x)	+	+
f(x)	↗	↘

min : (2; 2)

$$AO : y = x + 1 \quad (G + D)$$

Intersection avec l'asymptote: —

Tangente verticale en (2; 2)

12.4

$$D =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$$

x	0	2
f(x)	+	+

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}(x-2)^2}$$

x	0	2	3
f'(x)	-	-	0
f(x)	↘	↘	↗

min : (0; 0) et (3; 3√3) ; $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$

$$AV : x = 2 ; \quad AOD : y = x + 1 ; \quad AOG : y = -x - 1$$

Intersection avec les asymptotes : $(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$

EF : Réponses

12.5

$$D =]-\infty; 1]$$

x	0	1
f(x)	-	0

$$f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

x	2/3	1
f'(x)	+	0
f(x)	↗ M	↘ m

$$\max: (2/3; \frac{2}{9}\sqrt{3})$$

$$\min: (1; 0)$$

Pas d'asymptotes ; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$ (tangente verticale)

$$f''(x) = \frac{3x-4}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

x	1
f''(x)	-
f(x)	∩

12.6

$$D =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$$

x	-1	1
f(x)	+	0

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}$$

x	-1	1
f'(x)	-	-
f(x)	↘ m	↘

AV: x=1 ; AH: y=1 (G+D) ; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -\infty$

Intersection avec les asymptotes: —

EF : Réponses

12.7

$$D =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[\quad ; \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 3 \\ \hline f(x) & + \boxed{1} & \boxed{-3} - \end{array}$$

$$f'(x) = \frac{x-1-\sqrt{x^2-2x-3}}{\sqrt{x^2-2x-3}} ;$$

x	-1	3
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow m$	$m \nearrow$

AHD: $y = -1$; AOC: $y = -2x + 1$; pas d'AV

Graphes n asymptotes : — ;

tangentes verticales en $(-1; 1)$ et $(3; -3)$

12.8

$$D = \mathbb{R} \quad ; \quad \begin{array}{c|ccc} x & & 1 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - \end{array} \quad ; \quad f'(x) = \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

x	0	1
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

; A0: $y = -x$ (G+D)

palier: $(0; 1)$; tang. verticale en $(1; 0)$

19.1

$D = \mathbb{R}$; période : π ; fonction paire

x	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	π
$f(x)$	0	$+$	0	$-$
	0	$+$	0	$+$
	0	$-$	0	$+$
	0	$+$	0	$+$

; $f'(x) = 2 \sin x \cos(3x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	m	$\nearrow M$	$\searrow m$	$\nearrow M$	$\searrow m$

$$\min: (0; 0), (\frac{\pi}{2}; -1), (\pi; 0)$$

$$\max: \left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{8}\right), \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{8}\right)$$

EF : Réponses

19.2

$D = \mathbb{R}$; période : 2π

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f'(x)$	+	0	-	+

$$f'(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	2π
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m

$$\text{max: } \left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$$

$$\text{min: } \left(\frac{7\pi}{6}; -2\right)$$

$$f''(x) = -\sin x - \sqrt{3} \cos x$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f''(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$\cap$	i	$\cup$	i

$$\text{pt. d'inf. : } \left(\frac{2\pi}{3}; 0\right)$$

$$\left(\frac{5\pi}{3}; 0\right)$$

19.3

$D = \mathbb{R}$; période : 2π ; fonction paire

x	0	$65,53^\circ$	$294,47^\circ$	2π
$f'(x)$	-	0	+	0

$$f'(x) = 2 \sin x (1 + \cos x)$$

x	0	π	2π
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	m	$\nearrow$	M

$$\text{min: } (0; -2) \text{ et } (2\pi; -2)$$

$$\text{max: } (\pi; 2)$$

$$f''(x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$$

x	0	$\pi/3$	π	$5\pi/3$	2π
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	i	$\cap$	$\cap$	i

$$\text{pts d'inf. :}$$

$$\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{3}; -\frac{1}{4}\right)$$

EF : Réponses

19.4

$D = \mathbb{R}$; période : 2π ; fonction impaire

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \pi & 2\pi \\ \hline f(x) & 0 & + & 0 \end{array} \quad ; \quad f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} ;$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & \pi/3 & 5\pi/3 & 2\pi \\ \hline f'(x) & + & 0 & - & 0 & + \\ \hline f(x) & \nearrow & M & \searrow & m & \nearrow \end{array}$$

$$\max : \left(\frac{\pi}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\min : \left(\frac{5\pi}{3} ; -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

FCR

9. Déterminer les pôles de la fonction f puis, pour chaque pôle a trouvé, calculer $u = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ et $v = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$. En déduire les asymptotes verticales de f , les représenter dans un repère Oxy et indiquer l'allure du graphe de f au voisinage de ces asymptotes.

$$1) \quad f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x+1}{(x-5)(1-x)}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{-7}{x^3 + 3x^2}$$

$$5) \quad f(x) = \frac{1-x}{x^2+7x+12}$$

6) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x-6}$

Rép. 1) $a=1: u=+\infty; v=+\infty$ / AV: $x=1$

2) $a=2: u=-\infty; v=+\infty / \text{AV}: x=2$

3) $a=1: u=-\infty; v=+\infty / a=5: u=+\infty; v=-\infty / \text{AV}: x=1; x=5$

4) $a = -3: u = +\infty; v = -\infty / a = 0: u = -\infty; v = -\infty / \text{AV}: x = -3; x = 0$

5) $a = -4: u = +\infty; v = -\infty / a = -3: u = -\infty; v = +\infty / \Delta V: x = -4; x = -3$

6) $a = -1: u = v = -\frac{1}{7} / a = 6: u = -\infty; v = +\infty / \text{AV}: x = 6$

10. Déterminer les asymptotes verticales et horizontales de la fonction f :

$$1) \quad f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 3x + 2}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{x+2}{2x^2+x}$$

Rép. 1) $x = 3$; $y = 1$

3) $x = 1$; $x = 2$; $y = 1$

$$2) \quad x = 2; \quad y = 3$$

4) $x = 0$; $x = -\frac{1}{2}$; $y = 0$

11. Etudier le signe des fonctions suivantes :

$$1) \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + x - 6}$$

3) $f(x) = \frac{x-2}{x+3} - 1$

4) $f(x) = \frac{2x}{x-5} - 2$

$$5) \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} - 1$$

6) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-3}$

Rép.

1.

x	-3	-2	-1	1					
$f(x)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$

4.
$$\begin{array}{c|ccc} x & & 5 & \\ \hline f(x) & - & 11 & + \end{array}$$

2.

x	-3	1	2
$f(x)$	$+$	11	$-$

 $0 - 11 +$

5.

x	-1	1
$f(x)$	$+$	$-$

3.
$$\begin{array}{c|ccc} x & & -3 & \\ \hline f(x) & + & || & - \end{array}$$

6.

x	-5	-1	3
$f(x)$	$+$	0	$-$

FCR

12. Déterminer les asymptotes verticales et horizontales :

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 3} & 2) f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x - 15} & 3) f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 17}{x^2 + 9} \\ 4) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & 5) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x + 2} & 6) f(x) = \frac{3x^2 - 11x + 13}{3x^2 - 11x - 4} \end{array}$$

Rép. 1) $x = 3$ 2) $x = -5$; $x = 3$; $y = 0$ 3) — 4) —
 5) $x = -2$; $y = 0$ 6) $x = -\frac{1}{3}$; $x = 4$; $y = 1$

13.—

- Déterminer les asymptotes verticales et horizontales de la fonction donnée f .
- Etudier le signe de la fonction $\delta(x) = f(x) - h$ mesurant la "différence d'altitude" entre le graphe de f et l'asymptote horizontale d'équation $y = h$.
- Dans un système d'axes Oxy , représenter les asymptotes de f , puis hachurer les zones du plan dans lesquelles le graphe de f ne passe en tout cas pas, au vu du signe de $\delta(x)$.
- Esquisser un graphe plausible pour f .

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{2x+1}{x-3} & 2) f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 1}{x(x+2)} \\ 3) f(x) = \frac{-2x^2 - 11x + 12}{x^2 + 6x - 7} & 4) f(x) = \frac{2x^2 - x - 18}{x^2 - 9} \end{array}$$

Rép. 1) AV : $x = 3$ / AH : $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{7}{x-3}$
 zéros et pôles de δ : 3 / signe de δ : — || +
 2) AV : $x = 0$; $x = -2$ / AH : $y = 3$ / $\delta(x) = \frac{1-x}{x(x+2)}$
 zéros et pôles de δ : -2 ; 0 ; 1 / signe de δ : + || - || + 0 -
 3) AV : $x = -7$; $x = 1$ / AH : $y = -2$ / $\delta(x) = \frac{x-2}{x^2+6x-7}$
 zéros et pôles de δ : -7 ; 1 ; 2 / signe de δ : - || + || - 0 +
 4) AV : $x = -3$; $x = 3$ / AH : $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{-x}{x^2-9}$
 zéros et pôles de δ : -3 ; 0 ; 3 / signe de δ : + || - 0 + || -

FCR

14. A l'aide d'une division euclidienne, exprimer les fractions $\frac{N}{D}$ suivantes comme somme d'un polynôme Q et d'une fraction $\frac{R}{D}$ telle que $d^\circ(R) < d^\circ(D)$: $\boxed{\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}}$.

1) $\frac{3x^2 - 8x - 32}{x - 5}$ 2) $\frac{x^4 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$ 3) $\frac{-4x^2 + 8x + 2}{2x + 1}$ 4) $\frac{x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2}$

Rép. 1) $(3x + 7) + \frac{3}{x - 5}$ 2) $(x^2 + 2) + \frac{2x}{x^2 + 1}$
 3) $(-2x + 5) + \frac{-3}{2x + 1}$ 4) $x + \frac{x + 1}{x^2}$

16. On donne une fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$. Au moyen d'une division euclidienne, mettre f sous la forme $Q + \frac{R}{D}$ et vérifier que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{R}{D} = 0$. Donner ensuite l'équation de l'asymptote oblique de f .

1) $\frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ 2) $\frac{2x^2 - 3x - 7}{x - 3}$ 3) $\frac{-x^3 + 5x^2 - 10}{x^2 - 2}$ 4) $\frac{3x^2 - 32}{3 - x}$

Rép. 1) $y = x - 1$ 2) $y = 2x + 3$ 3) $y = -x + 5$ 4) $y = -3x - 9$

17.—

- Déterminer les asymptotes de la fonction donnée f .
- Etudier le signe de la fonction $\delta(x)$ déterminant la position relative du graphe et de l'asymptote horizontale ou oblique.
- Dans un système d'axes Oxy , représenter les asymptotes de f , puis hachurer les zones du plan dans lesquelles le graphe de f ne passe en tous cas pas, en vertu du signe de δ .
- Esquisser un graphe plausible pour f .

1) $\frac{x^2 + 3x - 2}{x + 4}$ 2) $\frac{2x^2 + 3x - 7}{x^2 + x - 2}$ 3) $\frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 5}{2x^2 - 4x + 2}$ 4) $\frac{-2x^2 + 8x + 7}{x^2 - 4x - 5}$

Rép. 1) AV : $x = -4$ / AO : $y = x - 1$ / $\delta(x) = \frac{2}{x + 4}$
 zéros et pôles de δ : -4 / signe de δ : $- \parallel +$
 2) AV : $x = -2$; $x = 1$ / AH : $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{x - 3}{(x + 2)(x - 1)}$
 zéros et pôles de δ : -2 ; 1 ; 3 / signe de δ : $- \parallel + \parallel - 0 +$
 3) AV : $x = 1$ / AO : $y = \frac{1}{2}x - 1$ / $\delta(x) = \frac{x - 3}{2(x - 1)^2}$
 zéros et pôles de δ : 1 ; 3 / signe de δ : $- \parallel - 0 +$
 4) AV : $x = -1$; $x = 5$ / AH : $y = -2$ / $\delta(x) = \frac{-3}{(x - 5)(x + 1)}$
 zéros et pôles de δ : -1 ; 5 / signe de δ : $- \parallel + \parallel -$

FCR

18. Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes. Etudier la position du graphe relativement à l'asymptote horizontale ou oblique (signe de la fonction δ). Esquisser le graphe.

$$1) \frac{2x^2 - x}{x-1} \quad 2) \frac{x^3 - x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} \quad 3) \frac{-3x^2 + x + 33}{9 - x^2} \quad 4) \frac{-x^4 + 9x^3 - 25x^2 + 19x - 14}{x^3 - 6x^2 + 8x}$$

Rép. 1) AV : $x=1$ / AO : $y=2x+1$ / $\delta(x) = \frac{1}{x-1}$
zéros et pôles de δ : 1 / signe de δ : - || +

2) AV : $x=-2$; $x=2$ / AO : $y=x-1$ / $\delta(x) = \frac{2x}{x^2-4}$
zéros et pôles de δ : -2 ; 0 ; 2 / signe de δ : - || + 0 - || +

3) AV : $x=-3$; $x=3$ / AH : $y=3$ / $\delta(x) = \frac{x+6}{(3-x)(3+x)}$
zéros et pôles de δ : -6 ; -3 ; 3 / signe de δ : + 0 - || + || -

4) AV : $x=0$; $x=2$; $x=4$ / AO : $y=-x+3$ / $\delta(x) = \frac{(x+2)(x-7)}{x(x-2)(x-4)}$
zéros et pôles de δ : -2 ; 0 ; 2 ; 4 ; 7 / signe de δ : - 0 + || - || + || - 0 +

19. Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes. Etudier la position du graphe relativement à l'asymptote horizontale ou oblique (signe de la fonction δ). Esquisser le graphe.

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 3x} \quad 2) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4}$$

Rép. 1) AV : $x=0$; $x=3$ / AH : $y=1$ / $\delta(x) = \frac{-18}{x(x-3)}$
zéros et pôles de δ : 0 ; 3 / signe de δ : - || + || -

2) AV : $x=-2$; $x=2$ / AO : $y=x-3$ / $\delta(x) = \frac{4x-10}{x^2-4}$
zéros et pôles de δ : -2 ; 2 ; $\frac{5}{2}$ / signe de δ : - || + || - 0 +

20. Trouver deux polynômes $N(x)$ et $D(x)$ tels que la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ admette les asymptotes d'équations $x=-1$, $x=0$, $x=7$, $y=\frac{2}{7}$, et que 2 soit un zéro de f .

21. Construire une fonction rationnelle admettant les asymptotes $y=2x+5$, $x=2$, $x=3$, et dont le graphe passe par les points $A(1; 12)$ et $B(4; 21)$.

Rép. $f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - 11x + 38}{x^2 - 5x + 6}$

FCR

22. Soit $f(x) = \frac{-x^2 + bx - 7}{x + a}$. Déterminer a et b afin que les asymptotes de f soient $x = 3$ et $y = -x + 1$.

Rép. $a = -3$; $b = 4$

23. Montrer qu'une fonction polynomiale de degré ≥ 2 n'a aucune asymptote.

24. Dériver :

1) x^7

2) $3x^2$

3) $\frac{2}{5}x^9$

4) $\frac{5x^3}{3}$

5) $2x^3 - 5x^2 + 9$

6) $\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{5}x + 1$

7) $\frac{2x^5}{7} - \frac{3x^2}{5} + 2$

8) $(2x + 1)^5$

9) $(x^3 - 1)^7$

10) $(3x^2 + x)^3$

11) $(2x + 5x^4)^3$

12) $\frac{7x^2}{5} - \frac{3x}{7} + 1$

Rép. 1) $7x^6$ 2) $6x$ 3) $\frac{18}{5}x^8$ 4) $5x^2$ 5) $6x^2 - 10x$ 6) $\frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{5}$
7) $\frac{10}{7}x^4 - \frac{6}{5}x$ 8) $10(2x + 1)^4$ 9) $21x^2(x^3 - 1)^6$ 10) $3x^2(3x + 1)^2(6x + 1)$
11) $6x^2(2 + 5x^3)^2(1 + 10x^3)$ 12) $\frac{14}{5}x - \frac{3}{7}$

25. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a :

1) $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$; $a = 1$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$ 3) $f(x) = \frac{3x - 2}{5x + 1}$; $a = 0$

Rép. 1) $y = 4x - 3$ 2) $y = \frac{1}{4}x + 1$ 3) $y = 13x - 2$

26. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{5}$ et le point $A(-1; -3)$.

Déterminer les équations des tangentes passant par A à la parabole $y = f(x)$.

Rép. $y = \frac{6}{5}x - \frac{9}{5}$ et $y = -2x - 5$

FCR

27. Dériver :

- | | | |
|--------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 1) $(2x+1)^7$ | 2) $(-6x^2+x)^{15}$ | 3) $\frac{x^2+12x-15}{x+1}$ |
| 4) $\frac{1}{2x+1}$ | 5) $\frac{1}{x^4+9}$ | 6) $\frac{x^3}{x+1}$ |
| 7) $\frac{(x-1)^2}{x^3}$ | 8) $\frac{(x-3)^3}{(x^2-2)^4}$ | 9) $\frac{1}{(2x-3)^7}$ |

Rép.

- | | | | |
|---|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| 1) $14(2x+1)^6$ | 2) $15(-12x+1)(-6x^2+x)^{14}$ | 3) $\frac{x^2+2x+27}{(x+1)^2}$ | 4) $\frac{-2}{(2x+1)^2}$ |
| 5) $\frac{-4x^3}{(x^4+9)^2}$ | 6) $\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ | 7) $\frac{(x-1)(-x+3)}{x^4}$ | |
| 8) $\frac{(x-3)^2(-5x^2+24x-6)}{(x^2-2)^5}$ | 9) $\frac{-14}{(2x-3)^8}$ | | |

28. Etudier la *croissance* de f et calculer les coordonnées des "points à tangente horizontale" (= maximums, minimums, paliers).

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 - 6x + 8$ | 2. $f(x) = \frac{-2x^2 + x - 2}{x}$ |
| 3. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ | 4. $f(x) = \frac{6x}{1+x^2}$ |

Rép. 1. $f'(x) = 2x - 6$ / min : (3 ; -1)

2. $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x+1)}{x^2}$ / min : (-1 ; 5) / max : (1 ; -3)

3. $f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}$ / palier : (-1 ; 0) / min : $(2 ; \frac{27}{4})$

4. $f'(x) = \frac{6(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ / min : (-1 ; -3) / max : (1 ; 3)

FCR

29. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

2. $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2$

3. $f(x) = \frac{1}{16}(3x^5 - 15x^4 + 20x^3)$

4. $f(x) = \frac{x^3 + 2}{2x}$

Rép. 1. $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+2)^2$ / $f'(x) = -\frac{3}{2}x(x+2)$ / min : $(-2; 0)$ / max : $(0; 2)$

2. zéros de f : $\pm\sqrt{2}$; ± 2 / $f'(x) = x(3-x^2)$ / max : $(\pm\sqrt{3}; \frac{1}{4})$ / min : $(0; -2)$

3. $f'(x) = \frac{15}{16}x^2(x-2)^2$ / paliers : $(0; 0), (2; 1)$

4. zéro de f : $-\sqrt[3]{2} \cong -1,26$ / $f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$ / min : $(1; \frac{3}{2})$

30. On donne une fonction f et un nombre a . Etudier la croissance de f et déterminer l'équation de la tangente au graphe au point d'abscisse a . Dessiner le graphe avec la tangente trouvée.

1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; $a = 5$

2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$; $a = 3$

3) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$; $a = 1$

Rép. 1) $y = 4x - 17$ 2) $y = 3x - 7$ 3) $y = -x + 1$

31. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{10}{(x-5)^2}$

2. $f(x) = \frac{3x-16}{x-5}$

Rép. 1. $D = \mathbb{R} - \{5\}$ / asymptotes : $x = 5$; $y = 0$ / $\delta(x) = f(x)$ / $f'(x) = \frac{-20}{(x-5)^3}$

2. $D = \mathbb{R} - \{5\}$ / zéro de f : $\frac{16}{3}$ / asymptotes : $x = 5$; $y = 3$ / $\delta(x) = \frac{-1}{x-5}$
 $f'(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$

32.—

a) Trouver une fonction rationnelle f telle que :

- f admet les asymptotes d'équations $y = 2x + 1$, $x = 2$, $x = -3$;
- le graphe de f passe par $A(-2; 0)$ et coupe l'asymptote oblique à l'abscisse 1.

b) Etudier la position relative du graphe de f et de l'asymptote oblique ; esquisser un graphe plausible pour f .

FCR

33. Etudier les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

2) $f(x) = \frac{-2x^2 + x - 2}{x}$

3) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x+1)}$

4) $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 31}{x-2}$

Rép. 1. $D = \mathbb{R}^* /$ asymptotes : $x=0$; $y=x+1$ / $\delta(x) = \frac{1}{x}$ / $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$
max : $(-1 ; -1)$ / min : $(1 ; 3)$

2. $D = \mathbb{R}^* /$ asymptotes : $x=0$; $y=-2x+1$ / $\delta(x) = \frac{-2}{x}$
 $f'(x) = \frac{-2(x^2-1)}{x^2}$ / min : $(-1 ; 5)$ / max : $(1 ; -3)$

3. $D = \mathbb{R} - \{-1\} /$ asymptotes : $x=-1$; $y=\frac{1}{2}x+1$ / $\delta(x) = \frac{2}{x+1}$
 $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)^2}$ / max : $(-3 ; -\frac{3}{2})$ / min : $(1 ; \frac{5}{2})$

4. $D = \mathbb{R} - \{2\} /$ asymptotes : $x=2$; $y=-x+3$ / $\delta(x) = \frac{-25}{x-2}$
 $f'(x) = \frac{-(x-7)(x+3)}{(x-2)^2}$ / min : $(-3 ; 11)$ / max : $(7 ; -9)$

34. Etudier la fonction f donnée par $f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1}$.

Rép. Zéros de f : 0 ; $\frac{1}{2}$ / AV : $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ / AO : $y = x - \frac{1}{2}$ / $\delta(x) = \frac{2x-1}{2(2x^2-1)}$

$f'(x) = \frac{4x^4 - 6x^2 + 2x}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x-1)(2x^2 + 2x - 1)}{(2x^2 - 1)^2}$ / Zéros de f' : 0 ; 1 ; $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f(x)$	$-$	$ $	$+$	$+$

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\delta(x)$	$-$	$ $	$+$

x	x_1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	x_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	M

où $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \approx -1,37$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \approx 0,37$

FCR

35. Etudier les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$

2) $f(x) = \frac{x^2 - x + 5}{x}$

3) $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$

4) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x}$

Rép. 1) $D = \mathbb{R} - \{1\}$ / zéros de f : -2 ; 0 / asymptotes: $x = 1$; $y = x + 3$ / $\delta(x) = \frac{3}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} \quad / \quad \max: (1 - \sqrt{3}; 0,536) \quad / \quad \min: (1 + \sqrt{3}; 7,464)$$

2) $D = \mathbb{R}^*$ / zéros de f : — / asymptotes: $x = 0$; $y = x - 1$ / $\delta(x) = \frac{5}{x}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2} \quad / \quad \max: (-\sqrt{5}; -5,47) \quad / \quad \min: (\sqrt{5}; 3,47)$$

3) $D = \mathbb{R}$ / zéros de f : 1 ; $\frac{5}{2}$ / asymptote: $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{3(x-3)}{x^2 - 5x + 7}$

$$f'(x) = \frac{-3(x-2)(x-4)}{(x^2 - 5x + 7)^2} \quad / \quad \min: (2; -1) \quad / \quad \max: (4; 3)$$

4) $D = \mathbb{R} - \{-2; 0\}$ / zéro de f : 1 / asymptotes: $x = -2$; $x = 0$; $y = 1$

$$\delta(x) = \frac{-4x+1}{x(x+2)} \quad / \quad f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2(x+2)^2} \quad / \quad \max: (-\frac{1}{2}; -3) \quad / \quad \min: (1; 0)$$

FCR

36. Encore des fonctions à étudier :

$$1) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^3}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{(x+3)^3}{2x(x-5)}$$

Rép. 1) $D = \mathbb{R} - \{-2; 3\}$ / zéros de f : — / asymptotes : $x = -2$; $x = 3$; $y = 0$

$$\delta(x) = f(x) \quad / \quad f'(x) = \frac{-2x+1}{(x+2)^2(x-3)^2} \quad / \quad \max : \left(\frac{1}{2}; -\frac{4}{25}\right)$$

2) $D = \mathbb{R}^*$ / zéro de f : 1 / asymptotes : $x = 0$; $y = 1$ / $\delta(x) = \frac{x-2}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{-2(x-3)}{x^4} \quad / \quad \max : \left(3; \frac{28}{27}\right)$$

3) $D = \mathbb{R}$ / zéro de f : $\sqrt[3]{-2}$ / AO : $y = x$ / $\delta(x) = \frac{-x+2}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2} \quad / \quad \max : (0; 2) \quad / \quad \min : \left(1; \frac{3}{2}\right)$$

4) $D = \mathbb{R} - \{0; 5\}$ / zéro de f : -3 / pôles de f : 0 ; 5 / AV : $x = 0$; $x = 5$

$$\text{AO : } y = \frac{1}{2}x + 7 \quad / \quad \delta(x) = \frac{97x+27}{2x(x-5)} \quad / \quad f'(x) = \frac{(x+3)^2(x-1)(x-15)}{2x^2(x-5)^2}$$

palier : $(-3; 0)$ / $\max : (1; -8)$ / $\min : (15; 19,44)$

LI

1. Déterminer "expérimentalement" (cf. exemple) les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4\sqrt{x} - 8}{x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{3 - \sqrt{2x - 1}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

Exemple

Soit à trouver $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, avec $f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{x - 2}$. A l'aide d'une calculatrice, on établit :

x	$f(x)$
1,9	5,7
1,99	5,97
1,999	5,997
1,9999	5,9997

x	$f(x)$
2,1	6,3
2,01	6,03
2,001	6,003
2,0001	6,0003

D'où : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{x - 2} = 6$.

Rép. a) 1 b) -3 c) -2 d) -1 e) -3 f) 0

LI

2. Calculer :

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x + 2}{x + 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x}{x + 2}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$$

$$10. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - 2h^2 + h}{h}$$

Rép.

$$\begin{array}{llllll} 1. & -2 & 2. & 1 & 3. & 2 \\ 6. & 0 & 7. & 0 & 8. & \frac{3}{2} \\ 4. & 4 & 5. & 0 & 9. & 6 \\ 10. & 1 \end{array}$$

3. Diviser N par D :

$$1) \quad N = x^3 + 3x^2 + 4x + 7$$

$$D = x + 3$$

$$2) \quad N = 3x^2 - 4x + 2$$

$$D = x - 2$$

$$3) \quad N = -x^2 + 2$$

$$D = -x + 1$$

$$4) \quad N = -4x^3 - 2x^2 + 8x + 2$$

$$D = -2x^2 + 3$$

$$\text{Rép. } 1) \quad Q = x^2 + 4 ; \quad R = -5$$

$$2) \quad Q = 3x + 2 ; \quad R = 6$$

$$3) \quad Q = x + 1 ; \quad R = 1$$

$$4) \quad Q = 2x + 1 ; \quad R = 2x - 1$$

4. Vérifier que le nombre a est un zéro du polynôme P , puis factoriser P au moyen d'une division euclidienne par $(x - a)$.

$$1) \quad a = 4 ; \quad P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$$

$$2) \quad a = 5 ; \quad P(x) = x^3 + 3x^2 - 33x - 35$$

$$3) \quad a = -2 ; \quad P(x) = x^3 + 8x^2 + 5x - 14$$

$$4) \quad a = -1 ; \quad P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$$

$$\text{Rép. } 1) \quad (x - 4)(x^2 + x + 1)$$

$$2) \quad (x - 5)(x + 1)(x + 7)$$

$$3) \quad (x + 2)(x - 1)(x + 7)$$

$$4) \quad (x + 1)(x - 3)(2x + 1)$$

LI

5. Calculer :

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 3x^2 - 3x - 4}{(x-4)(x+1)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 + 3x^2 - 33x - 35}{x^2 - 5x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 8x^2 + 5x - 14}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$$

$$5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h}{2h^3 + 1}$$

$$6) \lim_{h \rightarrow 1} \frac{h^3 - 1}{h - 1}$$

Rép. 1) $\frac{21}{5}$ 2) $\frac{72}{5}$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{2}{3}$ 5) 0 6) 3

6. Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{x + 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)(x+5)}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x - 21}{(x-3)(x+1)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 1}{2x + 2}$$

Rép. a) -5 b) $\frac{1}{2}$ c) -1 d) $\frac{11}{3}$ e) $\frac{13}{4}$ f) $\frac{7}{2}$

7. Calculer :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x+123}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{x^2}$$

$$g) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x}$$

$$h) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7}{(1-x)^2}$$

$$j) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{7}{1-x}$$

$$k) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{7}{1-x}$$

$$l) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-8}{x^3}$$

Rép. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) $+\infty$ f) $-\infty$ g) $-\infty$ h) $+\infty$ i) $+\infty$
j) $+\infty$ k) $-\infty$ l) $+\infty$

LI

8. Déterminer "expérimentalement" les limites suivantes :

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x}$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x}$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{x-3}$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x-3}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-10}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-10}$

i) $\lim_{\substack{x \rightarrow 10 \\ x > 10}} \frac{1}{x-10}$

Exemple. Soit à trouver $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$, avec $f(x) = \frac{1}{x-1}$. A l'aide d'une calculatrice, on établit :

$$f(0,9) = -10 ; f(0,99) = -100 ; f(0,999) = -1000 ; f(0,9999) = -10000 ; \dots$$

D'où : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$.

Rép. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) 2 g) 0 h) 0 i) $+\infty$

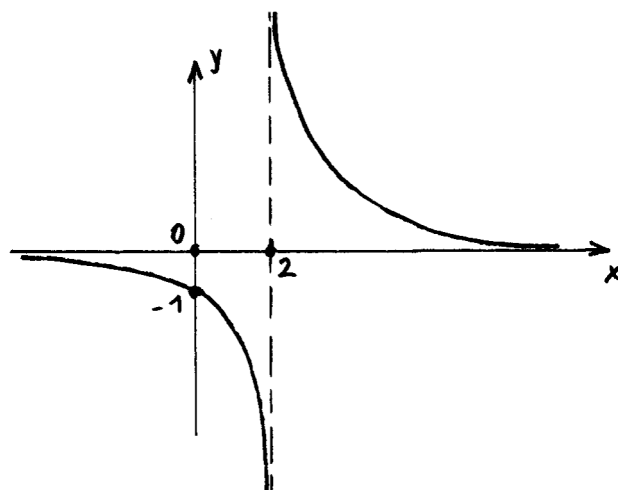
9. Calculer: 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 - \frac{1}{x^2} \right)$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(7 - \frac{1}{x^2} \right)$ 3) $\lim_{h \rightarrow 2} \frac{h^2 - 4}{h^2 - h - 2}$

Rép. 7; $-\infty$; $\frac{4}{3}$

LI

10. Une fonction f est donnée par son graphe. Déterminer les limites indiquées.

1)



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

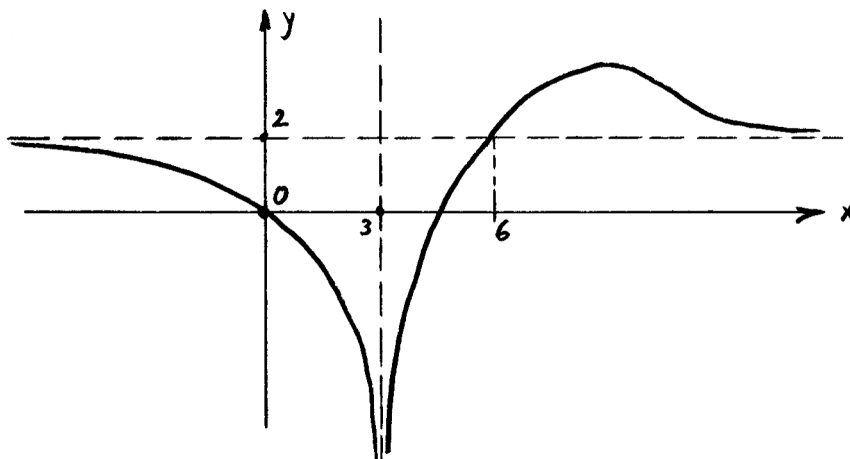
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x)$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2)



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x)$

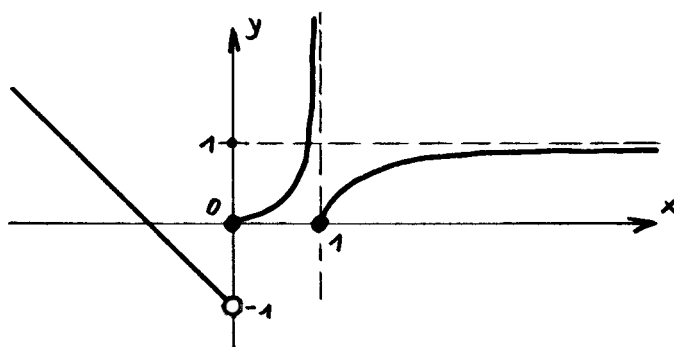
c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

3)



a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$

f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

Rép. 1. a) 0 b) 0 c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) -1
 2. a) 2 b) $-\infty$ c) 0 d) $-\infty$ e) 2 f) 2
 3. a) $+\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) 1 e) -1 f) 0

LI

11. Calculer les limites suivantes :

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 - 5x + 1}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 + x}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x + 2}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 1}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2 + 3x}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 + 5}$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

Rép. 1) $\frac{2}{3}$ 2) 0 3) $-\infty$ 4) $+\infty$ 5) 1 6) $\frac{1}{2}$ 7) $\frac{1}{2}$ 8) 0

12. Dessiner un graphe plausible pour une fonction f telle que :

$$a) \quad f(0) = 2 ; \quad f(4) = -2 ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$$

$$b) \quad f(0) = 3 ; \quad f(5) = 3 ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$$

$$c) \quad f(0) = 3 ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -3$$

13. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 2x - 5}{4x^2 - x} - \frac{3}{x-1} \right).$

Rép. $\frac{1}{2}$

14. Calculer :

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3+1}{2x^2-10x-30}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x^2-2x-3}$$

$$8. \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{-3}{x+1}$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2}{x^2-9}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-2x^2+10x-9}$$

$$10. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-2x+9}{2x^2+1}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+3x^3}{x^2-x^6-10x^4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{2x-9}$$

$$12. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2+3h}{h}$$

Rep.

$$1. \frac{1}{4} \quad 2. 0 \quad 3. -\infty \quad 4. 1/9 \quad 5. 3/2 \quad 6. -7/5$$

$$7. -\infty \quad 8. -\infty \quad 9. 3/2 \quad 10. +\infty \quad 11. 0 \quad 12. 3$$

15. Calculer :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-6x}{(x-2)^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-1}{(x+1)^4}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-2|}{x-2}$$

Rep. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $-\infty$ e) 3 f) -1

LI

16. Calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ lorsque :

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $f(x) = x^2$; $a = 3$ | 2) $f(x) = 7x^2$; $a = 1$ |
| 3) $f(x) = x^3$; $a = 2$ | 4) $f(x) = x^4$; $a = 0$ |

Rép. 1) 6 2) 14 3) 12 4) 0

17. Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque :

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| 1) $f(x) = 3x^2$; $a = 2$ | 2) $f(x) = x + 1$; $a = -2$ |
| 3) $f(x) = 2x^3$; $a = 1$ | 4) $f(x) = (3 - x)^2$; $a = 1$ |

Rép. 1) 12 2) 1 3) 6 4) -4

18. Soit f une fonction. Déterminer la pente de la tangente au graphe de f , au point d'abscisse a .

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 1) $f(x) = (x+1)^2$; $a = 3$ | 2) $f(x) = -2x + 1$; $a = 10$ |
| 3) $f(x) = -x^2$; $a = 2$ | 4) $f(x) = (x-1)^3$; $a = 3$ |

Rép. 1) 8 2) -2 3) -4 4) 12

19. On donne une fonction f et un nombre a . Déterminer la pente du graphe de f à l'abscisse a .

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; $a = 5$ | 2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$; $a = 3$ |
| 3) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$; $a = 1$ | 4) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $a = -3$ |

Rép. 1) 4 2) 3 3) -1 4) $-\frac{1}{4}$

20. Calculer :

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{1 - 5x^3}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x^3}$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^3 - 20x^2)$ | 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3 - \frac{1}{x}}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x - 6}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + 3x^5}{2 - 2x^7 + 5x}$ |

Rép. 1) $-\frac{2}{5}$ 2) $+\infty$ 3) $+\infty$ 4) $-\infty$ 5) 4 6) 0

LI

21. Dessiner un graphe plausible pour une fonction f telle que :

$$1) \quad f(0) = -1 ; \quad f(3) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$$

$$2) \quad f(-3) = 2 ; \quad f(-2) = -3 ; \quad f(0) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$$

22. Calculer la pente du graphe de f à l'abscisse a :

$$1) \quad f(x) = 1 - 3x^2 ; \quad a = 1$$

$$2) \quad f(x) = x^2 - 5x + 3 ; \quad a = -2$$

Rép. 1) -6 2) -9

23. Calculer :

$$1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{-5}{(x-3)(x-4)}$$

$$2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{2x+3}{(x+1)(x-7)}$$

$$3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1-x}{x^2-5x+6}$$

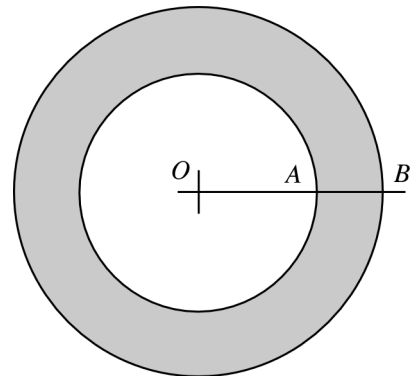
$$4) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1/2 \\ x < -1/2}} \frac{x+5}{6x^2+x-1}$$

Rép. 1) $-\infty$ 2) $+\infty$ 3) $+\infty$ 4) $+\infty$

24. On considère un "anneau" variable de centre fixe O , tel que $OA = x$ et $AB = \frac{1}{x}$ (cf. figure).

Soit $S(x)$ l'aire de cet anneau (= aire grisée).

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.



Rép. $+\infty$; 2π

LI

25. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15}$

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{9 - x}{x^2 - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2 - 2x + 2}$

4) $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{4 - x}{2 + x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, où $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

6) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{1 - x}{3x^2 + 2x - 1}$

7) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{3x^2 - 13x + 14}$

Rép. 1) $\frac{3}{4}$ 2) $-\infty$ 3) -1 4) $-\infty$ 5) -1 6) $+\infty$ 7) $-\infty$

LI**30.** Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{x - 7}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x - 1}$

5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3}$

6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{\sqrt{x + 1} - 2}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x + 6}}{x + \sqrt{2 - x}}$

Rép. 1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ 4) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 5) 3 6) $-\frac{2}{3}$ 7) 2 8) $\frac{5}{3}$

31. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5x + 3\sqrt{x^2 + 1} \right)$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5x + 3\sqrt{x^2 + 1} \right)$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

Rép. 1) 1 2) -1 3) $+\infty$ 4) $-\infty$ 5) 0 6) $-\infty$ 7) $\frac{1}{2}$ 8) $-\frac{1}{2}$

32. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4} \right)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x > 8}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{8} + \sqrt{x - 8}}{\sqrt{x^2 - 64}}$

Rép. 1) 1 2) -1 3) 0 4) -2 5) $\frac{1}{2}$ 6) $\frac{1}{4}$