

ANALYSE 2^{MR}

THÉORIE

$$y = f(g(x))$$

$\Downarrow$

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

TABLE DES MATIÈRES

Limites d'une fonction	10
Continuité	11
limites de $1/x$ en 0 et $\pm\infty$	12
Limite d'une fonction rationnelle.....	13
Limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$	14
Limite de fonctions irrationnelles	15
Pente locale d'un graphe	16
Asymptotes verticales et horizontales	20
Position du graphe relativement à l'asymptote horizontale	21
$N/D = Q + R/D$	22
Asymptotes obliques	23
Position du graphe relativement à l'asymptote oblique	24
Critère du degré.....	25
Détection d'une asymptote affine	26
Dérivée d'une fonction.....	30
Premiers théorèmes sur les dérivées	31
Dérivée de x^n	32
Dérivée d'un produit et d'un quotient.....	33
Dérivée de g^n	34
Dérivée d'une fonction composée.....	35
Que conclure du signe de la dérivée ?.....	36
Etude de la croissance d'une fonction	37
Dérivée seconde et courbure	38
Vitesse	39
Parité d'une fonction	50
Plans d'étude de fonctions	51

§ 10. LIMITES D'UNE FONCTION

Définition

Soit f une fonction et $a, b \in \mathbb{R}$.

Si le nombre $f(x)$ se rapproche toujours plus de b lorsque x approche a ($x \neq a$), on dira que " $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a " ou que " b est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a ", et l'on notera :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_a f = b$$

Exemple

Examinons le comportement de $f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{2x - 4}$ lorsque x tend vers 2 :

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	2,85	2,985	2,9985	2,99985		3,00015	3,0015	3,015	3,15

Il semble donc que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{2x - 4} = 3$ (bien que f ne soit pas définie en $x = 2$).

Quelques théorèmes

Si les fonctions f et g admettent une limite en a , alors :

- $\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g$
- $\lim_a (c f) = c \lim_a f$ ($c = \text{constante}$)
- $\lim_a (f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g$
- $\lim_a \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$ (si $\lim_a g \neq 0$)

De plus, si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$, pour autant que $g(x)$ soit différent de b sur un intervalle ouvert contenant a , sauf éventuellement en a .

§ 11. CONTINUITÉ

Définitions

Une fonction f est **continue en a** si elle est définie sur un intervalle ouvert contenant a et si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert si elle est continue en tout point cet intervalle.

Une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si elle est continue en tout point de l'intervalle $]a, b[$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = f(b)$.

Une fonction est continue sur une réunion d'intervalles si elle est continue sur chaque intervalle.

Continuité de fonctions élémentaires

Les fonctions f données ci-dessous sont continues sur leur ensemble de définition.

$f(x) = c$	$f(x) = x$
$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f(x) = x $	$f(x) = \sqrt{x}$

Opération sur les fonctions continues

Soit f et g des fonctions continues en a et soit c un nombre réel. Alors :

$f + g$ est continue en a
$f - g$ est continue en a
cf est continue en a
fg est continue en a
f/g est continue en a si $g(a) \neq 0$

Si g est une fonction continue en a et f une fonction continue en $g(a)$, alors la fonction $f \circ g: x \mapsto f(g(x))$ est continue en a .

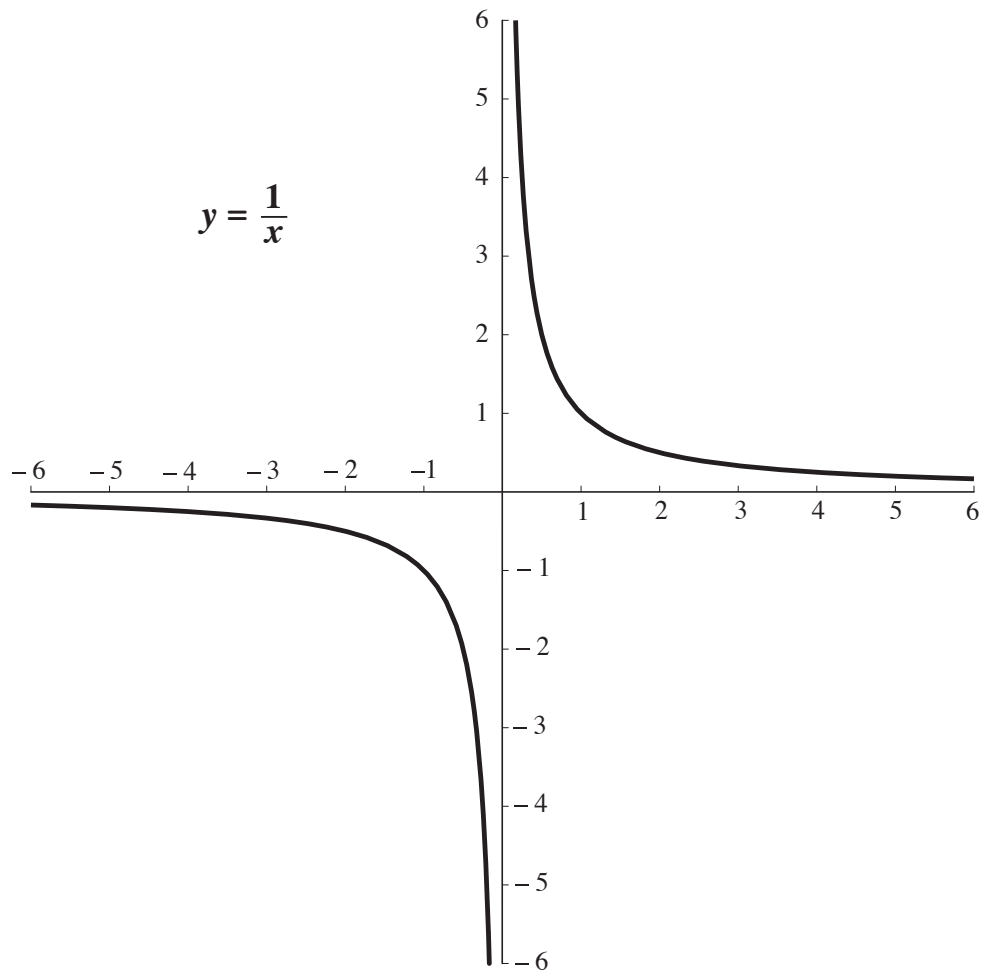
Remarques

- Le graphe d'une fonction continue sur un intervalle peut être tracé sans lever le crayon.
- Les fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques et racine n -ièmes sont continues sur leur ensemble de définition.

§ 12. LIMITES DE $\frac{1}{x}$ EN 0 ET $\pm \infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{-\infty} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+\infty} \right] = 0$$

§ 13. LIMITE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

Soient $N(x)$, $D(x)$ deux polynômes et $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la limite de $\frac{N(x)}{D(x)}$ lorsque x tend vers a .

1. Si a n'est pas un zéro de D

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(a)}{D(a)}. \text{ Exemple : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{3 \cdot 2+1}{2 \cdot 2-1} = \frac{7}{3}.$$

2. Si a est un zéro de N et de D

Dans ce cas, la fraction doit être simplifiée.

$$\text{Exemple : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3.$$

On a affaire ici une limite de *forme indéterminée* du type $\frac{0}{0}$.

3. Si a est un zéro de D , mais pas de N

La limite est alors du type $\frac{n}{0}$, $n \neq 0$. Elle vaut, si elle existe, $-\infty$ ou $+\infty$.

$$\text{Exemples : } \bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{(x-3)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

Le 0^+ signifie que le dénominateur tend vers 0 tout en restant positif au voisinage de $x = 3$. Définition analogue pour 0^- .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{-(x-3)^2} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2-x}{(x-3)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Parfois, la limite n'existe pas :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \begin{cases} \text{Si } x < 3 & \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty \quad (\text{"limite à gauche"}) \\ \text{Si } x > 3 & \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \quad (\text{"limite à droite"}) \end{cases}$$

La limite à gauche n'étant pas égale à la limite à droite, la limite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ *n'existe pas*.

Néanmoins, on peut écrire : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

§ 14. LIMITE D'UNE FONCTION RATIONNELLE EN $\pm \infty$

Théorème

Soient $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes.

La limite de la fonction rationnelle $\frac{N(x)}{D(x)}$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré de $N(x)$ et $D(x)$.

Exemples

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{-3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{-3x^2} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

Preuve du théorème

Prenons pour fixer les idées $N(x) = 7x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ et $D(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

On peut écrire :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{7x^3 \cdot \frac{N(x)}{7x^3}}{3x^2 \cdot \frac{D(x)}{3x^2}} = \frac{7x^3}{3x^2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{7x} - \frac{2}{7x^2} + \frac{1}{7x^3}}{1 - \frac{2}{3x} + \frac{5}{3x^2}}$$

Dans la dernière expression, les termes $\left(1 + \frac{3}{7x} - \dots\right)$ et $\left(1 - \frac{2}{3x} + \dots\right)$ tendent vers 1 lorsque x tend vers $\pm \infty$. D'où :

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{7x^3}{3x^2}$$

Corollaire

La limite d'un polynôme $P(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

"Un polynôme se comporte en $\pm \infty$ comme son terme de plus haut degré"

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9x^3 - 361x^2 - x - 100) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 9x^3 = -\infty$.

§ 15. LIMITES DE FONCTIONS IRRATIONNELLES

Deux exemples

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Commentaire

On a multiplié les deux termes de la fraction initiale par $\sqrt{x} + 2$, et appliqué la formule $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ pour réduire le numérateur. $\sqrt{x} + 2$ est l'expression *conjuguée* de $\sqrt{x} - 2$.

De manière générale, les expressions $A - B$ et $A + B$ sont dites *conjuguées* l'une de l'autre.

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 3} \right) = [\infty - \infty] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 3})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 3})}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x) - (x^2 + 3)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} =$$

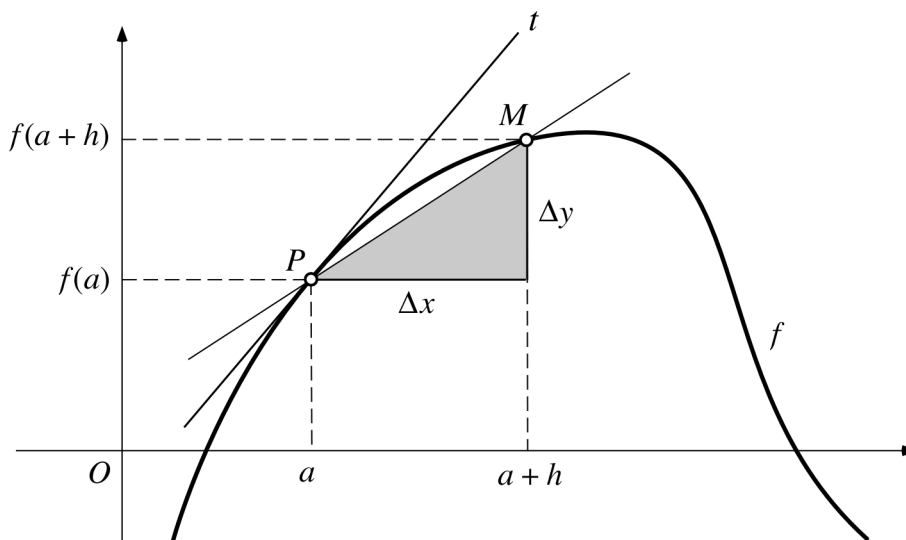
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{- \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} = -\frac{1}{2}.$$

(*) On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

§ 16. PENTE LOCALE D'UN GRAPHE

Soient f une fonction, $P(a, f(a))$ un point du graphe de f et $M(a+h, f(a+h))$ un autre point du graphe de f voisin de P .



Le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est égal à la pente de la droite PM $\left(= \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$.

Faisons maintenant tendre h vers 0. Le point M se rapproche de P et la droite PM finit par se confondre avec la tangente t en P au graphe de f .

Ainsi, lorsque la limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, elle est égale à la pente de la tangente en $P(a, f(a))$, ou *pente du graphe de f à l'abscisse a* .

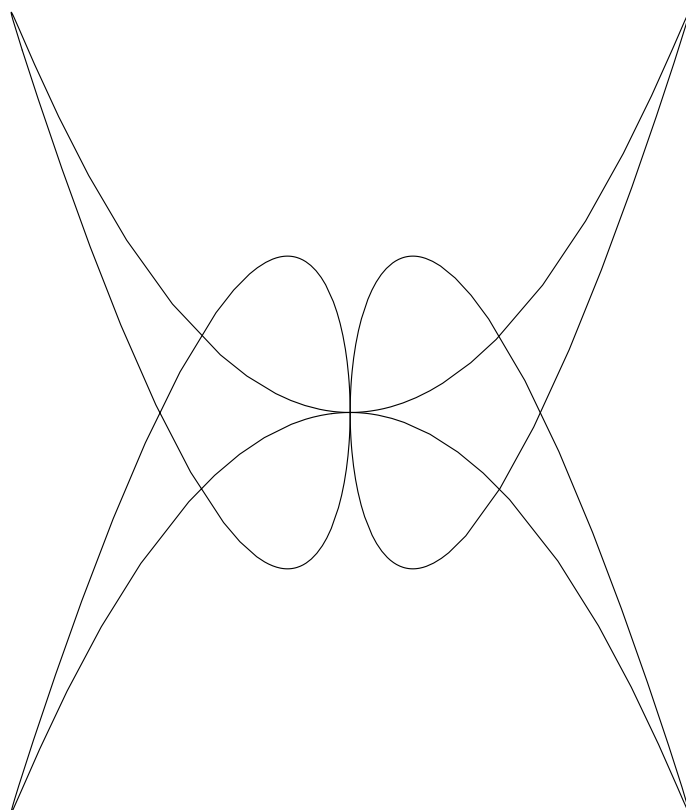
Pente du graphe de f à l'abscisse a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque. La limite ci-dessus s'écrit aussi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Exemple. Pente du graphe de $f(x) = x^3$ à l'abscisse $a = 1$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+3h+3h^2+h^3)-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h+3h^2+h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3+3h+h^2) = 3.$$



$$\begin{cases} x = 2 \cos t - 2 \cos(3t) \\ y = 2 \sin t - 2 \sin(5t) \end{cases}$$

§ 20. ASYMPTOTES VERTICALES ET HORIZONTALES

1. Introduction

Soit par exemple $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$.

Cette fonction n'est pas définie en $x = 4$. Que se passe-t-il au voisinage de $x = 4$?

Pour répondre à cette question, calculons les limites de $f(x)$ quand x approche 4 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{x+3}{x-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{x+3}{x-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

Graphiquement, cela signifie que lorsque x tend vers 4 par la gauche ($x < 4$), le graphe de f plonge vertigineusement, puisque $f(x)$ tend vers $-\infty$ (cf. figure).

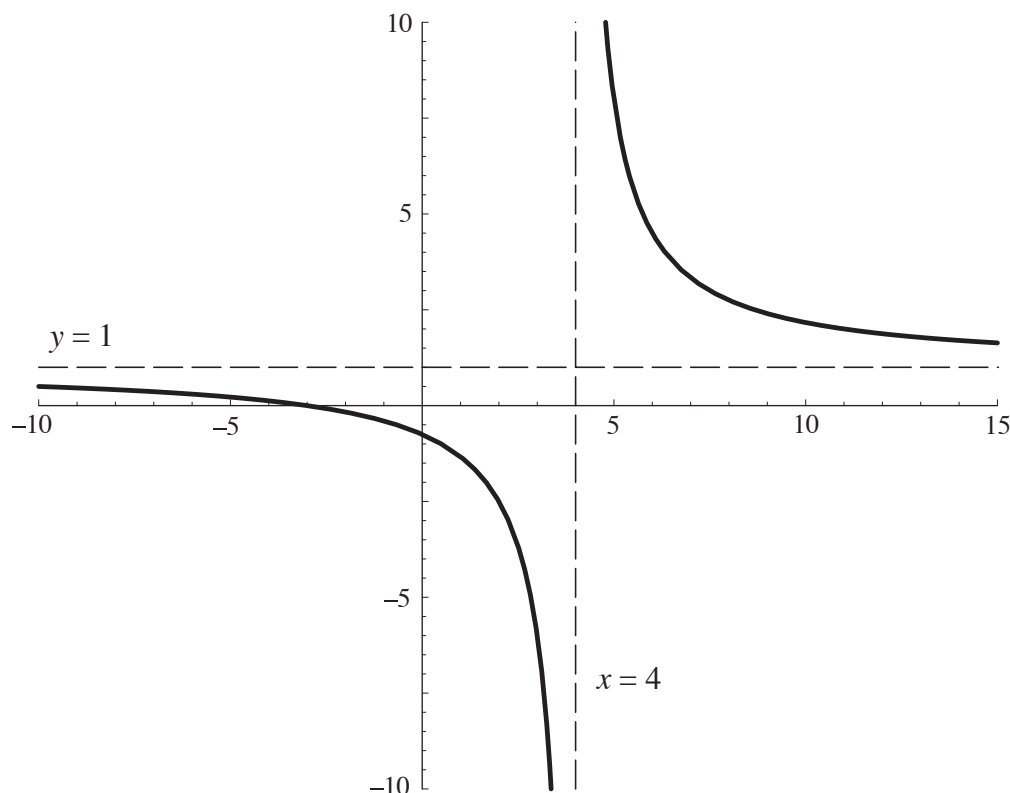
Lorsque x tend vers 4 par la droite ($x > 4$), le graphe de f s'envole infiniment, puisque $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Dans une telle situation, on dit que la droite d'équation $x = 4$ est une *asymptote verticale* de f .

Examinons maintenant le comportement de f quand x tend vers $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Ainsi, lorsque x devient très grand (en valeur absolue), le graphe de f se confond pratiquement avec la droite horizontale d'équation $y = 1$. On appelle alors cette droite une *asymptote horizontale* de la fonction f .



2. Définition des asymptotes verticales

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction.

La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale de f si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm \infty$$

Si de plus $f(x)$ est une fraction rationnelle $\frac{N(x)}{D(x)}$ **irréductible**, on a le critère suivant :

$$\left(\begin{array}{l} \text{La droite d'équation } x = a \\ \text{est asymptote verticale de } f \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} a \text{ est un zéro du} \\ \text{dénominateur } D(x) \end{array} \right)$$

Exemple

Les asymptotes verticales de $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$ sont les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

3. Définition des asymptotes horizontales

Soit $h \in \mathbb{R}$ et f une fonction.

La droite d'équation $y = h$ est asymptote horizontale à droite de f si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = h$$

De même à gauche ($x \rightarrow -\infty$).

Exemple

$f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$. D'où : la droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale de f (à droite et à gauche).

§ 21. POSITION DU GRAPHE RELATIVEMENT À L'ASYMPTOTE HORIZONTALE

Soit f une fonction admettant la droite d'équation $y = h$ comme asymptote horizontale.

Définissons la fonction δ ("delta") par :

$$\delta(x) = f(x) - h$$

$\delta(x)$ mesure la *différence d'altitude* entre le graphe de f et son asymptote horizontale.

Si $\delta(x) > 0$, le graphe est **au-dessus** de l'asymptote à l'abscisse x

Si $\delta(x) = 0$, le graphe et l'asymptote ont un **point commun** à l'abscisse x

Si $\delta(x) < 0$, le graphe est **au-dessous** de l'asymptote à l'abscisse x

Le signe de δ va nous permettre d'esquisser rapidement le graphe de f , au moyen d'un hachurage préalable des régions du plan qui, vu le signe de δ , ne peuvent abriter des points du graphe de f .

Exemple

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-5}.$$

Asymptote verticale : $x = 5$.

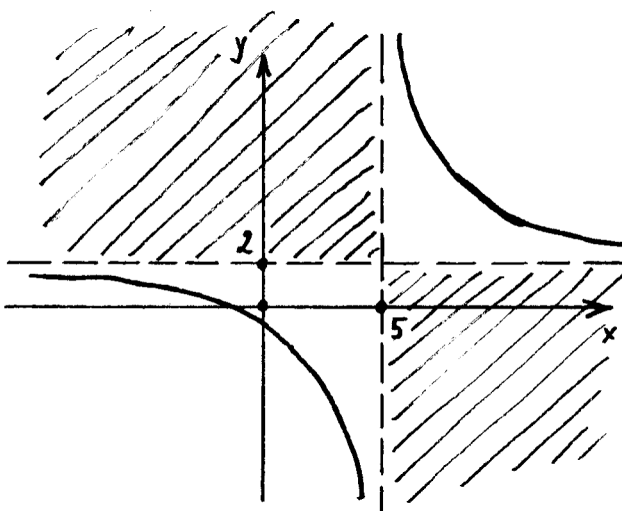
Asymptote horizontale : $y = 2$.

$$\delta(x) = \frac{2x+3}{x-5} - 2 = \dots = \frac{13}{x-5}.$$

Signe de δ :

x	5	
$\delta(x)$	-	+

On en conclut que le graphe de f doit se situer hors de la région hachurée ci-contre ; on peut ainsi tracer un graphe plausible.



§ 22. $N/D = Q + R/D$

Soit $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes, avec $D \neq 0$. La division euclidienne de N par D nous donne deux autres polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$N = DQ + R \quad \text{et} \quad \text{degré}(R) < \text{degré}(D)$$

En divisant la relation $N = DQ + R$ par D on arrive à :

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

Toute fraction rationnelle (N/D) peut donc s'exprimer comme somme d'un polynôme (Q) et d'une fraction rationnelle (R/D) dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.

Exemple

Considérons $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 12x + 4}{x^2 - 3x + 1}$.

La division du numérateur $2x^3 - x^2 - 12x + 4$ par le dénominateur $x^2 - 3x + 1$ fournit le quotient $Q(x) = 2x + 5$ et le reste $R(x) = x - 1$. Ainsi :

$$f(x) = (2x + 5) + \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 1}$$

Remarque

On observe que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{R(x)}{D(x)} = 0$, puisque le degré de R est inférieur à celui de D . La fraction $\frac{N}{D}$ se comporte donc comme le quotient Q lorsque x tend vers $\pm\infty$.

§ 23. ASYMPTOTES OBLIQUES

Définition

La droite d'équation $y = mx + h$ ($m \neq 0$) est asymptote oblique à droite d'une fonction f si

$$f(x) = (mx + h) + \delta(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0.$$

De même à gauche ($x \rightarrow -\infty$).

Dans un tel cas, $\delta(x)$ est pratiquement nul quand x est "proche" de $+\infty$ (resp. $-\infty$), et l'on a

$$f(x) \cong mx + h$$

La courbe représentative de f s'approche donc de la droite $y = mx + h$ sur le côté droit du graphique (resp. sur le côté gauche).

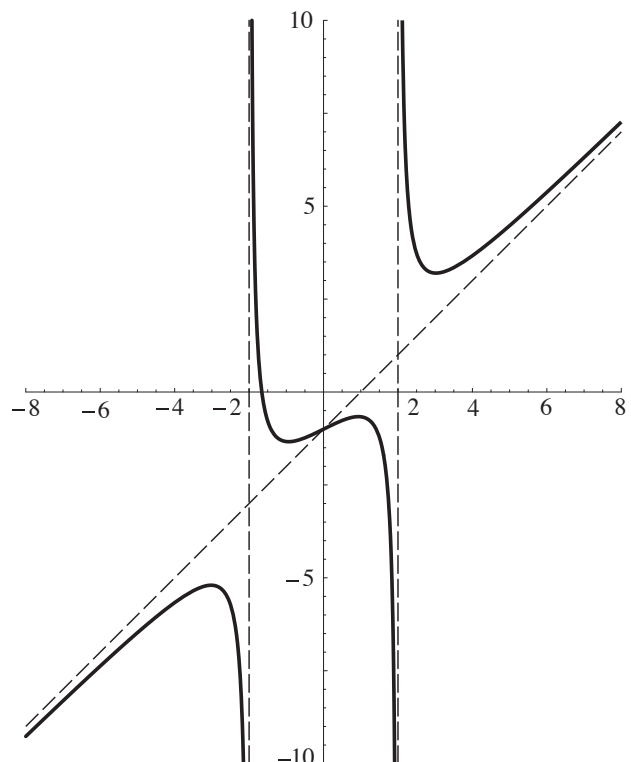
Exemple

Soit $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$.

Au moyen d'une division euclidienne, on obtient :

$$f(x) = (x - 1) + \frac{2x}{x^2 - 4}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 4} = 0$, la droite $y = x - 1$ est asymptote oblique de f (à droite et à gauche).



§ 24. POSITION DU GRAPHE RELATIVEMENT À L'ASYMPTOTE OBLIQUE

Soit f une fonction admettant la droite $y = mx + h$ comme asymptote.
Définissons la fonction δ ("delta") par :

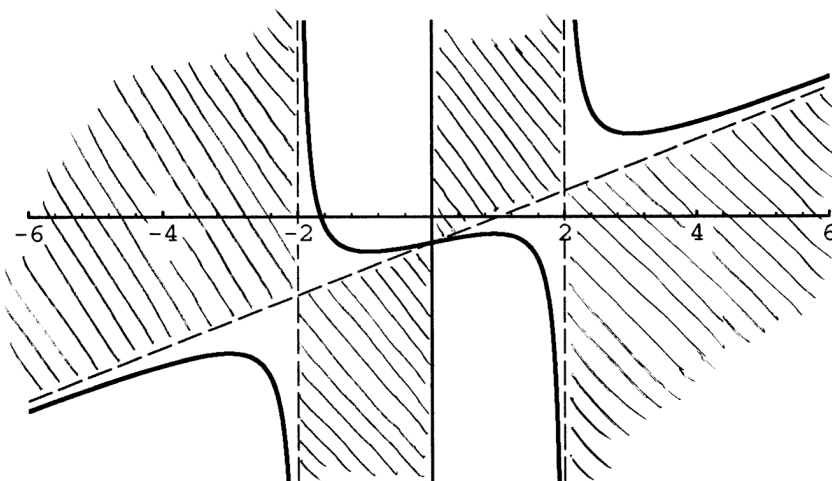
$$\delta(x) = f(x) - (mx + h)$$

Cette fonction mesure la *différence d'altitude* entre le graphe de f et son asymptote.

Si $\delta(x) > 0$, le graphe est **au-dessus** de l'asymptote à l'abscisse x

Si $\delta(x) = 0$, le graphe et l'asymptote ont un **point commun** à l'abscisse x

Si $\delta(x) < 0$, le graphe est **au-dessous** de l'asymptote à l'abscisse x



x	-2	0	2
$\delta(x)$	-	0	+

Cas d'un fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle telle que $d^\circ(N) - d^\circ(D) = 1$.

Par division euclidienne, on trouve $f(x) = (mx + h) + \frac{R(x)}{D(x)}$, et la droite d'équation $y = mx + h$ est asymptote oblique de f . De plus :

$$\delta(x) = \frac{R(x)}{D(x)}$$

La division donne donc la fonction δ en même temps que l'asymptote.

§ 25. CRITÈRE DU DEGRÉ

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle.

- f possède une **asymptote horizontale** si et seulement si

$$d^{\circ}(N) \leq d^{\circ}(D)$$

- L'asymptote horizontale est confondue avec l'axe Ox si et seulement si

$$d^{\circ}(N) < d^{\circ}(D)$$

- f possède une **asymptote oblique** si et seulement si

$$d^{\circ}(N) - d^{\circ}(D) = 1$$

Exemples

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x + 3}.$

$d^{\circ}(N) = 2, d^{\circ}(D) = 3 ; \Rightarrow d^{\circ}(N) < d^{\circ}(D) ; \Rightarrow$ l'axe Ox est asymptote horizontale de f .

Equation de l'asymptote horizontale : $y = 0$.

2) $f(x) = \frac{4x - 1}{2x + 5}.$

$d^{\circ}(N) = 1, d^{\circ}(D) = 1 ; \Rightarrow d^{\circ}(N) = d^{\circ}(D) ; \Rightarrow f$ possède une asymptote horizontale.

Equation de l'asymptote horizontale : $y = 2$.

3) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 3}.$

$d^{\circ}(N) = 2, d^{\circ}(D) = 1 ; \Rightarrow d^{\circ}(N) - d^{\circ}(D) = 1 ; \Rightarrow f$ possède une asymptote oblique.

Equation de l'asymptote oblique : $y = x + 1$.

§ 26. DÉTECTION D'UNE ASYMPTOTE AFFINE

Dans le cas de fonctions non rationnelles, on ne peut plus déterminer les asymptotes affines au moyen de la division euclidienne des polynômes. On se sert alors du critère suivant :

Théorème

La droite $y = mx + h$ est asymptote à droite de la fonction f si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = h$$

La droite $y = mx + h$ est asymptote à gauche de la fonction f si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = h$$

Preuve

Prouvons le théorème pour une asymptote à droite, le cas de l'asymptote à gauche étant analogue.

Soit $\delta(x) = f(x) - (mx + h) \Leftrightarrow f(x) = (mx + h) + \delta(x)$.

Par définition de l'asymptote affine,

$$y = mx + h \text{ est une asymptote à droite de } f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0$$

Par ailleurs : $\frac{f(x)}{x} = m + \frac{h}{x} + \frac{\delta(x)}{x}$ et $f(x) - mx = h + \delta(x)$.

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = h \right)$$

§ 30. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION

Soit f une fonction de A vers $\mathbb{R}$, A étant un intervalle de $\mathbb{R}$, ou une réunion d'intervalles.

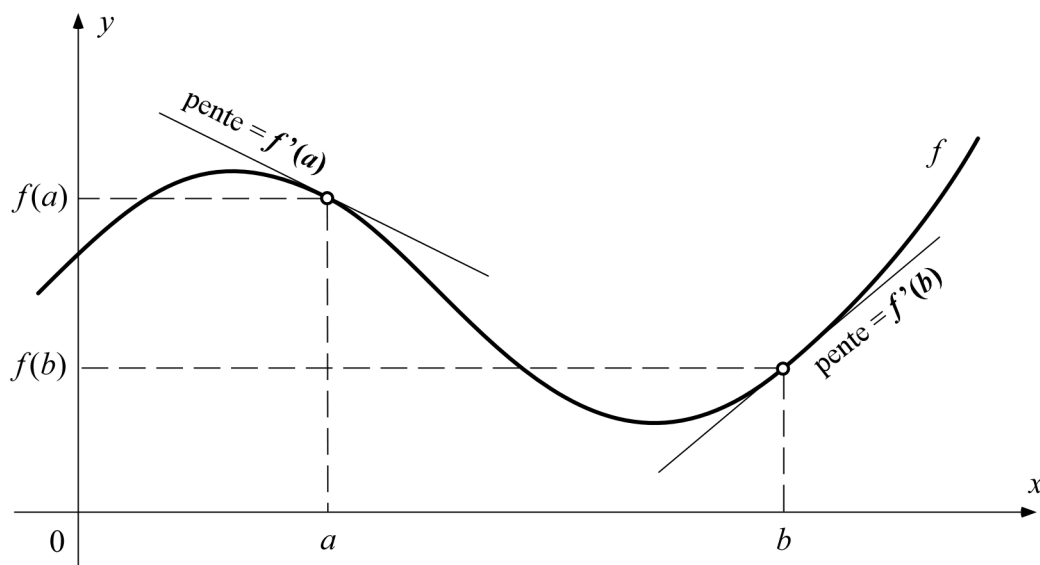
La fonction f est dite *dérivable* sur A si la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe pour tout $x \in A$.

Si f est dérivable sur A , on appelle alors *dérivée* de f , et on note f' , la fonction de A vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Géométriquement, on a vu que cette limite donne la pente de du graphe de f à l'abscisse x . Ainsi :

$$f'(x) = \text{pente du graphe de } f \text{ à l'abscisse } x$$



Exemple

La dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2$ est la fonction $f' : x \mapsto 2x$. En effet :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

§ 31. PREMIERS THÉORÈMES SUR LES DÉRIVÉES

1. *La dérivée d'une fonction constante est nulle.*

$$(\text{constante})' = 0$$

Preuve

Soit $f : x \mapsto c$ une fonction constante.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

2. *La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.*

$$(f + g)' = f' + g'$$

Preuve

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x+h) - (f + g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

3. *La dérivée du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de cette constante par la dérivée de la fonction.*

$$(cf)' = c(f')$$

Preuve

$$\begin{aligned} (cf)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x). \end{aligned}$$

§ 32. DÉRIVÉE DE x^n

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$.

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Preuve

Posons $f(x) = x^n$ et déterminons $f'(x)$ par un calcul de limite.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

On se sert de la formule de Newton pour développer $(x+h)^n$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + C_3^n x^{n-3}h^3 + \dots + h^n \right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + C_3^n x^{n-3}h^3 + \dots + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + C_2^n x^{n-2}h + C_3^n x^{n-3}h^2 + \dots + h^{n-1} \right) = nx^{n-1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

N.B. Ce résultat est encore valable lorsque n est négatif ou fractionnaire.

Exemples

- $(x^7)' = 7x^6$
- $(x)' = (x^1)' = 1x^0 = 1$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$
- $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

§ 33. DÉRIVÉE D'UN PRODUIT ET D'UN QUOTIENT

Théorème

Le produit de deux fonctions f et g dérivables sur une même partie de $\mathbb{R}$ est dérivable sur cette partie, et l'on a :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Preuve

Soit $x \in \mathbb{R}$ en lequel f et g sont dérivables. Posons $p = fg$.

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

De manière analogue, on obtient la formule de dérivation pour un quotient :

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Exemples

$$\begin{aligned} 1) \quad \left((2x+5)(x^3-2x+3) \right)' &= (2x+5)'(x^3-2x+3) + (2x+5)(x^3-2x+3)' \\ &= 2(x^3-2x+3) + (2x+5)(3x^2-2) = 8x^3 + 15x^2 - 8x - 4. \end{aligned}$$

$$2) \quad \left(\frac{2x+3}{x} \right)' = \frac{(2x+3)'x - (2x+3)(x)'}{x^2} = \frac{2x - (2x+3) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x - 2x - 3}{x^2} = \frac{-3}{x^2}.$$

§ 34. DÉRIVÉE DE g^n

Théorème

Soit $g(x)$ une fonction dérivable et n un entier supérieur à 1. La dérivée de la fonction $(g(x))^n$ est égale à $n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$:

$$(g^n)' = n g^{n-1} \cdot g'$$

On peut même établir que ce résultat est valable pour tout $n \in \mathbb{R}$.

Preuve

$$\text{Cas } n=2 : (g^2)' = (g \cdot g)' = g'g + g g' = 2g^1 \cdot g' \quad \checkmark$$

$$\text{Cas } n=3 : (g^3)' = (g^2 \cdot g)' = 2g g'g + g^2 g' = 2g^2 g' + g^2 g' = 3g^2 g' \quad \checkmark$$

$$\text{Cas } n=4 : (g^4)' = (g^3 \cdot g)' = 3g^2 g'g + g^3 g' = 3g^3 g' + g^3 g' = 4g^3 g' \quad \checkmark$$

Et ainsi de suite...*

* Si la formule est vraie pour $n=k$, elle est encore vraie pour $n=k+1$. En effet :

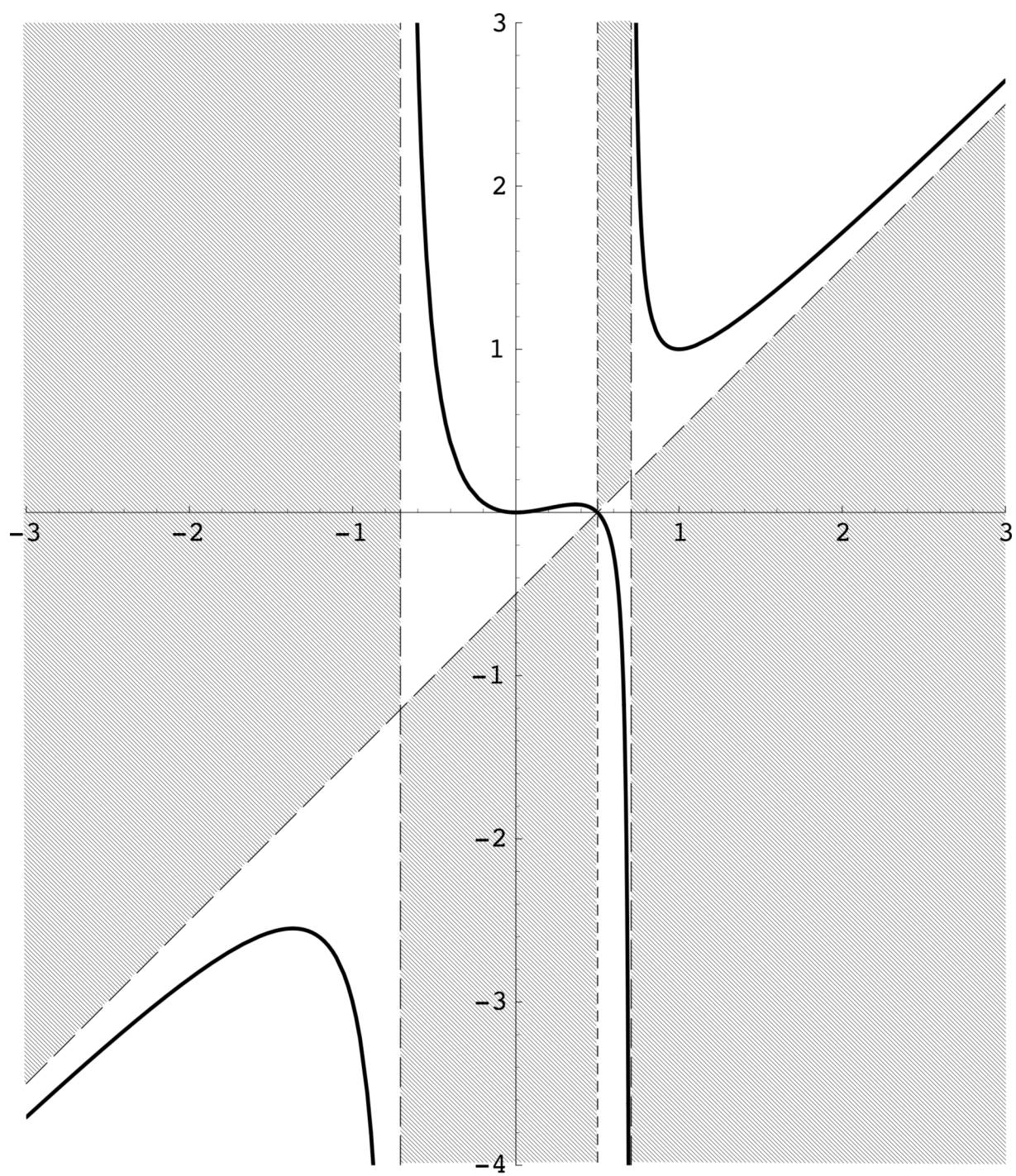
$$(g^{k+1})' = (g^k \cdot g)' = k g^{k-1} g'g + g^k g' = k g^k g' + g^k g' = (k+1)g^k g'.$$

Remarque

Dans ce contexte, on appelle *dérivée intérieure* le facteur $g'(x)$.

Exemple

$$\left((x^3 - 5)^{12} \right)' = 12 (x^3 - 5)^{11} \cdot (x^3 - 5)' = 12 (x^3 - 5)^{11} \cdot 3x^2 = 36x^2 (x^3 - 5)^{11}.$$



$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1}$$

§ 35. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Lemme

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a . Il existe une fonction R telle que :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + R(h) \cdot h \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$$

Preuve

$$\text{Posons } R(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

$$\text{Comme } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ (par définition), on a } \lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0.$$

$$\text{De plus, } R(h) \cdot h = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h.$$

$$\text{D'où : } f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + R(h) \cdot h.$$

Théorème

On considère deux fonctions $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: B \rightarrow A$, A et B désignant des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On suppose f dérivable sur A et g dérivable sur B .

Alors, la fonction composée $f(g(x))$ est dérivable sur B et sa dérivée est $f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Remarque : Dans ce contexte, le facteur $g'(x)$ est souvent appelé *dérivée intérieure*.

Preuve

Soit $x \in B$. On doit montrer que la limite de $\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$ quand h tend vers 0 existe

et vaut $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Au moyen du lemme ci-dessus, appliqué à la fonction g , on peut écrire :

$$f(g(x+h)) = f(g(x) + g'(x) \cdot h + R(h) \cdot h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0.$$

Posons $k = g'(x) \cdot h + R(h) \cdot h$. En appliquant à nouveau le lemme, cette fois à la fonction f , on obtient :

$$f(g(x+h)) = f(g(x) + k) = f(g(x)) + f'(g(x)) \cdot k + S(k) \cdot k \quad \text{avec} \quad \lim_{k \rightarrow 0} S(k) = 0.$$

Ainsi :

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot k + S(k) \cdot k =$$

$$f'(g(x)) \cdot (g'(x) \cdot h + R(h) \cdot h) + S(k) \cdot (g'(x) \cdot h + R(h) \cdot h) =$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot h + f'(g(x)) \cdot R(h) \cdot h + S(k) \cdot g'(x) \cdot h + S(k) \cdot R(h) \cdot h. \text{ Donc :}$$

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot R(h) + S(k) \cdot g'(x) + S(k) \cdot R(h).$$

Or, le terme $f'(g(x)) \cdot R(h) + S(k) \cdot g'(x) + S(k) \cdot R(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

(Notez que si $h \rightarrow 0$, alors $k \rightarrow 0$ et $S(k) \rightarrow 0$.)

On en tire la conclusion :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Corollaire

Quel que soit $n \in \mathbb{Q}$, la dérivée de la fonction $g^n(x)$ est $n \cdot g^{n-1}(x) \cdot g'(x)$:

$$(g^n)' = n g^{n-1} \cdot g'$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème en prenant f définie par $f(x) = x^n$.

Remarque : Ce résultat est même valable pour $n \in \mathbb{R}$.

Exemples

a) $y = \sin(2x+1)$;

$$y' = \cos(2x+1) \cdot (2x+1)' = \cos(2x+1) \cdot 2 = 2 \cos(2x+1)$$

b) $y = (x^3 - 5)^{12}$;

$$y' = 12 (x^3 - 5)^{11} \cdot (x^3 - 5)' = 12 (x^3 - 5)^{11} \cdot 3x^2 = 36x^2 (x^3 - 5)^{11}$$

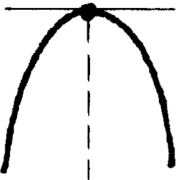
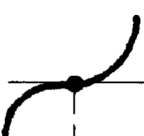
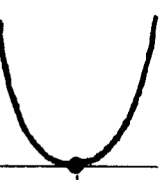
§ 36. QUE CONCLURE DU SIGNE DE LA DÉRIVÉE ?

Soit une fonction dérivable $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

- $f' > 0 \Leftrightarrow$ la pente du graphe de f est > 0
 $\Leftrightarrow$ le graphe de f "monte" (en "lisant" de gauche à droite)
 $\Leftrightarrow$ la fonction f est **croissante** (au sens strict)

- $f' < 0 \Leftrightarrow$ la pente du graphe de f est < 0
 $\Leftrightarrow$ le graphe de f "descend" (en "lisant" de gauche à droite)
 $\Leftrightarrow$ la fonction f est **décroissante** (au sens strict)

- $f' = 0 \Leftrightarrow$ le graphe de f possède un **point à tangente horizontale** :
maximum (local), minimum (local) ou palier

	maximum	palier		minimum
		positif	négatif	
allure du graphe de f				
signe de f'	+ 0 -	+ 0 +	- 0 -	- 0 +
croissance de f	↗ M ↘	↗ p ↗	↘ p ↘	↘ m ↗

§ 37. ETUDE DE LA CROISSANCE* D'UNE FONCTION

Exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2$.

On calcule la dérivée et on la factorise :

$$f'(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 + x - 2) = x^2(x-1)(x+2)$$

On étudie ensuite le signe de la dérivée en ajoutant une ligne au tableau ; cette dernière ligne montre au moyen de flèches les « montées » ou « descentes » du graphe de f , autrement dit la *croissance* de la fonction f :

x	-2		0		1	
x^2	+		+	0	+	
$(x-1)(x+2)$	+	0	-		-	0
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0
$f(x)$	↗	M	↘	p	↘	m

On en déduit encore les *points à tangente horizontale* :

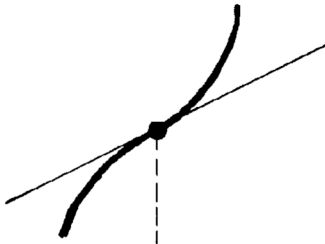
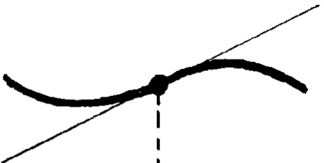
- Point *maximum* : $(-2 ; f(-2)) = (-2 ; \sim 4,9)$
- Point *minimum* : $(1 ; f(1)) = (1 ; \sim 1,8)$
- Point *palier* : $(0 ; f(0)) = (0 ; 2)$

* ou *variation*

§ 38. DÉRIVÉE SECONDE ET COURBURE

Soit f une fonction réelle, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

- Si $f'' > 0$, f' est croissante ;
 - $\Leftrightarrow$ la pente de la tangente au graphe de f augmente ;
 - $\Leftrightarrow$ le graphe de f est "convexe" :  ;
 - $\Leftrightarrow$ sa courbure est positive.
- Si $f'' < 0$, f' est décroissante ;
 - $\Leftrightarrow$ la pente de la tangente au graphe de f diminue ;
 - $\Leftrightarrow$ le graphe de f est "concave" :  ;
 - $\Leftrightarrow$ sa courbure est négative.
- Si $f'' = 0$ en un réel a , et si f'' change de signe en a , alors $(a, f(a))$ est un *point d'inflexion* de f .

graphe de f :						
signe de f''	-	0	+	+	0	-
convexité de f						

§ 39. VITESSE

Soit $A(t)$ une grandeur variant avec le temps t .

Le quotient $\frac{A(t+h) - A(t)}{h}$ mesure la *vitesse moyenne* du "changement" A entre les temps t et $t+h$. La *vitesse (instantanée)* de ce changement au temps t sera donc égale à

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}$$

c'est-à-dire à la dérivée de A en t , pour autant que la limite existe. D'où :

$$A'(t) = \textbf{Vitesse} \text{ du changement } A \text{ au temps } t$$

L'accélération du changement A est la vitesse du changement A' . Ainsi :

$$A''(t) = \textbf{Accélération} \text{ du changement } A \text{ au temps } t$$

(A'' désigne la dérivée de A')

Petite remarque

La vitesse est donc une "incarnation" physique de la notion de dérivée. On connaît déjà l'incarnation géométrique, comme pente locale du graphe...

§ 50. PARITÉ D'UNE FONCTION

Définition

- Une fonction réelle f définie sur D est dite ***paire*** si son graphe est symétrique relativement à l'axe Oy , autrement dit si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = f(x)$$

- Une fonction réelle f définie sur D est dite ***impaire*** si son graphe est symétrique relativement à l'origine O , autrement dit si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = -f(x)$$

Exemples

Les fonctions x^2 , $\cos(x)$ et $\sqrt{x^4 - x^2}$ sont paires.

Les fonctions x^3 , $\sin(x)$ et $\frac{x}{x^2 + 4}$ sont impaires.

N.B. Il y a beaucoup de fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires...

§ 51. PLANS D'ÉTUDE DE FONCTIONS

A) Fonctions rationnelles

Exemples : $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$; $f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1}$

1. Ensemble de définition, parité
2. Signe de la fonction
3. Asymptotes (verticales, horizontale ou oblique)
4. Position du graphe relativement à l'asymptote horizontale ou oblique
5. Croissance (= variation) ; extremums et paliers
6. Courbure (= convexité) et points d'inflexion
7. Graphe

B) Fonctions irrationnelles

Exemples : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x+1}$; $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

1. Ensemble de définition, parité
2. Signe de la fonction
3. Croissance (= variation) ; extremums et paliers
4. Courbure (= convexité) et points d'inflexion
5. Asymptotes affines et points d'intersection du graphe avec celles-ci
6. Comportement au bord de l'ensemble de définition
(asymptote verticale ? Sinon, pente de la tangente ?)
7. Graphe

C) Fonctions trigonométriques

Exemples : $f(x) = 2 \sin x \cos x$; $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$

1. Ensemble de définition, parité, périodicité
(choix d'un intervalle d'étude)
2. Signe de la fonction
3. Croissance (= variation) ; extremums et paliers
4. Courbure (= convexité) et points d'inflexion
5. Asymptotes
6. Graphe