

ANALYSE 2M

$$y = \boldsymbol{f}(g(x))$$

$\Downarrow$

$$y' = \boldsymbol{f}'(g(x)) \cdot g'(x)$$

TABLE DES MATIÈRES

Limites d'une fonction	10
Continuité	11
limites de $1/x$ en 0 et $\pm \infty$	12
Limite d'une fonction rationnelle	13
Limite d'une fonction rationnelle en $\pm \infty$	14
Limite de fonctions irrationnelles	15
Pente locale d'un graphe	16
 Asymptotes verticales et horizontales	 20
Position du graphe relativement à l'asymptote horizontale	21
$N/D = Q + R/D$	22
Asymptotes obliques	23
Position du graphe relativement à l'asymptote oblique	24
Critère du degré	25
 Dérivée d'une fonction	 30
Premiers théorèmes sur les dérivées	31
Dérivée de x^n	32
Dérivée d'un produit et d'un quotient	33
Dérivée de g^n	34
Que conclure du signe de la dérivée ?	35
Etude de la croissance d'une fonction	36
Dérivée d'une fonction composée	37
Dérivée d'une fonction composée (bis)	38
 Parité d'une fonction	 70
Plan d'étude d'une fonction rationnelle	71

EXERCICES (Séries DER, FCR, LI)

§ 10. LIMITES D'UNE FONCTION

Définition

Soit f une fonction et $a, b \in \mathbb{R}$.

Si le nombre $f(x)$ se rapproche toujours plus de b lorsque x approche a ($x \neq a$), on dira que " $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a " ou que " b est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a ", et l'on notera :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_a f = b$$

Exemple

Examinons le comportement de $f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{2x - 4}$ lorsque x tend vers 2 :

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	2,85	2,985	2,9985	2,99985		3,00015	3,0015	3,015	3,15

Il semble donc que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{2x - 4} = 3$ (bien que f ne soit pas définie en $x = 2$).

Quelques théorèmes

Si les fonctions f et g admettent une limite en a , alors :

- $\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g$
- $\lim_a (c f) = c \lim_a f$ ($c = \text{constante}$)
- $\lim_a (f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g$
- $\lim_a \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$ (si $\lim_a g \neq 0$)

De plus, si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$, pour autant que $g(x)$ soit différent de b sur un intervalle ouvert contenant a , sauf éventuellement en a .

§ 11. CONTINUITÉ

Définitions

Une fonction f est **continue en a** si elle est définie sur un intervalle ouvert contenant a et si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert si elle est continue en tout point cet intervalle.

Une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si elle est continue en tout point de l'intervalle $]a, b[$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = f(b)$.

Une fonction est continue sur une réunion d'intervalles si elle est continue sur chaque intervalle.

Continuité de fonctions élémentaires

Les fonctions f données ci-dessous sont continues sur leur ensemble de définition.

$f(x) = c$	$f(x) = x$
$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f(x) = x $	$f(x) = \sqrt{x}$

Opération sur les fonctions continues

Soit f et g des fonctions continues en a et soit c un nombre réel. Alors :

$f + g$ est continue en a
$f - g$ est continue en a
cf est continue en a
fg est continue en a
f/g est continue en a si $g(a) \neq 0$

Si g est une fonction continue en a et f une fonction continue en $g(a)$, alors la fonction $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$ est continue en a .

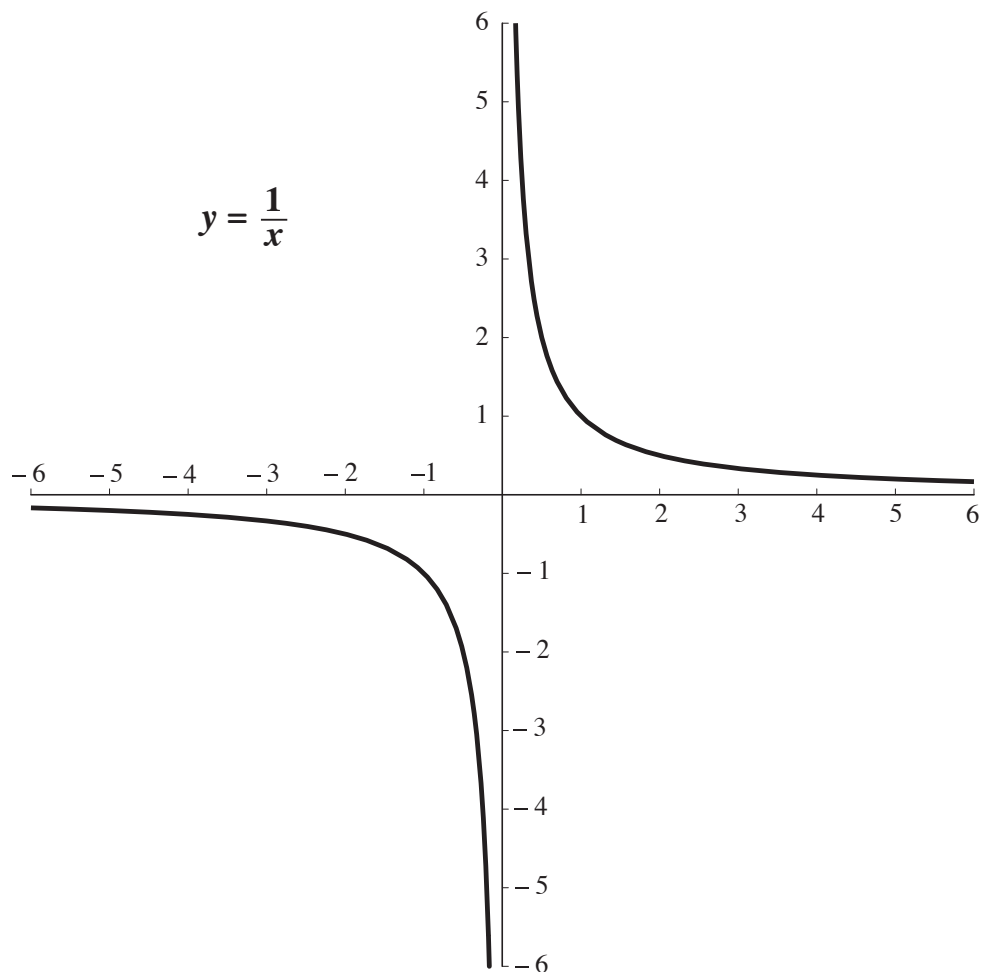
Remarques

- Le graphe d'une fonction continue sur un intervalle peut être tracé sans lever le crayon.
- Les fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques et racine n -ièmes sont continues sur leur ensemble de définition.

§ 12. LIMITES DE $\frac{1}{x}$ EN 0 ET $\pm \infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{-\infty} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+\infty} \right] = 0$$

§ 13. LIMITE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

Soient $N(x)$, $D(x)$ deux polynômes et $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la limite de $\frac{N(x)}{D(x)}$ lorsque x tend vers a .

1. Si a n'est pas un zéro de D

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(a)}{D(a)}. \text{ Exemple : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{3 \cdot 2+1}{2 \cdot 2-1} = \frac{7}{3}.$$

2. Si a est un zéro de N et de D

Dans ce cas, la fraction doit être simplifiée.

$$\text{Exemple : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3.$$

On a affaire ici une limite de *forme indéterminée* du type $\frac{0}{0}$.

3. Si a est un zéro de D , mais pas de N

La limite est alors du type $\frac{n}{0}$, $n \neq 0$. Elle vaut, si elle existe, $-\infty$ ou $+\infty$.

$$\text{Exemples : } \bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{(x-3)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

Le 0^+ signifie que le dénominateur tend vers 0 tout en restant positif au voisinage de $x = 3$. Définition analogue pour 0^- .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{-(x-3)^2} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2-x}{(x-3)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Parfois, la limite n'existe pas :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \begin{cases} \text{si } x < 3 & \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty & \text{"limite à gauche"} \\ \text{si } x > 3 & \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty & \text{"limite à droite"} \end{cases}$$

La limite à gauche n'étant pas égale à la limite à droite, la limite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ **n'existe pas**.

Néanmoins, on peut écrire : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

§ 14. LIMITE D'UNE FONCTION RATIONNELLE EN $\pm \infty$

Théorème

Soient $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes.

La limite de la fonction rationnelle $\frac{N(x)}{D(x)}$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré de $N(x)$ et $D(x)$.

Exemples

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{-3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{-3x^2} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

Preuve du théorème

Prenons pour fixer les idées $N(x) = 7x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ et $D(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

On peut écrire :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{7x^3 \cdot \frac{N(x)}{7x^3}}{3x^2 \cdot \frac{D(x)}{3x^2}} = \frac{7x^3}{3x^2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{7x} - \frac{2}{7x^2} + \frac{1}{7x^3}}{1 - \frac{2}{3x} + \frac{5}{3x^2}}$$

Dans la dernière expression, les termes $\left(1 + \frac{3}{7x} - \dots\right)$ et $\left(1 - \frac{2}{3x} + \dots\right)$ tendent vers 1 lorsque x tend vers $\pm \infty$. D'où :

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{7x^3}{3x^2}$$

Corollaire

La limite d'un polynôme $P(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

"Un polynôme se comporte en $\pm \infty$ comme son terme de plus haut degré"

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9x^3 - 361x^2 - x - 100) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 9x^3 = -\infty$.

§ 15. LIMITES DE FONCTIONS IRRATIONNELLES

Deux exemples

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Commentaire

On a multiplié les deux termes de la fraction initiale par $\sqrt{x} + 2$, et appliqué la formule $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ pour réduire le numérateur. $\sqrt{x} + 2$ est l'expression *conjugée* de $\sqrt{x} - 2$.

De manière générale, les expressions $A - B$ et $A + B$ sont dites *conjugées* l'une de l'autre.

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 3} \right) = [\infty - \infty] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 3})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 3})}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x) - (x^2 + 3)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} =$$

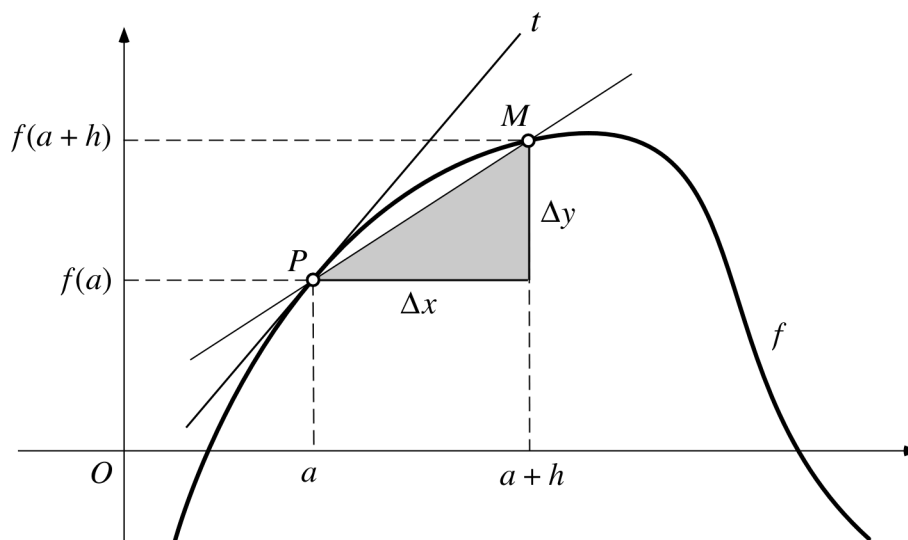
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} \quad (*) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{- \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} = -\frac{1}{2}.$$

(*) On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

§ 16. PENTE LOCALE D'UN GRAPHE

Soient f une fonction, $P(a; f(a))$ un point du graphe de f et $M(a+h; f(a+h))$ un autre point du graphe de f voisin de P .



Le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est égal à la pente de la droite PM $\left(= \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$.

Faisons maintenant tendre h vers 0. Le point M se rapproche de P et la droite PM finit par se confondre avec la tangente t en P au graphe de f .

Ainsi, lorsque la limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, elle est égale à la pente de la tangente en $P(a; f(a))$, ou *pente du graphe de f à l'abscisse a* .

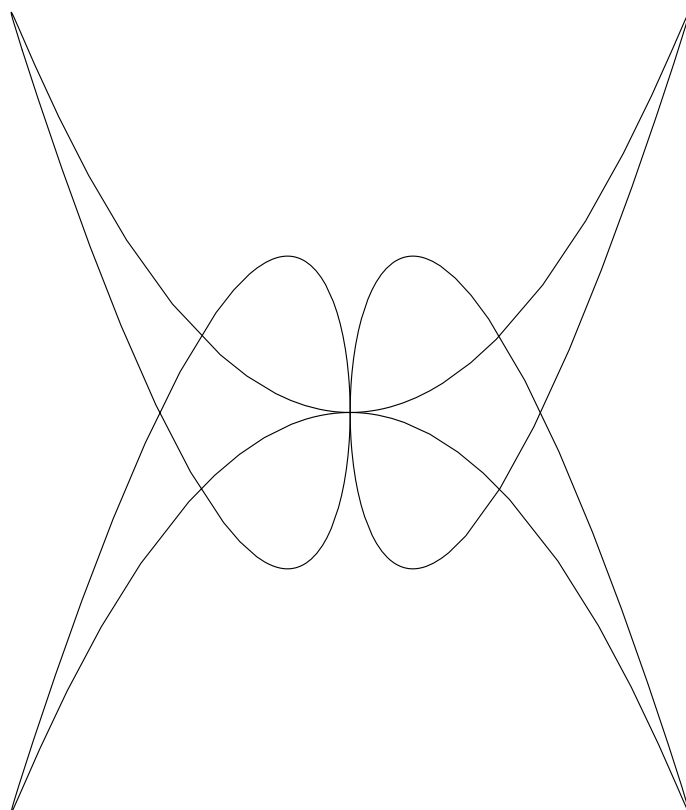
Pente du graphe de f à l'abscisse a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque. La limite ci-dessus s'écrit aussi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Exemple. Pente du graphe de $f(x) = x^3$ à l'abscisse $a = 1$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+3h+3h^2+h^3)-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h+3h^2+h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3+3h+h^2) = 3.$$



$$\begin{cases} x = 2 \cos t - 2 \cos(3t) \\ y = 2 \sin t - 2 \sin(5t) \end{cases}$$

§ 20. ASYMPTOTES VERTICALES ET HORIZONTALES

1. Introduction

Soit par exemple $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$.

Cette fonction n'est pas définie en $x = 4$. Que se passe-t-il au voisinage de $x = 4$?
Pour répondre à cette question, calculons les limites de $f(x)$ quand x approche 4 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{x+3}{x-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{x+3}{x-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

Graphiquement, cela signifie que lorsque x tend vers 4 par la gauche ($x < 4$), le graphe de f plonge vertigineusement, puisque $f(x)$ tend vers $-\infty$ (cf. figure).

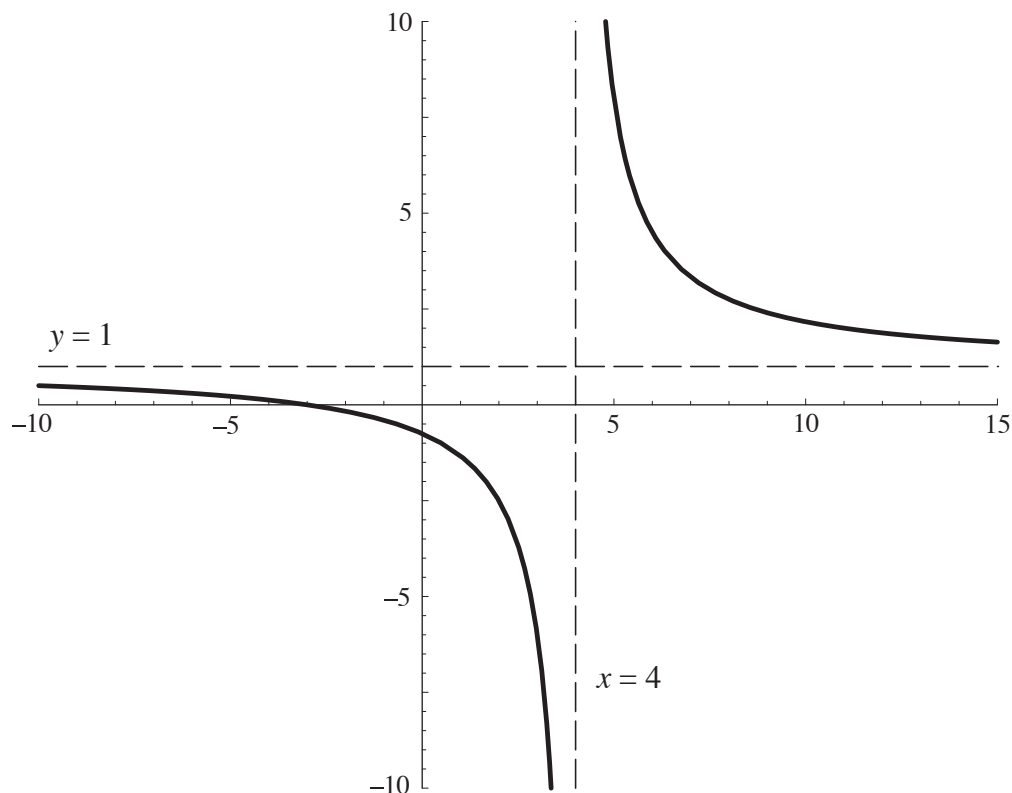
Lorsque x tend vers 4 par la droite ($x > 4$), le graphe de f s'envole infiniment, puisque $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Dans une telle situation, on dit que la droite d'équation $x = 4$ est une *asymptote verticale* de f .

Examinons maintenant le comportement de f quand x tend vers $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Ainsi, lorsque x devient très grand (en valeur absolue), le graphe de f se confond pratiquement avec la droite horizontale d'équation $y = 1$. On appelle alors cette droite une *asymptote horizontale* de la fonction f .



2. Définition des asymptotes verticales

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction.

La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale de f si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm \infty$$

Si de plus $f(x)$ est une fraction rationnelle $\frac{N(x)}{D(x)}$ **irréductible**, on a le critère suivant :

$$\left(\begin{array}{l} \text{La droite d'équation } x = a \\ \text{est asymptote verticale de } f \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} a \text{ est un zéro du} \\ \text{dénominateur } D(x) \end{array} \right)$$

Exemple

Les asymptotes verticales de $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$ sont les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

3. Définition des asymptotes horizontales

Soit $h \in \mathbb{R}$ et f une fonction.

La droite d'équation $y = h$ est asymptote horizontale à droite de f si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = h$$

De même à gauche ($x \rightarrow -\infty$).

Exemple

$f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$. D'où : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale de f (à droite et à gauche).

§ 21. POSITION DU GRAPHE RELATIVEMENT À L'ASYMPTOTE HORIZONTALE

Soit f une fonction admettant la droite d'équation $y = h$ comme asymptote horizontale.

Définissons la fonction δ ("delta") par :

$$\delta(x) = f(x) - h$$

$\delta(x)$ mesure la *différence d'altitude* entre le graphe de f et son asymptote horizontale.

Si $\delta(x) > 0$, le graphe est **au-dessus** de l'asymptote à l'abscisse x

Si $\delta(x) = 0$, le graphe et l'asymptote ont un **point commun** à l'abscisse x

Si $\delta(x) < 0$, le graphe est **au-dessous** de l'asymptote à l'abscisse x

Le signe de δ va nous permettre d'esquisser rapidement le graphe de f , au moyen d'un hachurage préalable des régions du plan qui, vu le signe de δ , ne peuvent abriter des points du graphe de f .

Exemple

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-5}.$$

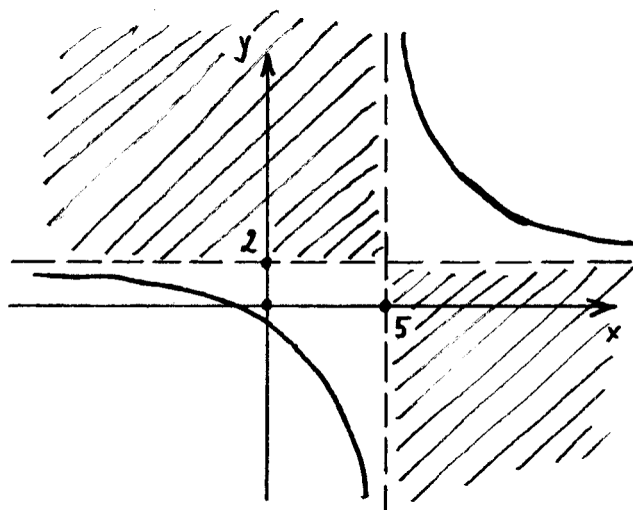
Asymptote verticale : $x = 5$.

Asymptote horizontale : $y = 2$.

$$\delta(x) = \frac{2x+3}{x-5} - 2 = \dots = \frac{13}{x-5}.$$

Signe de δ :

x	5	
$\delta(x)$	-	+



On en conclut que le graphe de f doit se situer hors de la région hachurée ci-contre ; on peut ainsi tracer un graphe plausible.

§ 22. $N/D = Q + R/D$

Soit $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes, avec $D \neq 0$. La division euclidienne de N par D nous donne deux autres polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$N = DQ + R \quad \text{et} \quad \text{degré}(R) < \text{degré}(D)$$

En divisant la relation $N = DQ + R$ par D on arrive à :

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

Toute fraction rationnelle (N/D) peut donc s'exprimer comme somme d'un polynôme (Q) et d'une fraction rationnelle (R/D) dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.

Exemple

Considérons $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 12x + 4}{x^2 - 3x + 1}$.

La division du numérateur $2x^3 - x^2 - 12x + 4$ par le dénominateur $x^2 - 3x + 1$ fournit le quotient $Q(x) = 2x + 5$ et le reste $R(x) = x - 1$. Ainsi :

$$f(x) = (2x + 5) + \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 1}$$

Remarque

On observe que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{R(x)}{D(x)} = 0$, puisque le degré de R est inférieur à celui de D . La fraction

$\frac{N}{D}$ se comporte donc comme le quotient Q lorsque x tend vers $\pm\infty$.

§ 23. ASYMPTOTES OBLIQUES

Définition

La droite d'équation $y = mx + h$ ($m \neq 0$) est asymptote oblique à droite d'une fonction f si

$$f(x) = (mx + h) + \delta(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0.$$

De même à gauche ($x \rightarrow -\infty$).

Dans un tel cas, $\delta(x)$ est pratiquement nul quand x est "proche" de $+\infty$ (resp. $-\infty$), et l'on a

$$f(x) \cong mx + h$$

La courbe représentative de f s'approche donc de la droite $y = mx + h$ sur le côté droit du graphique (resp. sur le côté gauche).

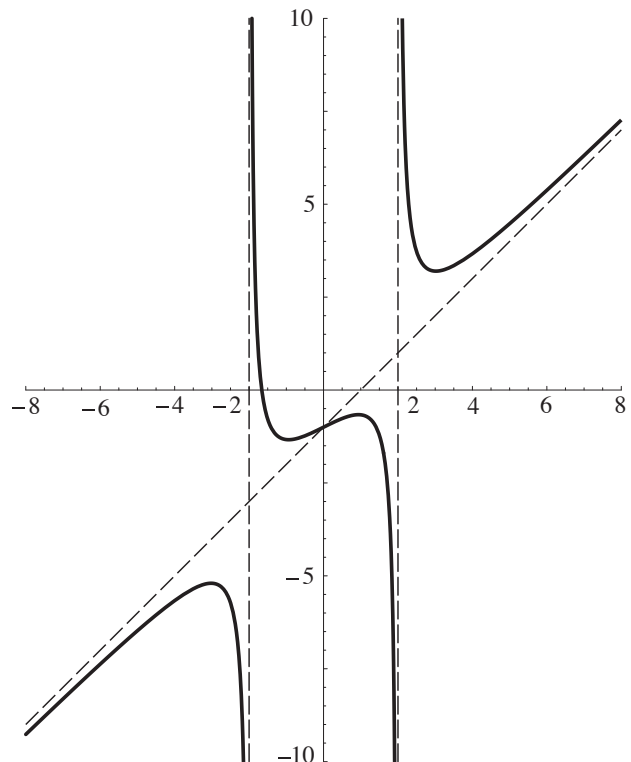
Exemple

Soit $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$.

Au moyen d'une division euclidienne, on obtient :

$$f(x) = (x - 1) + \frac{2x}{x^2 - 4}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 4} = 0$, la droite $y = x - 1$ est asymptote oblique de f (à droite et à gauche).



§ 24. POSITION DU GRAPHE RELATIVEMENT À L'ASYMPTOTE OBLIQUE

Soit f une fonction admettant la droite $y = mx + h$ comme asymptote.

Définissons la fonction δ ("delta") par :

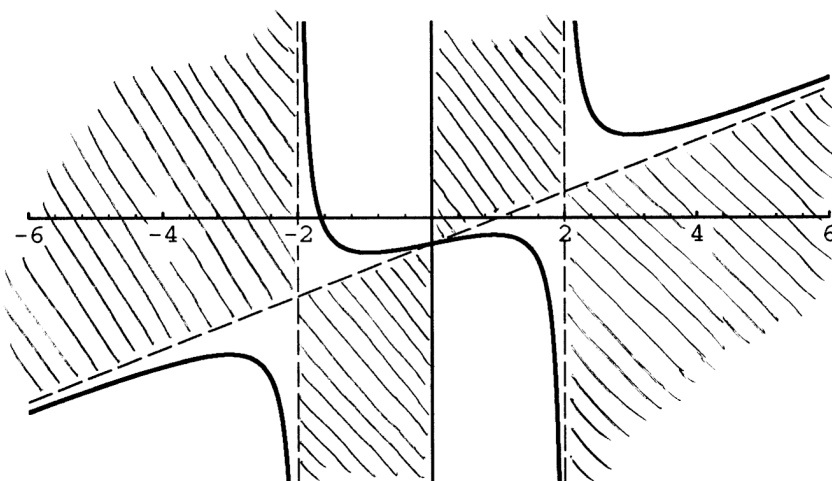
$$\delta(x) = f(x) - (mx + h)$$

Cette fonction mesure la *différence d'altitude* entre le graphe de f et son asymptote.

Si $\delta(x) > 0$, le graphe est **au-dessus** de l'asymptote à l'abscisse x

Si $\delta(x) = 0$, le graphe et l'asymptote ont un **point commun** à l'abscisse x

Si $\delta(x) < 0$, le graphe est **au-dessous** de l'asymptote à l'abscisse x



x	-2	0	2
$\delta(x)$	- +	0	- +

Cas d'un fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle telle que $d^\circ(N) - d^\circ(D) = 1$.

Par division euclidienne, on trouve $f(x) = (mx + h) + \frac{R(x)}{D(x)}$, et la droite d'équation $y = mx + h$ est asymptote oblique de f . De plus :

$$\delta(x) = \frac{R(x)}{D(x)}$$

La division donne donc la fonction δ en même temps que l'asymptote.

§ 25. CRITÈRE DU DEGRÉ

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle.

- f possède une **asymptote horizontale** si et seulement si

$$d^{\circ}(N) \leq d^{\circ}(D)$$

- L'asymptote horizontale est confondue avec l'axe Ox si et seulement si

$$d^{\circ}(N) < d^{\circ}(D)$$

- f possède une **asymptote oblique** si et seulement si

$$d^{\circ}(N) - d^{\circ}(D) = 1$$

Exemples

$$1) \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x + 3}.$$

$d^{\circ}(N) = 2, d^{\circ}(D) = 3 ; \Rightarrow d^{\circ}(N) < d^{\circ}(D) ; \Rightarrow$ l'axe Ox est asymptote horizontale de f .

Equation de l'asymptote horizontale : $y = 0$.

$$2) \quad f(x) = \frac{4x - 1}{2x + 5}.$$

$d^{\circ}(N) = 1, d^{\circ}(D) = 1 ; \Rightarrow d^{\circ}(N) = d^{\circ}(D) ; \Rightarrow f$ possède une asymptote horizontale.

Equation de l'asymptote horizontale : $y = 2$.

$$3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 3}.$$

$d^{\circ}(N) = 2, d^{\circ}(D) = 1 ; \Rightarrow d^{\circ}(N) - d^{\circ}(D) = 1 ; \Rightarrow f$ possède une asymptote oblique.

Equation de l'asymptote oblique : $y = x + 1$.

§ 30. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION

Soit f une fonction de A vers $\mathbb{R}$, A étant un intervalle de $\mathbb{R}$, ou une réunion d'intervalles.

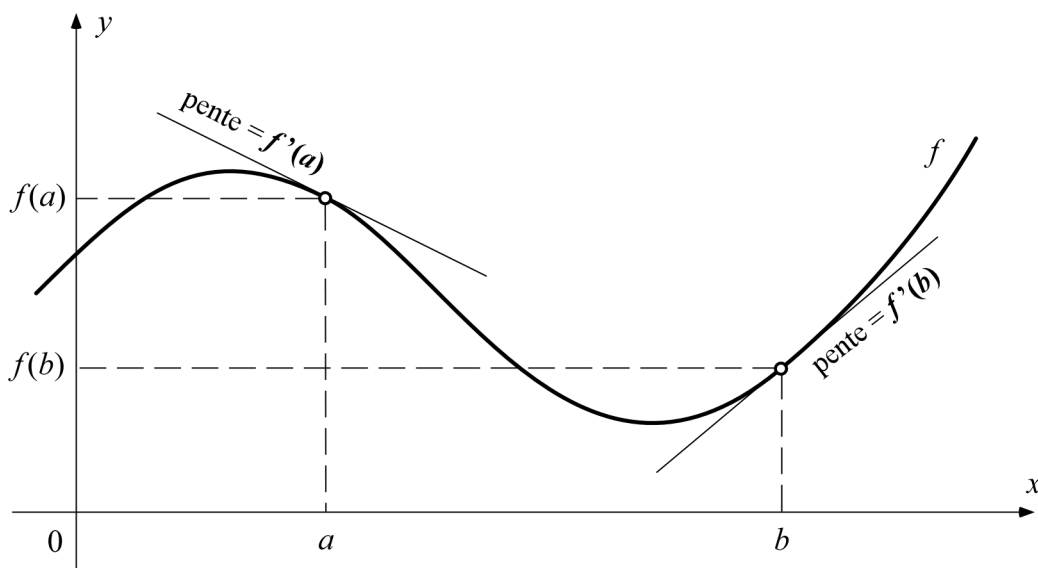
La fonction f est dite *dérivable* sur A si la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe pour tout $x \in A$.

Si f est dérivable sur A , on appelle alors *dérivée* de f , et on note f' , la fonction de A vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Géométriquement, on a vu que cette limite donne la pente de du graphe de f à l'abscisse x . Ainsi :

$$f'(x) = \text{pente du graphe de } f \text{ à l'abscisse } x$$



Exemple

La dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2$ est la fonction $f' : x \mapsto 2x$. En effet :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

§ 31. PREMIERS THÉORÈMES SUR LES DÉRIVÉES

1. *La dérivée d'une fonction constante est nulle.*

$$(\text{constante})' = 0$$

Preuve

Soit $f : x \mapsto c$ une fonction constante.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

2. *La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.*

$$(f + g)' = f' + g'$$

Preuve

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x+h) - (f + g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

3. *La dérivée du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de cette constante par la dérivée de la fonction.*

$$(cf)' = c(f')$$

Preuve

$$\begin{aligned} (cf)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x). \end{aligned}$$

§ 32. DÉRIVÉE DE x^n

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$.

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Preuve

Posons $f(x) = x^n$ et déterminons $f'(x)$ par un calcul de limite.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

On se sert de la formule de Newton pour développer $(x+h)^n$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + C_3^n x^{n-3}h^3 + \dots + h^n \right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + C_3^n x^{n-3}h^3 + \dots + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + C_2^n x^{n-2}h + C_3^n x^{n-3}h^2 + \dots + h^{n-1} \right) = nx^{n-1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

N.B. Ce résultat est encore valable lorsque n est négatif ou fractionnaire.

Exemples

- $(x^7)' = 7x^6$
- $(x)' = (x^1)' = 1x^0 = 1$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

§ 33. DÉRIVÉE D'UN PRODUIT ET D'UN QUOTIENT

Théorème

Le produit de deux fonctions f et g dérivables sur une même partie de $\mathbb{R}$ est dérivable sur cette partie, et l'on a :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Preuve

Soit $x \in \mathbb{R}$ en lequel f et g sont dérivables. Posons $p = fg$.

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

De manière analogue, on obtient la formule de dérivation pour un quotient :

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Exemples

$$\begin{aligned} 1) \quad \left((2x+5)(x^3-2x+3) \right)' &= (2x+5)'(x^3-2x+3) + (2x+5)(x^3-2x+3)' \\ &= 2(x^3-2x+3) + (2x+5)(3x^2-2) = 8x^3 + 15x^2 - 8x - 4. \end{aligned}$$

$$2) \quad \left(\frac{2x+3}{x} \right)' = \frac{(2x+3)'x - (2x+3)(x)'}{x^2} = \frac{2x - (2x+3) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x - 2x - 3}{x^2} = \frac{-3}{x^2}.$$

§ 34. DÉRIVÉE DE g^n

Théorème

Soit $g(x)$ une fonction dérivable et n un entier supérieur à 1. La dérivée de la fonction $(g(x))^n$ est égale à $n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$:

$$(g^n)' = n g^{n-1} \cdot g'$$

On peut même établir que ce résultat est valable pour tout $n \in \mathbb{R}$.

Preuve

Cas $n = 2$: $(g^2)' = (g \cdot g)' = g'g + g g' = 2g^1 \cdot g' \quad \checkmark$

Cas $n = 3$: $(g^3)' = (g^2 \cdot g)' = 2g g'g + g^2 g' = 2g^2 g' + g^2 g' = 3g^2 g' \quad \checkmark$

Cas $n = 4$: $(g^4)' = (g^3 \cdot g)' = 3g^2 g'g + g^3 g' = 3g^3 g' + g^3 g' = 4g^3 g' \quad \checkmark$

Et ainsi de suite...*

* Si la formule est vraie pour $n = k$, elle est encore vraie pour $n = k + 1$. En effet :

$$(g^{k+1})' = (g^k \cdot g)' = k g^{k-1} g'g + g^k g' = k g^k g' + g^k g' = (k+1)g^k g'.$$

Remarque

Dans ce contexte, on appelle *dérivée intérieure* le facteur $g'(x)$.

Exemple

$$\left((x^3 - 5)^{12} \right)' = 12 (x^3 - 5)^{11} \cdot (x^3 - 5)' = 12 (x^3 - 5)^{11} \cdot 3x^2 = 36x^2 (x^3 - 5)^{11}.$$

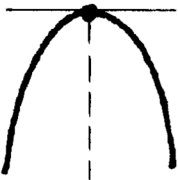
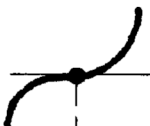
§ 35. QUE CONCLURE DU SIGNE DE LA DÉRIVÉE ?

Soit une fonction dérivable $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

- $f' > 0 \Leftrightarrow$ la pente du graphe de f est > 0
 $\Leftrightarrow$ le graphe de f "monte" (en "lisant" de gauche à droite)
 $\Leftrightarrow$ la fonction f est **croissante** (au sens strict)

- $f' < 0 \Leftrightarrow$ la pente du graphe de f est < 0
 $\Leftrightarrow$ le graphe de f "descend" (en "lisant" de gauche à droite)
 $\Leftrightarrow$ la fonction f est **décroissante** (au sens strict)

- $f' = 0 \Leftrightarrow$ le graphe de f possède un **point à tangente horizontale** :
maximum (local), minimum (local) ou palier

	maximum	palier		minimum
		positif	négatif	
allure du graphe de f				
signe de f'	+ 0 -	+ 0 +	- 0 -	- 0 +
croissance de f	↗ M ↘	↗ p ↗	↘ p ↘	↘ m ↗

§ 36. ETUDE DE LA CROISSANCE* D'UNE FONCTION

Exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2$.

On calcule la dérivée et on la factorise :

$$f'(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 + x - 2) = x^2(x-1)(x+2)$$

On étudie ensuite le signe de la dérivée en ajoutant une ligne au tableau ; cette dernière ligne montre au moyen de flèches les « montées » ou « descentes » du graphe de f , autrement dit la *croissance* de la fonction f :

x	-2		0		1	
x^2	+		+	0	+	
$(x-1)(x+2)$	+	0	-		-	0
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0
$f(x)$	↗	M	↘	p	↘	m

On en déduit encore les *points à tangente horizontale* :

- Point *maximum* : $(-2 ; f(-2)) = (-2 ; \sim 4,9)$
- Point *minimum* : $(1 ; f(1)) = (1 ; \sim 1,8)$
- Point *palier* : $(0 ; f(0)) = (0 ; 2)$

* ou *variation*

§ 37. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Lemme

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a . Il existe une fonction R telle que :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + R(h) \cdot h \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$$

Preuve

$$\text{Posons } R(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

$$\text{Comme } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ (par définition), on a } \lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0.$$

$$\text{De plus, } R(h) \cdot h = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h.$$

$$\text{D'où : } f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + R(h) \cdot h.$$

Théorème

On considère deux fonctions $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: B \rightarrow A$, A et B désignant des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On suppose f dérivable sur A et g dérivable sur B .

Alors, la fonction composée $f(g(x))$ est dérivable sur B et sa dérivée est $f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Remarque : Dans ce contexte, le facteur $g'(x)$ est souvent appelé **dérivée intérieure**.

Preuve

Soit $x \in B$. On doit montrer que la limite de $\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$ quand h tend vers 0 existe et vaut $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Au moyen du lemme ci-dessus, appliqué à la fonction g , on peut écrire : $f(g(x+h)) = f(g(x) + g'(x) \cdot h + R(h) \cdot h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$.

Posons $k = g'(x) \cdot h + R(h) \cdot h$. En appliquant à nouveau le lemme, cette fois à la fonction f , on obtient :

$$f(g(x+h)) = f(g(x) + k) = f(g(x)) + f'(g(x)) \cdot k + S(k) \cdot k \quad \text{avec} \quad \lim_{k \rightarrow 0} S(k) = 0.$$

Ainsi :

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot k + S(k) \cdot k =$$

$$f'(g(x)) \cdot (g'(x) \cdot h + R(h) \cdot h) + S(k) \cdot (g'(x) \cdot h + R(h) \cdot h) =$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot h + f'(g(x)) \cdot R(h) \cdot h + S(k) \cdot g'(x) \cdot h + S(k) \cdot R(h) \cdot h. \text{ Donc :}$$

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot R(h) + S(k) \cdot g'(x) + S(k) \cdot R(h).$$

Or, le terme $f'(g(x)) \cdot R(h) + S(k) \cdot g'(x) + S(k) \cdot R(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

(Notez que si $h \rightarrow 0$, alors $k \rightarrow 0$ et $S(k) \rightarrow 0$.)

On en tire la conclusion :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Corollaire

Quel que soit $n \in \mathbb{Q}$, la dérivée de la fonction $g^n(x)$ est $n \cdot g^{n-1}(x) \cdot g'(x)$:

$$(g^n)' = n g^{n-1} \cdot g'$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème en prenant f définie par $f(x) = x^n$.

Remarque : Ce résultat est même valable pour $n \in \mathbb{R}$.

Exemples

a) $y = \sin(2x+1)$;

$$y' = \cos(2x+1) \cdot (2x+1)' = \cos(2x+1) \cdot 2 = 2 \cos(2x+1)$$

b) $y = (x^3 - 5)^{12}$;

$$y' = 12 (x^3 - 5)^{11} \cdot (x^3 - 5)' = 12 (x^3 - 5)^{11} \cdot 3x^2 = 36x^2 (x^3 - 5)^{11}$$

§ 38. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE (BIS)

Théorème

On considère deux fonctions $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow A$, A et B désignant des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On suppose f dérivable sur A et g dérivable sur B .

Alors, la fonction composée $f(g(x))$ est dérivable sur B , et sa dérivée est égale à

$$f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Remarque : Dans ce contexte, le facteur $g'(x)$ est souvent appelé *dérivée intérieure*.

Exemples

- $(x^5)' = 5x^4$ implique $(g^5)' = 5g^4 \cdot g'$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ implique $(\sqrt{g})' = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot g'$
- $(\sin x)' = \cos x$ implique $(\sin(g))' = \cos(g) \cdot g'(x)$
- $(e^x)' = e^x$ implique $(e^g)' = e^g \cdot g'$ [e = base du logarithme naturel]
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ implique $(\ln(g))' = \frac{1}{g} \cdot g'$ [$\ln$ = logarithme naturel]
- $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ implique $(\sqrt[3]{g})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{g^2}} \cdot g'$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ implique $(\tan(g))' = \frac{1}{\cos^2(g)} \cdot g'$

N.B. Pour abrégé, on a noté " g " au lieu de " $g(x)$ ".

§ 70. PARITÉ D'UNE FONCTION

Définition

- Une fonction réelle f définie sur D est dite ***paire*** si son graphe est symétrique relativement à l'axe Oy , autrement dit si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = f(x)$$

- Une fonction réelle f définie sur D est dite ***impaire*** si son graphe est symétrique relativement à l'origine O , autrement dit si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = -f(x)$$

Exemples

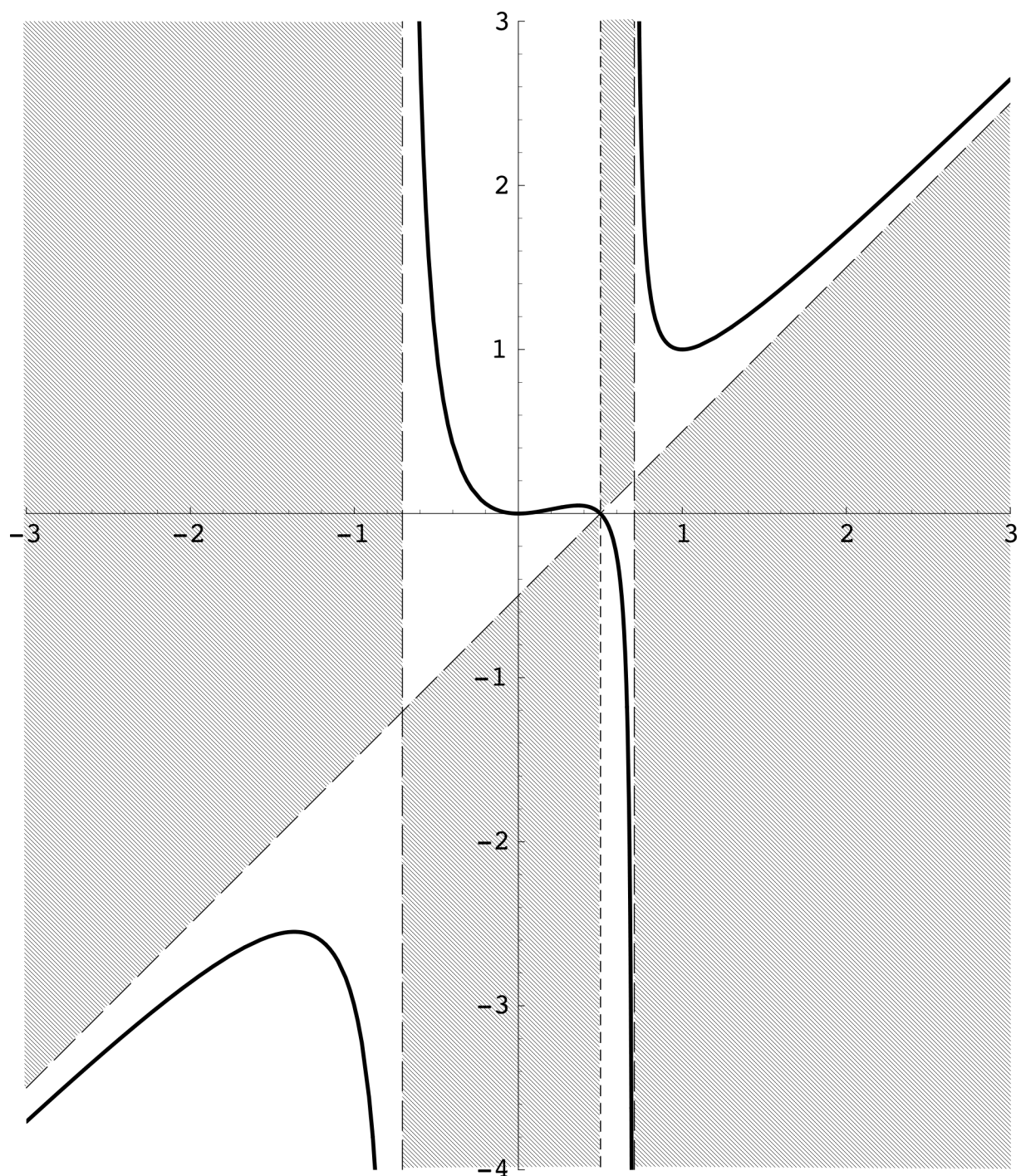
Les fonctions x^2 , $\cos(x)$ et $\sqrt{x^4 - x^2}$ sont paires.

Les fonctions x^3 , $\sin(x)$ et $\frac{x}{x^2 + 4}$ sont impaires.

N.B. Il y a beaucoup de fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires...

§ 71. PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

1. Ensemble de définition, parité
2. Signe de la fonction
3. Asymptotes (verticales, horizontale ou oblique)
4. Position du graphe relativement à l'asymptote horizontale ou oblique
5. Croissance (= variation); extremums et paliers
6. Graphe



DER

5. Dériver les produits suivants *au moyen de la formule* $(fg)' = f'g + fg'$:

1. $(x+1)(x^2-2x+3)$

4. $(3x^2-x+1)(x^3-7x)$

2. $(3-x) \cdot 5x^3$

5. $(\frac{x}{2}-3)(3x+1)$

3. $-\frac{x^2}{2}(2x+1)$

6. $f(x) \cdot (5x^2+2x)$

Rép.

1) $3x^2-2x+1$ 2) $5x^2(9-4x)$ 3) $-x(3x+1)$

4) $15x^4-4x^3-60x^2+14x-7$ 5) $\frac{1}{2}(6x-17)$

6) $f'(x) \cdot (5x^2+2x) + f(x) \cdot (10x+2)$

6. Dériver :

1) $\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + 1$

2) $\frac{3x^7}{2} - \frac{7x}{3}$

3) $(3x^2+5)(x^2-1)$

4) $(7x-1)(3x^2-x+5)$

5) $\frac{x+5}{x-1}$

6) $\frac{x^2}{x^2-2x}$

7) $\frac{x^3}{x+1}$

8) $\frac{3}{x}$

Rép. 1) $\frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$ 2) $\frac{21x^6}{2} - \frac{7}{3}$ 3) $12x^3+4x$ 4) $63x^2-20x+36$

5) $\frac{-6}{(x-1)^2}$ 6) $\frac{-2}{(x-2)^2}$ 7) $\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ 8) $\frac{-3}{x^2}$

7. Dériver :

1) $-\frac{2}{3}x^4$

2) $-2x^3 + \frac{x^2}{3}$

3) $\frac{1}{3}(3x+1)$

4) $7(x^3-5x+9)$

5) $\frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{7}-2x\right)$

6) $\frac{7}{x}$

Rép. 1) $-\frac{8}{3}x^3$ 2) $-6x^2 + \frac{2}{3}x$ 3) 1 4) $21x^2-35$ 5) $\frac{4}{35}x - \frac{4}{5}$ 6) $\frac{-7}{x^2}$

DER

8. Calculer la dérivée de la fonction f , puis compléter le tableau. Placer ensuite dans un système d'axes Oxy (unité : 5 carrés ; origine au centre d'une page) les points du graphe de f donnés par le tableau, et dessiner en chacun de ces points un segment de la tangente au graphe, sans tracer celui-ci.

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	2				
$f'(x)$	-4,5				

2) $f(x) = \frac{1}{16}(3x^5 - 15x^4 + 20x^3)$

x	-1	0	1	2	2,8
$f(x)$	-2,4				
$f'(x)$			0,94		4,7

Rép. 1) $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x$ 2) $f'(x) = \frac{15}{16}(x^4 - 4x^3 + 4x^2)$

9. Déterminer la pente du graphe de f à l'abscisse a , sans calcul de limite :

1) $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$; $a = 1$

2) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$; $a = -3$

3) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x$; $a = \frac{3}{4}$

4) $f(x) = 5x^2 + 6x + 2$; $a = -1$

5) $f(x) = \frac{3x-2}{5x+1}$; $a = 0$

6) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$; $a = 1$

Rép. 1) 4 2) 8 3) 4 4) -4 5) 13 6) -1

10. Dériver :

1) $\frac{5}{x}$

2) $\frac{1}{x+3}$

3) $\frac{1}{2x+1}$

4) $\frac{2x-1}{x+1}$

5) $\frac{x^2}{3}$

6) $\frac{1}{g(x)}$

7) $\frac{2x}{x^2+1}$

8) $\frac{1}{3x-2}$

Rép. 1) $\frac{-5}{x^2}$ 2) $\frac{-1}{(x+3)^2}$ 3) $\frac{-2}{(2x+1)^2}$ 4) $\frac{3}{(x+1)^2}$ 5) $\frac{2x}{3}$ 6) $\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

7) $\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ 8) $\frac{-3}{(3x-2)^2}$

DER

11. Dériver :

- | | | |
|------------------------------------|--------------------|--------------------|
| 1) $(3x+1)^5$ | 2) $(1-x)^4$ | 3) $(3x^2-2x+1)^7$ |
| 4) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3$ | 5) $(6x^3-x)^{12}$ | 6) $(-x^2+1)^2$ |

- Rép. 1) $15(3x+1)^4$ 2) $-4(1-x)^3$ 3) $14(3x^2-2x+1)^6(3x-1)$
4) $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$ 5) $12(6x^3-x)^{11}(18x^2-1)$ 6) $-4x(-x^2+1)$

12. Dériver :

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 1) $y = 3x^2 - 5x + 4$ | 2) $y = x + 5$ |
| 3) $y = 4x^7 - 2x^3 + 6$ | 4) $y = \frac{x^2}{3} - x$ |
| 5) $y = (2x+1)^5$ | 6) $y = (3x-5)^8$ |
| 7) $y = (1-x)^7$ | 8) $y = (x^2-3x+1)^4$ |

- Rép. 1) $6x-5$ 2) 1 3) $28x^6-6x^2$ 4) $\frac{2}{3}x-1$ 5) $10(2x+1)^4$
6) $24(3x-5)^7$ 7) $-7(1-x)^6$ 8) $4(x^2-3x+1)^3(2x-3)$

13. Dériver :

- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1) $(4-x)^3$ | 2) $(x-1)^2(x+2)$ | 3) $(2x-1)^3(x+2)^2$ |
| 4) $\left(\frac{3x^5}{2} + 5x\right)^4$ | 5) $\frac{x^3}{(x-1)^2}$ | 6) $(x+2)^3x^2$ |
| 7) $(2x+3)^3x^2$ | 8) $x(7-x)^5$ | 9) $\frac{(5-2x)^3}{4x}$ |

- Rép. 1) $-3(4-x)^2$ 2) $3(x-1)(x+1)$ 3) $10(x+1)(x+2)(2x-1)^2$
4) $4\left(\frac{3x^5}{2} + 5x\right)^3\left(\frac{15x^4}{2} + 5\right)$ 5) $\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ 6) $x(x+2)^2(5x+4)$
7) $2x(2x+3)^2(5x+3)$ 8) $(7-x)^4(7-6x)$ 9) $\frac{(5-2x)^2(-4x-5)}{4x^2}$

DER

14. Dériver :

1) $y = x^2(x+3)$

2) $y = \frac{(x+1)^3}{x-1}$

3) $y = \frac{x^2}{x-1}$

4) $y = (x+2)^4 x$

5) $y = (2x+1)^5 x^2$

6) $y = \frac{x-1}{(2x+1)^3}$

Rép. 1) $3x(x+2)$ 2) $\frac{2(x+1)^2(x-2)}{(x-1)^2}$ 3) $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ 4) $(x+2)^3(5x+2)$
 5) $2x(2x+1)^4(7x+1)$ 6) $\frac{7-4x}{(2x+1)^4}$

15. Etudier le signe de la fonction f :

1) $f(x) = -2x + 3$

2) $f(x) = (x-5)(2x+1)$

3) $f(x) = -x^2 - 3x$

Rép. 1)

x	$3/2$
$f(x)$	$+ \quad 0 \quad -$

 2)

x	$-1/2$	5
$f(x)$	$+ \quad 0 \quad -$	$0 \quad +$

 3)

x	-3	0
$f(x)$	$- \quad 0 \quad +$	$0 \quad -$

16. Etudier le signe de f :

1) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

2) $f(x) = \frac{2x+5}{x}$

3) $f(x) = \frac{x(x+3)}{7-x}$

4) $f(x) = \frac{(x+3)^2(x-1)}{x^3}$

5) $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$

6) $f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$

Rép. 1. zéros et pôles : $-2 ; 3$ signe : $+ \parallel - 0 +$
 2. zéros et pôles : $-\frac{5}{2} ; 0$ signe : $+ 0 - \parallel +$
 3. zéros et pôles : $-3 ; 0 ; 7$ signe : $+ 0 - 0 + \parallel -$
 4. zéros et pôles : $-3 ; 0 ; 1$ signe : $+ 0 + \parallel - 0 +$
 5. zéros et pôles : $-2 ; 5$ signe : $- 0 + 0 -$
 6. zéros et pôles : $-3 ; -1 ; 0 ; 1$ signe : $+ 0 - \parallel + 0 - \parallel +$

DER

17. Etudier la *croissance* de f :

1) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

3) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

Rép. 1. $f'(x) = 2x - 5$ / zéros et pôles de f' : $\frac{5}{2}$ / signe de f' : $- 0 +$ / croissance : $\searrow m \nearrow$

2. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ / zéros et pôles de f' : -3 ; 1 / signe de f' : $+ 0 - 0 +$ / croissance : $\nearrow M \searrow m \nearrow$

3. $f'(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2}$ / zéros et pôles de f' : $-\frac{1}{2}$ / signe de f' : $- \parallel -$ / croissance : $\searrow \searrow$

4. $f'(x) = 4x^3 - 16x$ / zéros et pôles de f' : -2 ; 0 ; 2 / signe de f' : $- 0 + 0 - 0 +$ / croissance : $\searrow m \nearrow M \searrow m \nearrow$

18. Etudier la *croissance* de la fonction f :

1) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

3) $f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 18x$

4) $f(x) = (4-x)^3$

5) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$

6) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

Rép. 1. $f'(x) = 4x - 5$ / zéros et pôles de f' : $\frac{5}{4}$ / signe de f' : $- 0 +$ / croissance : $\searrow m \nearrow$

2. $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$ / zéros et pôles de f' : -2 ; 1 / signe de f' : $+ 0 - 0 +$ / croissance : $\nearrow M \searrow m \nearrow$

3. $f'(x) = -3(x-2)(x+3)$ / zéros et pôles de f' : -3 ; 2 / signe de f' : $- 0 + 0 -$ / croissance : $\searrow m \nearrow M \searrow$

4. $f'(x) = -3(4-x)^2$ / zéros et pôles de f' : 4 / signe de f' : $- 0 -$ / croissance : $\searrow p \searrow$

5. $f'(x) = \frac{6(x-2)}{(x+1)^3}$ / zéros et pôles de f' : -1 ; 2 / signe de f' : $+ \parallel - 0 +$ / croissance : $\nearrow \searrow m \nearrow$

6. $f'(x) = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ / zéros et pôles de f' : $-\frac{3}{2}$; -1 ; 0 / signe de f' : $- 0 + \parallel + 0 +$ / croissance : $\searrow m \nearrow \nearrow p \nearrow$

DER

18 BIS. Etudier la croissance de la fonction f :

1) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x + 3}$

2) $f(x) = (x + 2)^3 x^2$

Rép. 1. $f'(x) = \frac{2x(x+3)}{(2x+3)^2}$ / zéros et pôles de f' : -3 ; $-\frac{3}{2}$; 0

signe de f' : $+ \ 0 \ - \ || \ - \ 0 \ +$ / croissance: $\nearrow M \searrow \searrow m \nearrow$

2. $f'(x) = x(x+2)^2(5x+4)$ / zéros et pôles de f' : -2 ; $-\frac{4}{5}$; 0

signe de f' : $+ \ 0 \ + \ 0 \ - \ 0 \ +$ / croissance: $\nearrow p \nearrow M \searrow m \nearrow$

19. On donne la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{10}(x^3 - 4x + 3)$. Dans un repère Oxy , placer les points du graphe de f dont les abscisses sont : -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 . (Unité sur les axes : 10 carrés.)

Dessiner ensuite en chacun de ces points un segment de la tangente au graphe, sans tracer le graphe.

20. Le graphe des fonctions suivantes, toutes du deuxième degré, est une parabole. Au moyen de la dérivée, déterminer les coordonnées du sommet de cette parabole.

1) $x^2 - 6x + 14$

2) $x^2 + 10x + 21$

3) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{67}{9}$

4) $-x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{236}{49}$

Rép. 1) $(3; 5)$ 2) $(-5; -4)$ 3) $(\frac{2}{3}; 7)$ 4) $(-\frac{3}{7}; 5)$

21. Déterminer le nombre a de façon que le graphe de f ait une pente 3 à l'abscisse 1 :

1) $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$

2) $f(x) = \frac{x-a}{x+1}$

Rép. 1) $a = 2$ 2) $a = 11$

22. Mettre sous forme d'une puissance de a : (on rappelle que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ et que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$)

1) $\sqrt{a}$ 2) $\frac{1}{a^3}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 4) $\sqrt[3]{a^5}$ 5) $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$ 6) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$

Ecrire sans exposants négatifs ou fractionnaires :

7) a^{-5} 8) $a^{-2/3}$ 9) $(x+1)^{-1/2}$ 10) $(2x+3)^{3/2}$ 11) $x^{-9}x^{1/2}$ 12) $(ab)^{3/4}$

Rép. 1) $a^{1/2}$ 2) a^{-3} 3) $a^{-1/2}$ 4) $a^{5/3}$ 5) $a^{-1/3}$ 6) $a^{1/3}$ 7) $\frac{1}{a^5}$ 8) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

9) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 10) $\sqrt{(2x+3)^3}$ 11) $\frac{1}{\sqrt{x^{17}}}$ 12) $\sqrt[4]{a^3b^3}$

DER

23. Dériver :

1. $x^{\frac{1}{2}}$

3. $\sqrt{2x+1}$

5. $\sqrt[3]{x^2}$

2. $\sqrt{x}$

4. $\frac{1}{\sqrt{x}}$

6. $\frac{1}{\sqrt[3]{5x+1}}$

Rép.

1) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

4) $\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

5) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

6) $\frac{-5}{3\sqrt[3]{(5x+1)^4}}$

24. Dériver :

1) $\sqrt[3]{(x+1)^2}$

2) $\sqrt[3]{2x^3-1}$

3) $\frac{1}{\sqrt[5]{3x}}$

4) $\frac{2}{\sqrt{3x}}$

5) $\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

6) $\sqrt[4]{7x+1}$

Rép.

1) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$

2) $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-1)^2}}$

3) $\frac{-3}{5\sqrt[5]{(3x)^6}}$

4) $\frac{-3}{\sqrt{(3x)^3}}$

5) $\frac{-4}{3\sqrt[3]{(2x+1)^5}}$

6) $\frac{7}{4\sqrt[4]{(7x+1)^3}}$

25. Trouver l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a :

1) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $a = 3$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $a = 1$

Rép. 1) $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

2) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

26. Etudier la croissance de $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Rép. $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

x	0	2
$f'(x)$	- indéfini +	
$f(x)$	$\searrow$ m	m $\nearrow$

DER

27. Remarque préliminaire : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ implique $(\sqrt{g(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$.

Dériver :

- | | | |
|--------------------|---------------------|-----------------------------|
| 1) $\sqrt{2x+5}$ | 2) $\sqrt{1-3x}$ | 3) $\sqrt{x^2+3x+5}$ |
| 4) $\sqrt{x^2+2x}$ | 5) $x\sqrt{3x^2+1}$ | 6) $\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}$ |

- Rép.
- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$ | 2) $\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$ | 3) $\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$ |
| 4) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ | 5) $\frac{6x^2+1}{\sqrt{3x^2+1}}$ | 6) $\frac{2(x+1)}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$ |

28. Dériver :

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\sqrt{3x+1}$ | 2) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ | 3) $\frac{1}{\sqrt{1-5x}}$ |
| 4) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ | 5) $x\sqrt{2x+1}$ | 6) $(x+1)\sqrt{x+2}$ |

- Rép.
- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1) $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ | 2) $\frac{-2}{3\sqrt[3]{x^4}}$ | 3) $\frac{5}{2\sqrt{(1-5x)^3}}$ |
| 4) $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ | 5) $\frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$ | 6) $\frac{3x+5}{2\sqrt{x+2}}$ |

29. Etudier la croissance de la fonction f :

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ | 2) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$ |
| 3) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ | 4) $f(x) = \frac{x-5}{x^3}$ |

Rép.

1) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

x	0
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	↘ m ↗

2) $f'(x) = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$

x	
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

3) et 4) : page suivante.

DER

$$3) \quad f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

x	-4	-2	0	
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	↗	M	↘	↗

$$4) \quad f'(x) = \frac{-2x+15}{x^4}$$

x	0	15/2	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	↗	M

30. Etudier la croissance de la fonction f :

$$1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x-5}{x^3}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{(2x+1)^3}{x-2}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{x+5}{(2-x)^3}$$

Rép.

$$1) \quad f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

x	-4	-2	0	
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	↗	M	↘	↗

$$2) \quad f'(x) = \frac{-2x+15}{x^4}$$

x	0	15/2	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	↗	M

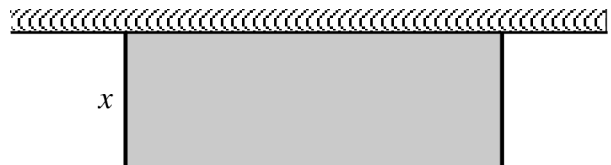
$$3) \quad f'(x) = \frac{(2x+1)^2(4x-13)}{(x-2)^2}$$

x	-1/2	2	13/4	
$f'(x)$	-	0	-	+
$f(x)$	↘	P	↘	↗

$$4) \quad f'(x) = \frac{2x+17}{(2-x)^4}$$

x	-17/2	2	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	m	↗

34. On dispose de barrières d'une longueur totale de 40 m pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur rectiligne. Quelles dimensions faut-il donner à cet enclos pour que le pré qu'il délimite ait une aire maximale ?



Indication : exprimer l'aire de l'enclos en fonction de x (cf. figure), et faire une étude de la croissance de cette fonction.

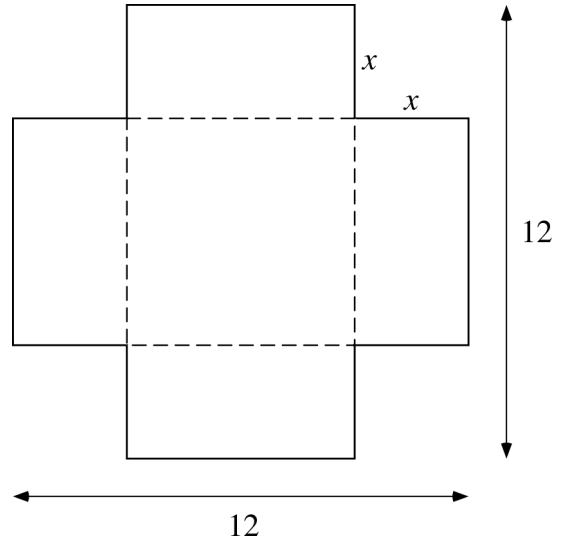
Rép. 10 m, 20 m

DER

35. D'une plaque de carton carrée de 12 cm de côté, on enlève en chaque coin un petit carré de côté x (cf. figure). En pliant selon le traitillé, on peut former une boîte (sans couvercle).

- Exprimer le volume de cette boîte en fonction de x .
- Que doit valoir x si l'on veut que le volume de la boîte soit maximal ?

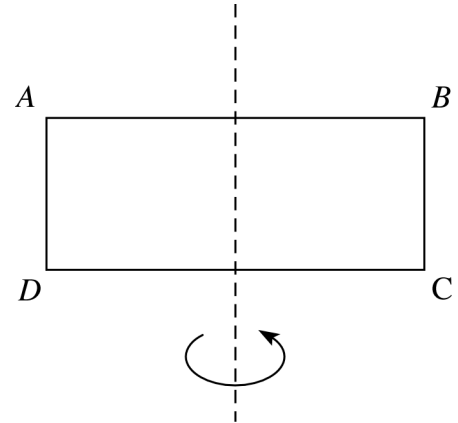
Rép. $x = 2$



36. En faisant tourner un rectangle $ABCD$ de périmètre 12 et de longueur $AB = 2x$ autour de son axe de symétrie perpendiculaire à AB , on obtient un cylindre. Déterminer x pour que le volume V de ce cylindre soit maximal.

Rappel : $V = (\text{aire du cercle de base}) \cdot (\text{hauteur})$

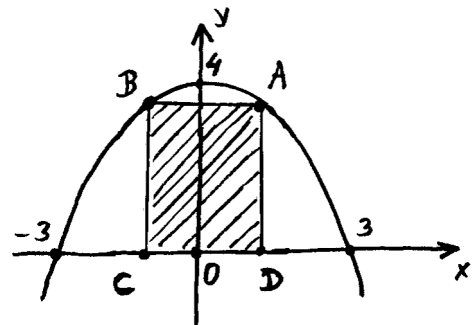
Rép. $x = 2$



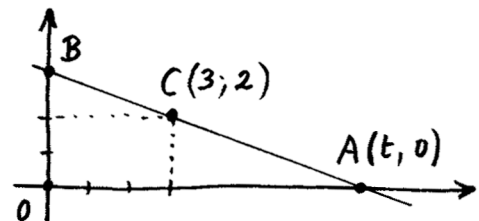
37. Un rectangle $ABCD$ est inscrit entre la parabole $y = -\frac{4}{9}(x^2 - 9)$ et l'axe Ox , comme le montre la figure ci-contre. Soit x l'abscisse de A .

- Exprimer l'aire du rectangle en fonction de x .
- Déterminer x de sorte que l'aire du rectangle soit maximale.

Rép. a) $-\frac{8}{9}(x^3 - 9x)$ b) $x = \sqrt{3}$



38. Une droite passant par le point $C(3; 2)$ coupe l'axe Ox en $A(t, 0)$ et l'axe Oy en B ($t > 3$). Déterminer t afin que l'aire du triangle OAB soit minimale. [Rép. $t = 6$]

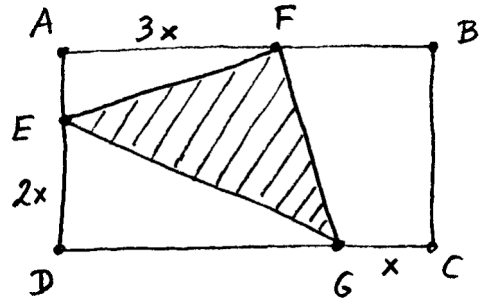


DER

39. Un rectangle $ABCD$ est tel que $AB = 12$ et $BC = 6$. On y inscrit un triangle EFG de sorte que $CG = x$; $ED = 2x$ et $AF = 3x$.

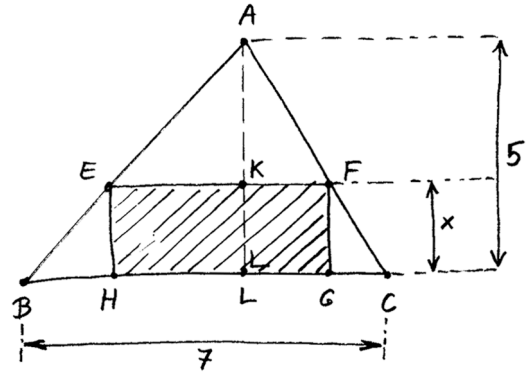
- Exprimer l'aire du triangle EFG en fonction de x .
- Pour quelle valeur de x l'aire de EFG est-elle minimale ? maximale ?

Rép. a) $4x^2 - 15x + 36$ b) $\frac{15}{8}$; 0



40. Dans un triangle ABC , on inscrit un rectangle $EFGH$ tel que EF soit parallèle à BC . On donne $BC = 7$, $h_A = 5$ (hauteur issue de A) et on pose $x = FG$.

- Exprimer EF en fonction de x .
Indication : les triangles ABC et AEF étant semblables, on a la proportion $\frac{AK}{EF} = \frac{AL}{BC}$.
- Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $EFGH$ est-elle maximale ?
Quelle est l'aire maximale ?

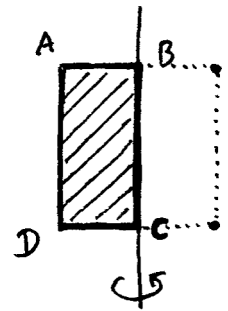


Rép. a) $EF = \frac{7}{5}(5 - x)$ b) $x = \frac{5}{2}$; aire maximale: $\frac{35}{4}$

41. Un rectangle $ABCD$ engendre par rotation autour de son côté BC un cylindre.

- Sachant que le périmètre du rectangle $ABCD$ est 15, exprimer le volume du cylindre en fonction de $x = AB$.
- Déterminer x pour que le volume du cylindre soit maximal, et calculer le volume maximal.

Rép. a) $V(x) = \frac{\pi}{2}(15x^2 - 2x^3)$ b) 5 ; $\frac{125\pi}{2}$



42. Soit $f(x) = \frac{-4(x^2 - 9)}{9}$ et $g(x) = \frac{8(x + 3)}{9}$.

- Calculer les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et g , puis esquisser les deux "courbes" dans un même repère Oxy .
- Déterminer l'abscisse x ($-3 < x < 1$) du plus long segment vertical dont les extrémités sont sur les graphes de f et g .

Rép. a) $(-3; 0)$ et $(1; \frac{32}{9})$ b) $x = -1$

DER

43. Relativement à un repère orthonormé Oxy du plan, on donne le point $P(4; 2)$ et la droite d d'équation $y = 2x - 1$. Soit $M(x, 2x - 1)$ un point variable sur d .

- a) Exprimer la distance de P à M en fonction de x (utiliser la norme du vecteur $\overrightarrow{PM}$).
- b) On pose $f(x) = \|\overrightarrow{PM}\|^2$. Pour quelle valeur de x la distance PM est-elle minimale ?
En déduire les coordonnées de la projection H de P sur d , et la distance de P à d .

Rép. $f(x) = 5x^2 - 20x + 25$ / $H(2; 3)$ / $\delta(P, d) = \sqrt{5}$

44. En appliquant la méthode de l'exercice précédent, calculer les coordonnées de la projection de P sur d :

- a) $P(4; 4)$ $d: y = 3x + 2$ b) $P(-10; 2)$ $d: 3x - 4y + 13 = 0$

Rép. a) $(1; 5)$ b) $(-7; -2)$

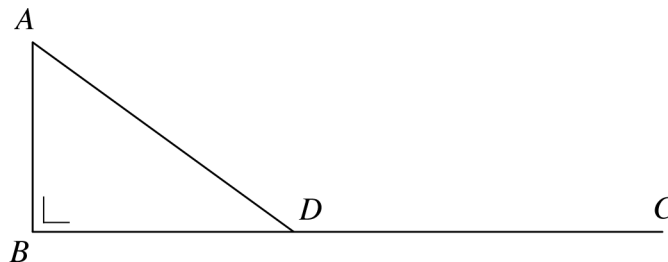
45. On considère la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- a) Déterminer les valeurs de a , b et c pour que son graphe passe par $A(2; 2)$ et $B(3; 7)$ et que la tangente t à la courbe au point P d'abscisse $\frac{2}{3}$ ait une pente de $-\frac{7}{3}$.
- b) Calculer les coordonnées de P , celles du sommet de la courbe, et donner l'équation de t .

Rép. $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$; $P(\frac{2}{3}; \frac{14}{9})$; $S(\frac{5}{4}; \frac{7}{8})$; $y = -\frac{7}{3}x + \frac{28}{9}$

46. On veut produire des briques de 1 litre de lait, à base carrée. Déterminer les dimensions qu'il faut donner à ces briques de manière à minimiser le coût de l'emballage.

47. Une île A est située à 5 km du point B de la côte le plus proche de A . Une usine électrique C , sur la côte, est sise à 10 km de B . On pose une ligne électrique reliant A et C en passant par un point D de la côte. Le coût d'une ligne terrestre est de 3 millions de francs par km, et celui d'une ligne maritime de 5 millions de francs par km. Déterminer la distance x de B à D telle que le coût de la ligne soit minimal.



Rép. coût minimal lorsque $BD = 3,75$ km

FCR

9. Déterminer les pôles de la fonction f puis, pour chaque pôle a trouvé, calculer $u = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$

et $v = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$. En déduire les asymptotes verticales de f , les représenter dans un repère Oxy et

indiquer l'allure du graphe de f au voisinage de ces asymptotes.

$$1) \quad f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x+1}{(x-5)(1-x)}$$

4) $f(x) = \frac{-7}{x^3 + 3x^2}$

$$5) \quad f(x) = \frac{1-x}{x^2+7x+12}$$

6) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x-6}$

Rép. 1) $a=1: u=+\infty; v=+\infty$ / AV: $x=1$

2) $a=2: u=-\infty; v=+\infty / AV: x=2$

3) $a=1: u=-\infty; v=+\infty / a=5: u=+\infty; v=-\infty / \text{AV}: x=1; x=5$

4) $a = -3: u = +\infty; v = -\infty / a = 0: u = -\infty; v = -\infty / \text{AV}: x = -3; x = 0$

5) $a = -4: u = +\infty; v = -\infty / a = -3: u = -\infty; v = +\infty / \Delta V: x = -4; x = -3$

6) $a = -1: u = v = -\frac{1}{7} / a = 6: u = -\infty; v = +\infty / \text{AV}: x = 6$

10. Déterminer les asymptotes verticales et horizontales de la fonction f :

$$1) \quad f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 3x + 2}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$$

4) $f(x) = \frac{x+2}{2x^2+x}$

Rép. 1) $x = 3$; $y = 1$

3) $x = 1$; $x = 2$; $y = 1$

$$2) \quad x = 2; \quad y = 3$$

4) $x = 0$; $x = -\frac{1}{2}$; $y = 0$

11. Etudier le signe des fonctions suivantes :

$$1) \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + x - 6}$$

3) $f(x) = \frac{x-2}{x+3} - 1$

4) $f(x) = \frac{2x}{x-5} - 2$

5) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} - 1$

6) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-3}$

Rép.

1.

x	-3	-2	-1	1					
$f(x)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$

4. $\begin{array}{c|ccc} x & & 5 & \\ \hline f(x) & - & 11 & + \end{array}$

2.

x	-3	1	2
$f(x)$	$+$	11	$-$

 $0 - 11 +$

5.

x	-1	1
$f(x)$	$+$	$-$

3. $\begin{array}{c|ccc} x & & -3 & \\ \hline f(x) & + & || & - \end{array}$

6.

x	-5	-1	3
$f(x)$	$+$	0	$-$

FCR

12. Déterminer les asymptotes verticales et horizontales :

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 3} & 2) f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x - 15} & 3) f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 17}{x^2 + 9} \\ 4) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & 5) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x + 2} & 6) f(x) = \frac{3x^2 - 11x + 13}{3x^2 - 11x - 4} \end{array}$$

Rép. 1) $x = 3$ 2) $x = -5$; $x = 3$; $y = 0$ 3) — 4) —
 5) $x = -2$; $y = 0$ 6) $x = -\frac{1}{3}$; $x = 4$; $y = 1$

13.—

- Déterminer les asymptotes verticales et horizontales de la fonction donnée f .
- Etudier le signe de la fonction $\delta(x) = f(x) - h$ mesurant la "différence d'altitude" entre le graphe de f et l'asymptote horizontale d'équation $y = h$.
- Dans un système d'axes Oxy , représenter les asymptotes de f , puis hachurer les zones du plan dans lesquelles le graphe de f ne passe en tout cas pas, en vertu du signe de $\delta(x)$.
- Esquisser un graphe plausible pour f .

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{2x+1}{x-3} & 2) f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 1}{x(x+2)} \\ 3) f(x) = \frac{-2x^2 - 11x + 12}{x^2 + 6x - 7} & 4) f(x) = \frac{2x^2 - x - 18}{x^2 - 9} \end{array}$$

Rép. 1) AV : $x = 3$ / AH : $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{7}{x-3}$
 zéros et pôles de δ : 3 / signe de δ : — || +
 2) AV : $x = 0$; $x = -2$ / AH : $y = 3$ / $\delta(x) = \frac{1-x}{x(x+2)}$
 zéros et pôles de δ : -2 ; 0 ; 1 / signe de δ : + || - || + 0 -
 3) AV : $x = -7$; $x = 1$ / AH : $y = -2$ / $\delta(x) = \frac{x-2}{x^2+6x-7}$
 zéros et pôles de δ : -7 ; 1 ; 2 / signe de δ : - || + || - 0 +
 4) AV : $x = -3$; $x = 3$ / AH : $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{-x}{x^2-9}$
 zéros et pôles de δ : -3 ; 0 ; 3 / signe de δ : + || - 0 + || -

FCR

14. A l'aide d'une division euclidienne, exprimer les fractions $\frac{N}{D}$ suivantes comme somme d'un polynôme Q et d'une fraction $\frac{R}{D}$ telle que $d^\circ(R) < d^\circ(D)$: $\boxed{\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}}$.

1) $\frac{3x^2 - 8x - 32}{x - 5}$ 2) $\frac{x^4 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$ 3) $\frac{-4x^2 + 8x + 2}{2x + 1}$ 4) $\frac{x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2}$

Rép. 1) $(3x + 7) + \frac{3}{x - 5}$ 2) $(x^2 + 2) + \frac{2x}{x^2 + 1}$
 3) $(-2x + 5) + \frac{-3}{2x + 1}$ 4) $x + \frac{x + 1}{x^2}$

16. On donne une fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$. Au moyen d'une division euclidienne, mettre f sous la forme $Q + \frac{R}{D}$ et vérifier que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{R}{D} = 0$. Donner ensuite l'équation de l'asymptote oblique de f .

1) $\frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ 2) $\frac{2x^2 - 3x - 7}{x - 3}$ 3) $\frac{-x^3 + 5x^2 - 10}{x^2 - 2}$ 4) $\frac{3x^2 - 32}{3 - x}$

Rép. 1) $y = x - 1$ 2) $y = 2x + 3$ 3) $y = -x + 5$ 4) $y = -3x - 9$

17.—

- Déterminer les asymptotes de la fonction donnée f .
- Etudier le signe de la fonction $\delta(x)$ déterminant la position relative du graphe et de l'asymptote horizontale ou oblique.
- Dans un système d'axes Oxy , représenter les asymptotes de f , puis hachurer les zones du plan dans lesquelles le graphe de f ne passe en tous cas pas, en vertu du signe de δ .
- Esquisser un graphe plausible pour f .

1) $\frac{x^2 + 3x - 2}{x + 4}$ 2) $\frac{2x^2 + 3x - 7}{x^2 + x - 2}$ 3) $\frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 5}{2x^2 - 4x + 2}$ 4) $\frac{-2x^2 + 8x + 7}{x^2 - 4x - 5}$

Rép. 1) AV : $x = -4$ / AO : $y = x - 1$ / $\delta(x) = \frac{2}{x + 4}$
 zéros et pôles de δ : -4 / signe de δ : $- \parallel +$
 2) AV : $x = -2$; $x = 1$ / AH : $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{x - 3}{(x + 2)(x - 1)}$
 zéros et pôles de δ : -2 ; 1 ; 3 / signe de δ : $- \parallel + \parallel - 0 +$
 3) AV : $x = 1$ / AO : $y = \frac{1}{2}x - 1$ / $\delta(x) = \frac{x - 3}{2(x - 1)^2}$
 zéros et pôles de δ : 1 ; 3 / signe de δ : $- \parallel - 0 +$
 4) AV : $x = -1$; $x = 5$ / AH : $y = -2$ / $\delta(x) = \frac{-3}{(x - 5)(x + 1)}$
 zéros et pôles de δ : -1 ; 5 / signe de δ : $- \parallel + \parallel -$

FCR

18. Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes. Etudier la position du graphe relativement à l'asymptote horizontale ou oblique (signe de la fonction δ). Esquisser le graphe.

$$1) \frac{2x^2 - x}{x-1} \quad 2) \frac{x^3 - x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} \quad 3) \frac{-3x^2 + x + 33}{9 - x^2} \quad 4) \frac{-x^4 + 9x^3 - 25x^2 + 19x - 14}{x^3 - 6x^2 + 8x}$$

Rép. 1) AV : $x=1$ / AO : $y=2x+1$ / $\delta(x) = \frac{1}{x-1}$
zéros et pôles de δ : 1 / signe de δ : - || +

2) AV : $x=-2$; $x=2$ / AO : $y=x-1$ / $\delta(x) = \frac{2x}{x^2-4}$
zéros et pôles de δ : -2 ; 0 ; 2 / signe de δ : - || + 0 - || +

3) AV : $x=-3$; $x=3$ / AH : $y=3$ / $\delta(x) = \frac{x+6}{(3-x)(3+x)}$
zéros et pôles de δ : -6 ; -3 ; 3 / signe de δ : + 0 - || + || -

4) AV : $x=0$; $x=2$; $x=4$ / AO : $y=-x+3$ / $\delta(x) = \frac{(x+2)(x-7)}{x(x-2)(x-4)}$
zéros et pôles de δ : -2 ; 0 ; 2 ; 4 ; 7 / signe de δ : - 0 + || - || + || - 0 +

19. Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes. Etudier la position du graphe relativement à l'asymptote horizontale ou oblique (signe de la fonction δ). Esquisser le graphe.

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 3x} \quad 2) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4}$$

Rép. 1) AV : $x=0$; $x=3$ / AH : $y=1$ / $\delta(x) = \frac{-18}{x(x-3)}$
zéros et pôles de δ : 0 ; 3 / signe de δ : - || + || -

2) AV : $x=-2$; $x=2$ / AO : $y=x-3$ / $\delta(x) = \frac{4x-10}{x^2-4}$
zéros et pôles de δ : -2 ; 2 ; $\frac{5}{2}$ / signe de δ : - || + || - 0 +

20. Trouver deux polynômes $N(x)$ et $D(x)$ tels que la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ admette les asymptotes d'équations $x=-1$, $x=0$, $x=7$, $y=\frac{2}{7}$, et que 2 soit un zéro de f .

21. Construire une fonction rationnelle admettant les asymptotes $y=2x+5$, $x=2$, $x=3$, et dont le graphe passe par les points $A(1; 12)$ et $B(4; 21)$.

Rép. $f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - 11x + 38}{x^2 - 5x + 6}$

FCR

22. Soit $f(x) = \frac{-x^2 + bx - 7}{x + a}$. Déterminer a et b afin que les asymptotes de f soient $x = 3$ et $y = -x + 1$.

Rép. $a = -3$; $b = 4$

23. Montrer qu'une fonction polynomiale de degré ≥ 2 n'a aucune asymptote.

24. Dériver:

- | | |
|--|---|
| 1) x^7 | 2) $3x^2$ |
| 3) $\frac{2}{5}x^9$ | 4) $\frac{5x^3}{3}$ |
| 5) $2x^3 - 5x^2 + 9$ | 6) $\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{5}x + 1$ |
| 7) $\frac{2x^5}{7} - \frac{3x^2}{5} + 2$ | 8) $(2x + 1)^5$ |
| 9) $(x^3 - 1)^7$ | 10) $(3x^2 + x)^3$ |
| 11) $(2x + 5x^4)^3$ | 12) $\frac{7x^2}{5} - \frac{3x}{7} + 1$ |

Rép. 1) $7x^6$ 2) $6x$ 3) $\frac{18}{5}x^8$ 4) $5x^2$ 5) $6x^2 - 10x$ 6) $\frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{5}$
7) $\frac{10}{7}x^4 - \frac{6}{5}x$ 8) $10(2x + 1)^4$ 9) $21x^2(x^3 - 1)^6$ 10) $3x^2(3x + 1)^2(6x + 1)$
11) $6x^2(2 + 5x^3)^2(1 + 10x^3)$ 12) $\frac{14}{5}x - \frac{3}{7}$

25. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a :

- 1) $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$; $a = 1$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$ 3) $f(x) = \frac{3x - 2}{5x + 1}$; $a = 0$

Rép. 1) $y = 4x - 3$ 2) $y = \frac{1}{4}x + 1$ 3) $y = 13x - 2$

26. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{5}$ et le point $A(-1; -3)$.

Déterminer les équations des tangentes passant par A à la parabole $y = f(x)$.

Rép. $y = \frac{6}{5}x - \frac{9}{5}$ et $y = -2x - 5$

FCR

27. Dériver :

- | | | |
|--------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 1) $(2x+1)^7$ | 2) $(-6x^2+x)^{15}$ | 3) $\frac{x^2+12x-15}{x+1}$ |
| 4) $\frac{1}{2x+1}$ | 5) $\frac{1}{x^4+9}$ | 6) $\frac{x^3}{x+1}$ |
| 7) $\frac{(x-1)^2}{x^3}$ | 8) $\frac{(x-3)^3}{(x^2-2)^4}$ | 9) $\frac{1}{(2x-3)^7}$ |

Rép.

- | | | | |
|---|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| 1) $14(2x+1)^6$ | 2) $15(-12x+1)(-6x^2+x)^{14}$ | 3) $\frac{x^2+2x+27}{(x+1)^2}$ | 4) $\frac{-2}{(2x+1)^2}$ |
| 5) $\frac{-4x^3}{(x^4+9)^2}$ | 6) $\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ | 7) $\frac{(x-1)(-x+3)}{x^4}$ | |
| 8) $\frac{(x-3)^2(-5x^2+24x-6)}{(x^2-2)^5}$ | 9) $\frac{-14}{(2x-3)^8}$ | | |

28. Etudier la *croissance* de f et calculer les coordonnées des "points à tangente horizontale" (= maximums, minimums, paliers).

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 - 6x + 8$ | 2. $f(x) = \frac{-2x^2 + x - 2}{x}$ |
| 3. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ | 4. $f(x) = \frac{6x}{1+x^2}$ |

Rép. 1. $f'(x) = 2x - 6$ / min : (3 ; -1)

2. $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x+1)}{x^2}$ / min : (-1 ; 5) / max : (1 ; -3)

3. $f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}$ / palier : (-1 ; 0) / min : $(2 ; \frac{27}{4})$

4. $f'(x) = \frac{6(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ / min : (-1 ; -3) / max : (1 ; 3)

FCR

29. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

2. $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2$

3. $f(x) = \frac{1}{16}(3x^5 - 15x^4 + 20x^3)$

4. $f(x) = \frac{x^3 + 2}{2x}$

Rép. 1. $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+2)^2$ / $f'(x) = -\frac{3}{2}x(x+2)$ / min : $(-2; 0)$ / max : $(0; 2)$

2. zéros de f : $\pm\sqrt{2}$; ± 2 / $f'(x) = x(3-x^2)$ / max : $(\pm\sqrt{3}; \frac{1}{4})$ / min : $(0; -2)$

3. $f'(x) = \frac{15}{16}x^2(x-2)^2$ / paliers : $(0; 0), (2; 1)$

4. zéro de f : $-\sqrt[3]{2} \cong -1,26$ / $f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$ / min : $(1; \frac{3}{2})$

30. On donne une fonction f et un nombre a . Etudier la croissance de f et déterminer l'équation de la tangente au graphe au point d'abscisse a . Dessiner le graphe avec la tangente trouvée.

1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; $a = 5$

2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$; $a = 3$

3) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$; $a = 1$

Rép. 1) $y = 4x - 17$ 2) $y = 3x - 7$ 3) $y = -x + 1$

31. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{10}{(x-5)^2}$

2. $f(x) = \frac{3x-16}{x-5}$

Rép. 1. $D = \mathbb{R} - \{5\}$ / asymptotes : $x = 5$; $y = 0$ / $\delta(x) = f(x)$ / $f'(x) = \frac{-20}{(x-5)^3}$

2. $D = \mathbb{R} - \{5\}$ / zéro de f : $\frac{16}{3}$ / asymptotes : $x = 5$; $y = 3$ / $\delta(x) = \frac{-1}{x-5}$
 $f'(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$

32.—

a) Trouver une fonction rationnelle f telle que :

- f admet les asymptotes d'équations $y = 2x + 1$, $x = 2$, $x = -3$;
- le graphe de f passe par $A(-2; 0)$ et coupe l'asymptote oblique à l'abscisse 1.

b) Etudier la position relative du graphe de f et de l'asymptote oblique ; esquisser un graphe plausible pour f .

FCR

33. Etudier les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

2) $f(x) = \frac{-2x^2 + x - 2}{x}$

3) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x+1)}$

4) $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 31}{x-2}$

Rép. 1. $D = \mathbb{R}^* /$ asymptotes : $x=0$; $y=x+1$ / $\delta(x) = \frac{1}{x}$ / $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$
max : $(-1 ; -1)$ / min : $(1 ; 3)$

2. $D = \mathbb{R}^* /$ asymptotes : $x=0$; $y=-2x+1$ / $\delta(x) = \frac{-2}{x}$
 $f'(x) = \frac{-2(x^2-1)}{x^2}$ / min : $(-1 ; 5)$ / max : $(1 ; -3)$

3. $D = \mathbb{R} - \{-1\} /$ asymptotes : $x=-1$; $y=\frac{1}{2}x+1$ / $\delta(x) = \frac{2}{x+1}$
 $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)^2}$ / max : $(-3 ; -\frac{3}{2})$ / min : $(1 ; \frac{5}{2})$

4. $D = \mathbb{R} - \{2\} /$ asymptotes : $x=2$; $y=-x+3$ / $\delta(x) = \frac{-25}{x-2}$
 $f'(x) = \frac{-(x-7)(x+3)}{(x-2)^2}$ / min : $(-3 ; 11)$ / max : $(7 ; -9)$

34. Etudier la fonction f donnée par $f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1}$.

Rép. Zéros de f : 0 ; $\frac{1}{2}$ / AV : $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ / AO : $y = x - \frac{1}{2}$ / $\delta(x) = \frac{2x-1}{2(2x^2-1)}$

$f'(x) = \frac{4x^4 - 6x^2 + 2x}{(2x^2-1)^2} = \frac{2x(x-1)(2x^2+2x-1)}{(2x^2-1)^2}$ / Zéros de f' : 0 ; 1 ; $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f(x)$	$-$	$ $	$+$	$+$

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\delta(x)$	$-$	$ $	$+$

x	x_1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	x_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	M

où $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \approx -1,37$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0,37$

FCR

35. Etudier les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$

2) $f(x) = \frac{x^2 - x + 5}{x}$

3) $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$

4) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x}$

Rép. 1) $D = \mathbb{R} - \{1\}$ / zéros de f : -2 ; 0 / asymptotes: $x = 1$; $y = x + 3$ / $\delta(x) = \frac{3}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} \quad / \quad \max: (1 - \sqrt{3}; 0,536) \quad / \quad \min: (1 + \sqrt{3}; 7,464)$$

2) $D = \mathbb{R}^*$ / zéros de f : — / asymptotes: $x = 0$; $y = x - 1$ / $\delta(x) = \frac{5}{x}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2} \quad / \quad \max: (-\sqrt{5}; -5,47) \quad / \quad \min: (\sqrt{5}; 3,47)$$

3) $D = \mathbb{R}$ / zéros de f : 1 ; $\frac{5}{2}$ / asymptote: $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{3(x-3)}{x^2 - 5x + 7}$

$$f'(x) = \frac{-3(x-2)(x-4)}{(x^2 - 5x + 7)^2} \quad / \quad \min: (2; -1) \quad / \quad \max: (4; 3)$$

4) $D = \mathbb{R} - \{-2; 0\}$ / zéro de f : 1 / asymptotes: $x = -2$; $x = 0$; $y = 1$

$$\delta(x) = \frac{-4x+1}{x(x+2)} \quad / \quad f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2(x+2)^2} \quad / \quad \max: (-\frac{1}{2}; -3) \quad / \quad \min: (1; 0)$$

FCR

36. Encore des fonctions à étudier :

$$1) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^3}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{(x+3)^3}{2x(x-5)}$$

Rép. 1) $D = \mathbb{R} - \{-2; 3\}$ / zéros de f : — / asymptotes : $x = -2$; $x = 3$; $y = 0$

$$\delta(x) = f(x) \quad / \quad f'(x) = \frac{-2x+1}{(x+2)^2(x-3)^2} \quad / \quad \max : \left(\frac{1}{2}; -\frac{4}{25}\right)$$

2) $D = \mathbb{R}^*$ / zéro de f : 1 / asymptotes : $x = 0$; $y = 1$ / $\delta(x) = \frac{x-2}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{-2(x-3)}{x^4} \quad / \quad \max : \left(3; \frac{28}{27}\right)$$

3) $D = \mathbb{R}$ / zéro de f : $\sqrt[3]{-2}$ / AO : $y = x$ / $\delta(x) = \frac{-x+2}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2} \quad / \quad \max : (0; 2) \quad / \quad \min : \left(1; \frac{3}{2}\right)$$

4) $D = \mathbb{R} - \{0; 5\}$ / zéro de f : -3 / pôles de f : 0 ; 5 / AV : $x = 0$; $x = 5$

$$\text{AO : } y = \frac{1}{2}x + 7 \quad / \quad \delta(x) = \frac{97x+27}{2x(x-5)} \quad / \quad f'(x) = \frac{(x+3)^2(x-1)(x-15)}{2x^2(x-5)^2}$$

palier : $(-3; 0)$ / $\max : (1; -8)$ / $\min : (15; 19,44)$

LI

1. Déterminer "expérimentalement" (cf. exemple) les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4\sqrt{x} - 8}{x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{3 - \sqrt{2x - 1}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

Exemple

Soit à trouver $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, avec $f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{x - 2}$. A l'aide d'une calculatrice, on établit :

x	$f(x)$
1,9	5,7
1,99	5,97
1,999	5,997
1,9999	5,9997

x	$f(x)$
2,1	6,3
2,01	6,03
2,001	6,003
2,0001	6,0003

D'où : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{x - 2} = 6$.

Rép. a) 1 b) -3 c) -2 d) -1 e) -3 f) 0

LI

2. Calculer :

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x + 2}{x + 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x}{x + 2}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$$

$$10. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - 2h^2 + h}{h}$$

Rép.

$$\begin{array}{llllll} 1. & -2 & 2. & 1 & 3. & 2 \\ 6. & 0 & 7. & 0 & 8. & \frac{3}{2} \\ 4. & 4 & 5. & 0 & 9. & 6 \\ 10. & 1 \end{array}$$

3. Diviser N par D :

$$1) \quad N = x^3 + 3x^2 + 4x + 7$$

$$D = x + 3$$

$$2) \quad N = 3x^2 - 4x + 2$$

$$D = x - 2$$

$$3) \quad N = -x^2 + 2$$

$$D = -x + 1$$

$$4) \quad N = -4x^3 - 2x^2 + 8x + 2$$

$$D = -2x^2 + 3$$

$$\text{Rép. } 1) \quad Q = x^2 + 4 ; \quad R = -5$$

$$2) \quad Q = 3x + 2 ; \quad R = 6$$

$$3) \quad Q = x + 1 ; \quad R = 1$$

$$4) \quad Q = 2x + 1 ; \quad R = 2x - 1$$

4. Vérifier que le nombre a est un zéro du polynôme P , puis factoriser P au moyen d'une division euclidienne par $(x - a)$.

$$1) \quad a = 4 ; \quad P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$$

$$2) \quad a = 5 ; \quad P(x) = x^3 + 3x^2 - 33x - 35$$

$$3) \quad a = -2 ; \quad P(x) = x^3 + 8x^2 + 5x - 14$$

$$4) \quad a = -1 ; \quad P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$$

$$\text{Rép. } 1) \quad (x - 4)(x^2 + x + 1)$$

$$2) \quad (x - 5)(x + 1)(x + 7)$$

$$3) \quad (x + 2)(x - 1)(x + 7)$$

$$4) \quad (x + 1)(x - 3)(2x + 1)$$

LI

5. Calculer :

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 3x^2 - 3x - 4}{(x-4)(x+1)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 + 3x^2 - 33x - 35}{x^2 - 5x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 8x^2 + 5x - 14}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$$

$$5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h}{2h^3 + 1}$$

$$6) \lim_{h \rightarrow 1} \frac{h^3 - 1}{h - 1}$$

Rép. 1) $\frac{21}{5}$ 2) $\frac{72}{5}$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{2}{3}$ 5) 0 6) 3

6. Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x+1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 7}{x+2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)(x+5)}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x - 21}{(x-3)(x+1)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 1}{2x+2}$$

Rép. a) -5 b) $\frac{1}{2}$ c) -1 d) $\frac{11}{3}$ e) $\frac{13}{4}$ f) $\frac{7}{2}$

7. Calculer :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x+123}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{x^2}$$

$$g) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x}$$

$$h) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7}{(1-x)^2}$$

$$j) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{7}{1-x}$$

$$k) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{7}{1-x}$$

$$l) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-8}{x^3}$$

Rép. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) $+\infty$ f) $-\infty$ g) $-\infty$ h) $+\infty$ i) $+\infty$
j) $+\infty$ k) $-\infty$ l) $+\infty$

LI

8. Déterminer "expérimentalement" les limites suivantes :

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x}$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x}$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{x-3}$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x-3}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-10}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-10}$

i) $\lim_{\substack{x \rightarrow 10 \\ x > 10}} \frac{1}{x-10}$

Exemple. Soit à trouver $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$, avec $f(x) = \frac{1}{x-1}$. A l'aide d'une calculatrice, on établit :

$$f(0,9) = -10 ; f(0,99) = -100 ; f(0,999) = -1000 ; f(0,9999) = -10000 ; \dots$$

$$\text{D'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty .$$

Rép. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) 2 g) 0 h) 0 i) $+\infty$

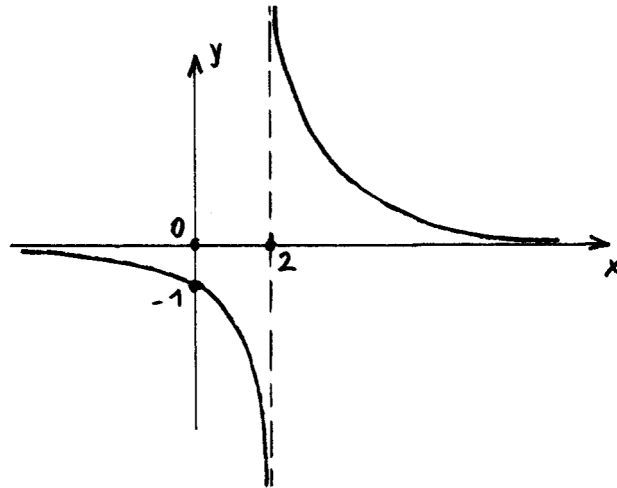
9. Calculer: 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 - \frac{1}{x^2} \right)$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(7 - \frac{1}{x^2} \right)$ 3) $\lim_{h \rightarrow 2} \frac{h^2 - 4}{h^2 - h - 2}$

Rép. 7; $-\infty$; $\frac{4}{3}$

LI

10. Une fonction f est donnée par son graphe. Déterminer les limites indiquées.

1)



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

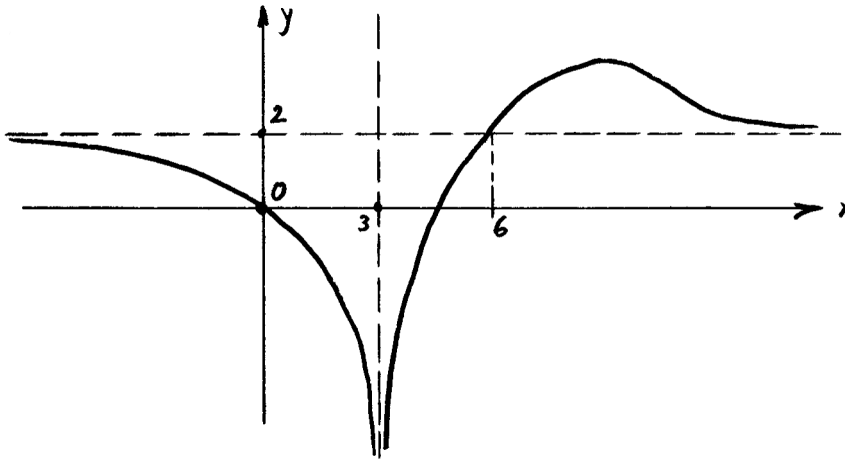
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x)$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2)



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x)$

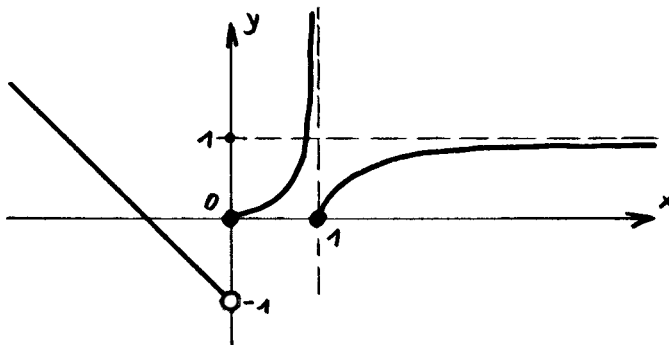
c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

3)



a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$

f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

Rép. 1. a) 0 b) 0 c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) -1
 2. a) 2 b) $-\infty$ c) 0 d) $-\infty$ e) 2 f) 2
 3. a) $+\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) 1 e) -1 f) 0

LI

11. Calculer les limites suivantes :

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 - 5x + 1}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 + x}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x + 2}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 1}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2 + 3x}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 + 5}$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

Rép. 1) $\frac{2}{3}$ 2) 0 3) $-\infty$ 4) $+\infty$ 5) 1 6) $\frac{1}{2}$ 7) $\frac{1}{2}$ 8) 0

12. Dessiner un graphe plausible pour une fonction f telle que :

$$a) \quad f(0) = 2 ; \quad f(4) = -2 ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$$

$$b) \quad f(0) = 3 ; \quad f(5) = 3 ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$$

$$c) \quad f(0) = 3 ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -3$$

13. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 2x - 5}{4x^2 - x} - \frac{3}{x-1} \right).$

Rép. $\frac{1}{2}$

14. Calculer :

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3+1}{2x^2-10x-30}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x^2-2x-3}$$

$$8. \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{-3}{x+1}$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2}{x^2-9}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-2x^2+10x-9}$$

$$10. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-2x+9}{2x^2+1}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+3x^3}{x^2-x^6-10x^4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{2x-9}$$

$$12. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2+3h}{h}$$

Rep.

$$1. \frac{1}{4} \quad 2. 0 \quad 3. -\infty \quad 4. 1/9 \quad 5. 3/2 \quad 6. -7/5$$

$$7. -\infty \quad 8. -\infty \quad 9. 3/2 \quad 10. +\infty \quad 11. 0 \quad 12. 3$$

15. Calculer :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-6x}{(x-2)^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-1}{(x+1)^4}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-2|}{x-2}$$

Rep. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $-\infty$ e) 3 f) -1

LI

16. Calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ lorsque :

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $f(x) = x^2$; $a = 3$ | 2) $f(x) = 7x^2$; $a = 1$ |
| 3) $f(x) = x^3$; $a = 2$ | 4) $f(x) = x^4$; $a = 0$ |

Rép. 1) 6 2) 14 3) 12 4) 0

17. Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque :

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| 1) $f(x) = 3x^2$; $a = 2$ | 2) $f(x) = x + 1$; $a = -2$ |
| 3) $f(x) = 2x^3$; $a = 1$ | 4) $f(x) = (3 - x)^2$; $a = 1$ |

Rép. 1) 12 2) 1 3) 6 4) -4

18. Soit f une fonction. Déterminer la pente de la tangente au graphe de f , au point d'abscisse a .

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 1) $f(x) = (x+1)^2$; $a = 3$ | 2) $f(x) = -2x + 1$; $a = 10$ |
| 3) $f(x) = -x^2$; $a = 2$ | 4) $f(x) = (x-1)^3$; $a = 3$ |

Rép. 1) 8 2) -2 3) -4 4) 12

19. On donne une fonction f et un nombre a . Déterminer la pente du graphe de f à l'abscisse a .

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; $a = 5$ | 2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$; $a = 3$ |
| 3) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$; $a = 1$ | 4) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $a = -3$ |

Rép. 1) 4 2) 3 3) -1 4) $-\frac{1}{4}$

20. Calculer :

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{1 - 5x^3}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x^3}$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^3 - 20x^2)$ | 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3 - \frac{1}{x}}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x - 6}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + 3x^5}{2 - 2x^7 + 5x}$ |

Rép. 1) $-\frac{2}{5}$ 2) $+\infty$ 3) $+\infty$ 4) $-\infty$ 5) 4 6) 0

LI

21. Dessiner un graphe plausible pour une fonction f telle que :

$$1) \quad f(0) = -1 ; \quad f(3) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$$

$$2) \quad f(-3) = 2 ; \quad f(-2) = -3 ; \quad f(0) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$$

22. Calculer la pente du graphe de f à l'abscisse a :

$$1) \quad f(x) = 1 - 3x^2 ; \quad a = 1$$

$$2) \quad f(x) = x^2 - 5x + 3 ; \quad a = -2$$

Rép. 1) -6 2) -9

23. Calculer :

$$1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{-5}{(x-3)(x-4)}$$

$$2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{2x+3}{(x+1)(x-7)}$$

$$3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1-x}{x^2-5x+6}$$

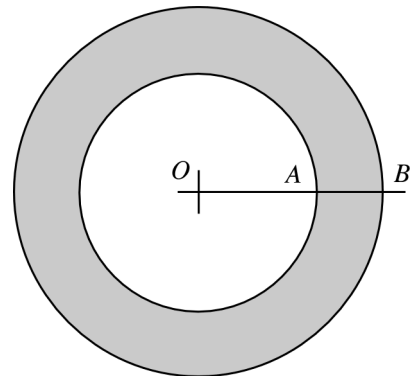
$$4) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1/2 \\ x < -1/2}} \frac{x+5}{6x^2+x-1}$$

Rép. 1) $-\infty$ 2) $+\infty$ 3) $+\infty$ 4) $+\infty$

24. On considère un "anneau" variable de centre fixe O , tel que $OA = x$ et $AB = \frac{1}{x}$ (cf. figure).

Soit $S(x)$ l'aire de cet anneau (= aire grisée).

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.



Rép. $+\infty$; 2π

LI

25. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15}$

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{9 - x}{x^2 - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2 - 2x + 2}$

4) $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{4 - x}{2 + x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, où $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

6) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{1 - x}{3x^2 + 2x - 1}$

7) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{3x^2 - 13x + 14}$

Rép. 1) $\frac{3}{4}$ 2) $-\infty$ 3) -1 4) $-\infty$ 5) -1 6) $+\infty$ 7) $-\infty$

LI**30.** Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{x - 7}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x - 1}$

5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3}$

6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{\sqrt{x + 1} - 2}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x + 6}}{x + \sqrt{2 - x}}$

Rép. 1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ 4) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 5) 3 6) $-\frac{2}{3}$ 7) 2 8) $\frac{5}{3}$

31. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5x + 3\sqrt{x^2 + 1} \right)$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5x + 3\sqrt{x^2 + 1} \right)$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

Rép. 1) 1 2) -1 3) $+\infty$ 4) $-\infty$ 5) 0 6) $-\infty$ 7) $\frac{1}{2}$ 8) $-\frac{1}{2}$

32. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4} \right)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x > 8}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{8} + \sqrt{x - 8}}{\sqrt{x^2 - 64}}$

Rép. 1) 1 2) -1 3) 0 4) -2 5) $\frac{1}{2}$ 6) $\frac{1}{4}$