

ANALYSE 3^{MR}

EXERCICES

DER

20. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a :

1) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x$; $a = \frac{3}{4}$

2) $f(x) = 5x^2 + 6x + 2$; $a = -1$

3) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$

4) $f(x) = \frac{3x-2}{5x+1}$; $a = 0$

Rép. 1) $y = 4x - \frac{27}{16}$ 2) $y = -4x - 3$ 3) $y = \frac{1}{4}x + 1$ 4) $y = 13x - 2$

27. Remarque préliminaire : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ implique $(\sqrt{g(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$.

Dériver :

1) $\sqrt{2x+5}$ 2) $\sqrt{1-3x}$ 3) $x\sqrt{3x^2+1}$ 4) $\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}$

Rép. 1) $\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$ 2) $\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$ 3) $\frac{6x^2+1}{\sqrt{3x^2+1}}$ 4) $\frac{2(x+1)}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

29. Etudier la croissance de la fonction f :

1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ 2) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$ 3) $f(x) = \frac{(2x+1)^3}{x-2}$ 4) $f(x) = \frac{x+5}{(2-x)^3}$

Rép.

1) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

x	0		
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$

2) $f'(x) = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$

x		
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

3) $f'(x) = \frac{(2x+1)^2(4x-13)}{(x-2)^2}$

x	$-1/2$	2	$13/4$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	p	$\nearrow$

4) $f'(x) = \frac{2x+17}{(2-x)^4}$

x	$-17/2$		2		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$		$\nearrow$

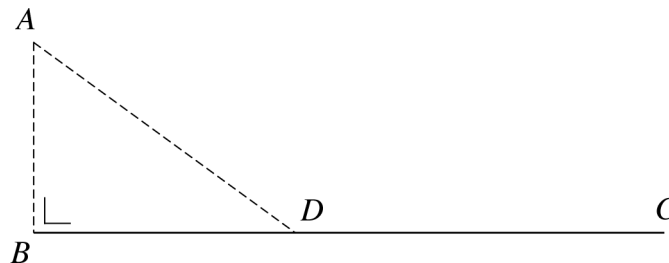
DER

38. Soit $f(x) = -\frac{4}{9}(x^2 - 9)$ et $g(x) = \frac{8}{9}(x + 3)$.

- a) Calculer les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et g , puis esquisser les deux "courbes" dans un même repère Oxy .
- b) Déterminer l'abscisse x ($-3 < x < 1$) du plus long segment vertical dont les extrémités sont sur les graphes de f et g .

Rép. a) $(-3; 0)$ et $(1; \frac{32}{9})$ b) $x = -1$

43. Une île A est située à 5 km du point B de la côte le plus proche de A . Une usine électrique C , sur la côte, est sise à 10 km de B . On pose une ligne électrique reliant A et C en passant par un point D de la côte. Le coût d'une ligne terrestre est de 3 millions de francs par km, et celui d'une ligne maritime de 5 millions de francs par km. Déterminer la distance x de B à D telle que le coût de la ligne soit minimal.



Rép. coût minimal lorsque $BD = 3,75$ km

68. Un triangle ABC rectangle en B engendre un cône par rotation autour de BC . Etudier la variation du volume de ce cône en fonction de $\alpha = \widehat{BAC}$, le côté AC restant constamment égal à 1.

Rép. le volume est maximal lorsque $\alpha = 35,26^\circ$.

70. Incrire entre les courbes qui représentent les fonctions f et g le plus grand segment possible parallèle à l'axe Oy .

- 1) $f(x) = \frac{x^2}{8}$; $g(x) = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 4$)
- 2) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$

Rép. abscisse du plus long segment : 1) $\sqrt[3]{4}$ 2) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$

DER

71. Trouver l'angle d'intersection des graphes des fonctions f et g :

1) $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3$ 2) $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{x^2}{4} + 3$ 3) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$

Rép. 1) 0 ; $8,1^\circ$ 2) $30,96^\circ$; $30,96^\circ$ 3) $70,5^\circ$

85. Soit $a, b > 0$. Déterminer le rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire dans l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Rép. longueur : $a\sqrt{2}$; largeur : $b\sqrt{2}$

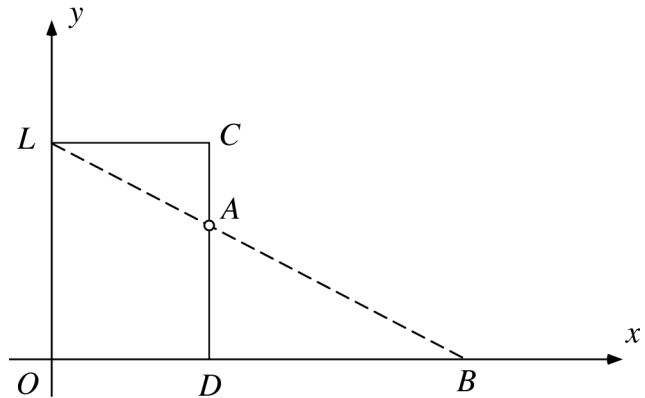
86. Deux mobiles partent au même instant d'un même point. Ils décrivent chacun une demi-droite à vitesse constante v_1 , respectivement v_2 , les deux demi-droites formant un angle α . A quelle vitesse ces deux mobiles s'éloignent-ils l'un de l'autre ?

Rép. $\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}$

87. Un objet ponctuel A , lâché de $C(a, h)$ au temps $t = 0$, tombe verticalement. Une source lumineuse est placée en L . Déterminer la vitesse de l'ombre B de A sur le sol.

On sait que la distance parcourue par A au temps t est $\frac{1}{2}gt^2$.

Rép. $\frac{-4ah}{gt^3}$



88. Un tapis roulant débite du gravier à raison de 2 m^3 par seconde. Le gravier s'entasse en formant un cône de hauteur égale au rayon. A quelle vitesse la hauteur de ce cône augmente-t-elle ?

Rép. $\sqrt[3]{\frac{2}{9\pi t^2}}$

89. A midi, un navire B est à 40 km à l'est d'un navire A . A se déplace à la vitesse de 20 km/h dans la direction 30° Est, tandis que B se déplace à la vitesse de 10 km/h dans la direction 30° Ouest (les angles sont mesurés par rapport à la direction Nord). A quelle heure les navires seront-ils le plus proche l'un de l'autre ? Quelle sera alors la position de B relativement à A ? (On admet que la surface de la mer est plane.)

Rép. à 14 h ; B est alors à 20 km de A dans la direction 150° Est

DRV

10. Calculer les limites suivantes au moyen de la règle de L'Hospital :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x + \cos x - 1}{3x + \sin(2x)}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^7 - 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cot^2(x)}$

Rép. 1) 5 2) $\frac{2}{5}$ 3) 0 4) 3 5) $\frac{5}{7}$ 6) $\frac{1}{2}$

11. Calculer les limites suivantes au moyen de la règle de L'Hospital :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{x^3 - 3x + 2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - \sin(bx)}{\sin(ax) + \sin(bx)} \quad (a \neq -b)$

Rép. 1) 4 2) 1 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{2}{\pi}$ 5) $\frac{a-b}{a+b}$

12. Calculer les limites suivantes au moyen de la règle de L'Hospital :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{a}{x}\right)}{\tan\left(\frac{a+b}{x}\right)}$

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2(2x)}$

4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

5) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^2 + x}$

7) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

Rép. 1) $\frac{a}{a+b}$ 2) $+\infty$ 3) $\frac{1}{8}$ 4) $\cos a$ 5) 0 6) 1 7) $\frac{1}{2}$ 8) 1

13. A partir du théorème sur la dérivation d'une fonction réciproque, établir que :

1) $(\operatorname{Arccos})'(b) = \frac{-1}{\sqrt{1-b^2}}$

2) $(\operatorname{Arctan})'(b) = \frac{1}{1+b^2}$

DRV

14. Sans l'aide d'une calculatrice, déterminer :

- a) $\text{Arcsin}(1)$; $\text{Arcsin}(-1)$; $\text{Arcsin}(-\frac{1}{2})$
- b) $\text{Arccos}(0)$; $\text{Arccos}(-1)$; $\text{Arccos}(-\frac{1}{2})$
- c) $\text{Arctan}(-1)$; $\text{Arctan}(0)$; $\text{Arctan}(\sqrt{3})$

Rép. a) $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{2\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{3}$

14 BIS. Trouver l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- a) $\text{Arcsin}(3x+5)$ b) $\text{Arccos}\left(\frac{2}{x-1}\right)$ c) $\text{Arctan}(4x)$ d) $\text{Arccot}\left(\frac{1}{x}\right)$

Rép. a) $\left[-2 ; -\frac{4}{3}\right]$ b) $] -\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty[$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}^*$

15. Retrouver la formule de dérivation pour $\text{Arcsin}(x)$ en dérivant de deux manières la fonction composée $\text{Arcsin}(\sin x)$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

16. Dériver :

- 1) $x \text{Arcsin } x$ 2) $\frac{\text{Arccos } x}{x^2}$ 3) $\text{Arctan}(5x)$ 4) $\text{Arccot}(1+x^2)$

Rép. 1) $\frac{\sqrt{1-x^2} \text{Arcsin } x + x}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $\frac{-x - 2\sqrt{1-x^2} \text{Arccos } x}{x^3 \sqrt{1-x^2}}$
3) $\frac{5}{1+25x^2}$ 4) $\frac{-2x}{2+2x^2+x^4}$

17. Déterminer l'ensemble de définition, puis dériver :

- a) $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $f(x) = \frac{\text{Arctan}(2x)}{4x^2+1}$

Rép. a) $D =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$; $f'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
b) $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{2 - 8x \text{Arctan}(2x)}{(4x^2+1)^2}$

DRV

18. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en a .

[Il faut donc vérifier que la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand $h \rightarrow 0$ n'existe pas.]

1) $f(x) = |x|$; $a = 0$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ x^3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$; $a = 1$

3) $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$; $a = 1$

4) $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$; $a = 0$

EF

1. Etudier la convexité des fonctions suivantes et donner les coordonnées des points d'inflexion.

1) $f(x) = x^3 - 3x$

2) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2$

3) $f(x) = (x-1)^3(x+1)$

4) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 3x$

Rép. 1) $(0; 0)$

2) $(-1; -\frac{3}{4}), (1; -\frac{3}{4})$

3) $(0; -1), (1; 0)$

4) $(-1; \frac{52}{15}), (0; 0), (1; -\frac{52}{15})$

2. Etudier les fonctions suivantes, convexité comprise.

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - \frac{11}{3}$

2) $f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 6x^3 + 12x^2)$

3. Trouver l'abscisse des extremums, *sans* tableau de croissance :

1) $f(x) = x^2(1-x)^2$

2) $f(x) = \sin x + \cos x$

3) $f(x) = \sin x \sin(a-x)$

4)

Rép. 1) min : $x=0$, $x=1$; max : $x=\frac{1}{2}$

2) min : $x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$; max : $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

3) min : $x = \frac{a+\pi}{2} + k\pi$; max : $x = \frac{a}{2} + k\pi$

4. Soit f une fonction telle que $f''(x) = x^2 - 1$. Trouver f sachant que son graphe passe par le point $A(1; 1)$, en lequel il admet pour tangente la droite d'équation $x + 12y = 13$.

Rép. $f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 6x^2 + 7x + 10)$

5. La fonction f , deux fois dérivable, vérifie $f(1) = 1$ et $f''(1) \neq 2$. Quelles autres hypothèses doit-on faire sur f pour que g , définie par $g(x) = x f(x)$, admette un maximum en $x = 1$?

Rép. $f'(1) = -1$ et $f''(1) < 2$

6. Déterminer les abscisses des points d'inflexions des fonctions suivantes :

1) x^3

2) $\frac{x^3 - 8}{x}$

3) $x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

4) x^4

5) $\frac{6x}{1+x^2}$

Rép. 1) 0 2) 2 3) 1 4) néant 5) $0; \pm\sqrt{3}$

7. Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{x - 7}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x - 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{\sqrt{x + 1} - 2}$$

Rép. 1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ 4) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 5) 3 6) $-\frac{2}{3}$

8. Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x + 3\sqrt{x^2 + 1})$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x + 3\sqrt{x^2 + 1})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$$

Rép. 1) 1 2) -1 3) $+\infty$ 4) $-\infty$ 5) 0 6) $-\infty$ 7) $\frac{1}{2}$ 8) $-\frac{1}{2}$

9. Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4})$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4})$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x > 8}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{8} + \sqrt{x - 8}}{\sqrt{x^2 - 64}}$$

Rép. 1) 1 2) -1 3) 0 4) -2 5) $\frac{1}{2}$ 6) $\frac{1}{4}$

10. Etudier la croissance de la fonction f :

$$1) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x+2}$$

$$2) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}}$$

11. Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes de la fonction f :

$$1) \quad f(x) = x + 2 + \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$3) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

4)

12. Etudier les fonctions suivantes :

$$1) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (\text{convexité comprise})$$

$$2) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x+1}$$

$$3) \quad f(x) = x + \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$$

$$4) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

$$5) \quad f(x) = x\sqrt{1-x} \quad (\text{convexité comprise})$$

$$6) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$7) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - x$$

$$8) \quad f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$$

Rép. (>> fin de la série)

13. Parmi tous les cônes de révolution d'aire latérale π , quel est celui dont le volume est maximal ? *Indication* : exprimer le volume en fonction du rayon du cercle de base.

Rép. celui dont le rayon de base est $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

14. Résoudre les équations :

$$a) \quad \sin x = 0$$

$$b) \quad \cos x = 0$$

$$c) \quad \tan x = 0$$

$$d) \quad \tan x = 1$$

$$e) \quad \sin x = -1$$

$$f) \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$g) \quad \sin x = \cos x$$

$$h) \quad \sin x + \cos x = 0$$

$$i) \quad \sin x = 0,2$$

$$j) \quad \sin(2x) = 0$$

Rép. a) $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) b) $\frac{\pi}{2} + k\pi$ c) $k\pi$ d) $\frac{\pi}{4} + k\pi$

e) $\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ f) $\pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ g) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ h) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$

i) $11,5^\circ + k \cdot 360^\circ / 168,5^\circ + k \cdot 360^\circ$ j) $k \cdot \frac{\pi}{2}$

15. Résoudre :

1) $2 \tan^2 x - 3 \tan x + 1 = 0$

2) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$

3) $3 \sin^2 t + \cos^2 t - 2 = 0$

4) $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$

Rép. 1) $\frac{\pi}{4} + k\pi / 26,565^\circ + k \cdot 180^\circ$

2) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi / \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

3) $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

4) $k \cdot 2\pi / \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

16. Etudier le signe de f entre 0 et 2π :

1) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

2) $f(x) = \frac{\cos(2x)}{1 - \sin x}$

Rép. 1) zéros et pôles de f : $0; \pi; 2\pi$ / signe de f : $0 + \parallel - 0$

2) zéros et pôles de f : $\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$ / signe de f : $+ 0 - \parallel - 0 + 0 - 0 +$

17. Etudier la croissance de f entre 0 et 2π :

1) $f(x) = \sin^2 x - 1$

2) $f(x) = \cos^2 x + \sin x + 17$

Rép. 1) $f'(x) = 2 \sin x \cos x$ / zéros et pôles de f' : $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$
signe de f' : $0 + 0 - 0 + 0 - 0$ / croiss. de f : $m \nearrow M \searrow m \nearrow M \searrow m$

2) $f'(x) = \cos x(1 - 2 \sin x)$ / zéros et pôles de f' : $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}$
signe de f' : $+ 0 - 0 + 0 - 0 +$ / croiss. de f : $\nearrow M \searrow m \nearrow M \searrow m \nearrow$

18. Etudier les fonctions suivantes entre 0 et 2π . Points à traiter : signe de f , croissance, points à tangente horizontale, esquisse du graphe.

1) $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

2) $f(x) = \sin x - \sin^2 x$

Rép. 1) zéros de f : $\frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{10\pi}{6}$ / $f'(x) = 2 \cos x(2x - \frac{\pi}{3})$
zéros de f' : $\frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}; \frac{23\pi}{12}$ / 2 max. d'ordonnée 1 / 2 min. d'ordonnée -1

2) zéros de f : $0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi$ / $f'(x) = \cos x(1 - 2 \sin x)$
zéros de f' : $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}$ / max: $(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{4}); (\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{4})$ / min: $(\frac{\pi}{2}; 0); (\frac{3\pi}{2}; -2)$

EF

19. Etudier les fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1) $f(x) = \sin^2 x \cos(2x)$ | 2) $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ (avec courbure) |
| 3) $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos x$ (avec courbure) | 4) $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ |
| 5) $f(x) = \frac{4 \cos^2 x - 1}{2 \cos x}$ | 6) $f(x) = \frac{\tan x}{1 - 2 \sin x}$ |

Rép. (>> fin de la série)

20. On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si p est une période de f , kp en est également une.
 b) Démontrer que si p est **la** période de f , toute période de f est du type kp , avec $k \in \mathbb{N}^*$.

21. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- a) Démontrer que si p est une période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est une période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.
 b) Démontrer que si p est **la** période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est **la** période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.

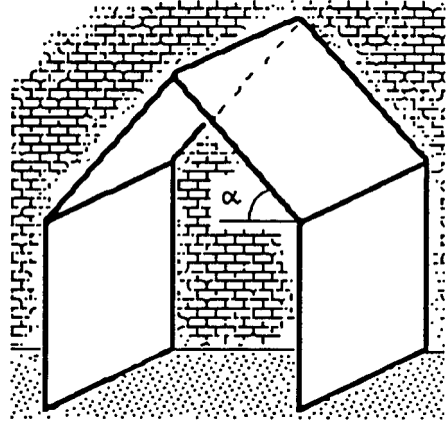
22. Montrer que p est **la** période de la fonction f :

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) $p = \pi$; $f(x) = \sin^2(x)$ | b) $p = 12\pi$; $f(x) = \sin(x/3) - \cos(x/2)$ |
|-----------------------------------|---|

23. Avec quatre planches carrées de côté a , on fabrique une niche à chien contre le mur d'une maison (cf. figure).

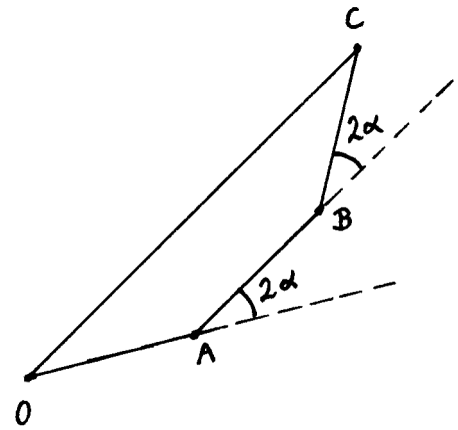
Déterminer l'angle α afin que le volume de la niche soit maximal.

Rép. volume de la niche :
 $a^3(2 \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha)$;
 maximal lorsque $\alpha = 21,47^\circ$



24. Dans la figure ci-contre, $OA = AB = BC = 1$.
 L'angle α est compris entre 0° et 60° . Déterminer α
 de sorte que l'aire du trapèze soit maximale.

Rép. aire du trapèze : $(1 + \cos(2\alpha)) \sin(2\alpha)$;
 maximale lorsque $\alpha = 30^\circ$



12.1

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} ; D = [-1; 1] ; \text{paire} ;$$

x	-1	1
f(x)	0	0

$$; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1	0	1
f'(x)	/	+	0 - / / /
f(x)	m ↗ M ↘ m		

$$\text{max} : (0; 1)$$

$$\text{min} : (-1; 0), (1; 0)$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1	1
f''(x)	/	- / / /
f(x)	⌒	

Pas d'asymptotes. Tangentes verticales en $(-1; 0)$ et $(1; 0)$

12.2

$$D = (]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[) - \{-1\}$$

x	-1	1	3
f(x)	-	+	0 / / / 0 +

$$f'(x) = \frac{3x-5}{(x+1)^2\sqrt{(x-1)(x-3)}} ;$$

x	-1	1	3
f'(x)	-	- / / / /	+
f(x)	↘	↘ m	m ↗

$$AV: x = -1 ; AHD: y = 1 ; AHG: y = -1$$

Graphes 1 asymptotes: $(\frac{1}{3}; 1)$

Tangentes verticales en $(1; 0)$ et $(3; 0)$

EF : Réponses

12.3

$$D =]-\infty; -1[\cup [2; +\infty[$$

x	-2	-1	2
f(x)	-	0	+

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2\sqrt{(x-2)(x+1)^3}}$$

x	-1	2
f'(x)	+	+
f(x)	↗	↘

min : (2; 2)

$$AO : y = x + 1 \quad (G + D)$$

Intersection avec l'asymptote: —

Tangente verticale en (2; 2)

12.4

$$D =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$$

x	0	2
f(x)	+	+

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}(x-2)^2}$$

x	0	2	3
f'(x)	-	-	0
f(x)	↘	↘	↗

min : (0; 0) et (3; 3√3) ; $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$

$$AV : x = 2 ; \quad AOD : y = x + 1 ; \quad AOG : y = -x - 1$$

Intersection avec les asymptotes : $(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$

EF : Réponses

12.5

$$D =]-\infty; 1]$$

x	0	1
f(x)	-	0

$$f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

x	2/3	1
f'(x)	+	0
f(x)	↗ M	↘ m

$$\max: (2/3; \frac{2}{9}\sqrt{3})$$

$$\min: (1; 0)$$

Pas d'asymptotes ; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$ (tangente verticale)

$$f''(x) = \frac{3x-4}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

x	1
f''(x)	-
f(x)	∩

12.6

$$D =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$$

x	-1	1
f(x)	+	0

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}$$

x	-1	1
f'(x)	-	-
f(x)	↘ m	↘

AV: x=1 ; AH: y=1 (G+D) ; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -\infty$

Intersection avec les asymptotes: —

EF : Réponses

12.7

$$D =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[; \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 3 \\ \hline f(x) & + \boxed{1} & \boxed{-3} - \end{array}$$

$$f'(x) = \frac{x-1-\sqrt{x^2-2x-3}}{\sqrt{x^2-2x-3}} ; \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 3 \\ \hline f'(x) & - & + \\ \hline f(x) & \searrow m & m \nearrow \end{array}$$

AHD: $y = -1$; AOG: $y = -2x + 1$; pas d'AV
 Graphe $\cap$ asymptotes : — ;
 tangentes verticales en $(-1; 1)$ et $(3; -3)$

12.8

$$D = \mathbb{R} ; \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 \\ \hline f(x) & + 0 - \end{array} ; \quad f'(x) = \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline f'(x) & - 0 - \parallel - \\ \hline f(x) & \searrow p & \searrow "i" \searrow \end{array} ; \quad AO: y = -x \text{ (G+D)}$$

palier: $(0; 1)$; tang. verticale en $(1; 0)$

19.1

$D = \mathbb{R}$; période : π ; fonction paire

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & \pi/4 & 3\pi/4 & \pi \\ \hline f(x) & 0 & + 0 & - 0 & + 0 \end{array} ; \quad f'(x) = 2 \sin x \cos(3x)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{2} & \frac{5\pi}{6} & \pi \\ \hline f'(x) & 0 & + 0 & - 0 & + 0 & - 0 \\ \hline f(x) & m & \nearrow M & \searrow m & \nearrow M & \searrow m \end{array}$$

min: $(0; 0)$, $(\frac{\pi}{2}; -1)$, $(\pi; 0)$
 max: $(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{8})$, $(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{8})$

EF : Réponses

19.2

$D = \mathbb{R}$; période : 2π

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f'(x)$	+	0	-	+

$$f'(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	2π
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m

$$\text{max: } \left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$$

$$\text{min: } \left(\frac{7\pi}{6}; -2\right)$$

$$f''(x) = -\sin x - \sqrt{3} \cos x$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f''(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$\cap$	i	$\cup$	i

$$\text{pt. d'inf. : } \left(\frac{2\pi}{3}; 0\right)$$

$$\left(\frac{5\pi}{3}; 0\right)$$

19.3

$D = \mathbb{R}$; période : 2π ; fonction paire

x	0	$65,53^\circ$	$294,47^\circ$	2π
$f'(x)$	-	0	+	0

$$f'(x) = 2 \sin x (1 + \cos x)$$

x	0	π	2π
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	m	$\nearrow$	M

$$\text{min: } (0; -2) \text{ et } (2\pi; -2)$$

$$\text{max: } (\pi; 2)$$

$$f''(x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$$

x	0	$\pi/3$	π	$5\pi/3$	2π
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	i	$\cap$	$\cap$	i

$$\text{pts d'inf. :}$$

$$\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{3}; -\frac{1}{4}\right)$$

EF : Réponses

19.4

$D = \mathbb{R}$; période : 2π ; fonction impaire

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \pi & 2\pi \\ \hline f(x) & 0 & + & 0 \end{array} \quad ; \quad f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} ;$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & \pi/3 & 5\pi/3 & 2\pi \\ \hline f'(x) & + & 0 & - & 0 & + \\ \hline f(x) & \nearrow & M & \searrow & m & \nearrow \end{array}$$

$$\max : \left(\frac{\pi}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\min : \left(\frac{5\pi}{3} ; -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

INT

1. On donne une fonction de f par $f(x)$. Trouver une primitive de f .

1) $\frac{5}{3}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 1$

2) $x^3 - 5x^2 + 3x - 2$

3) $x^2 - 5x + 6$

4) $2x - 1$

5) $\frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$

6) $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

7) $5x^2 - 2x + 3$

8) $-x^4 - 5x + 3$

Rép. 1) $\frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + x$ 2) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$ 3) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$ 4) $x^2 - x$
5) $\frac{1}{12}x^4 - x^2 + x$ 6) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x$ 7) $\frac{5}{3}x^3 - x^2 + 3x$ 8) $-\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 3x$

2. Trouver une primitive de la fonction f .

1) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$

2) $f(x) = \frac{5x^2}{7}$

3) $f(x) = 1 + x^{-5}$

4) $f(x) = 6x^3 - x + 3x^{-2}$

5) $f(x) = x^{2/7}$

6) $f(x) = 3x + 2 + x^{-2/3}$

7) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$

8) $f(x) = \frac{1}{x^5} + \sqrt[3]{x^4}$

Rép. 1) $\frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$ 2) $\frac{5}{21}x^3$ 3) $x - \frac{1}{4x^4}$ 4) $\frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x}$
5) $\frac{7}{9}\sqrt[7]{x^9}$ 6) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + 3\sqrt[3]{x}$ 7) $\frac{-1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ 8) $\frac{-1}{4x^4} + \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}$

3. Trouver une primitive :

a) $f(x) = 2(2x + 1)^2$

b) $f(x) = 4x(2x^2 + 1)^2$

c) $f(x) = (5 - 4x)(5x - 2x^2)^3$

d) $f(x) = 4(2x + 1)^3$

e) $f(x) = 8x(1 - 2x^2)^5$

f) $f(x) = 12x(2 - 3x^2)^7$

g) $f(x) = (3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)^5$

h) $f(x) = (6x^2 - 4)(x^3 - 2x + 1)^4$

i) $f(x) = 5(2x + 3)^{-5}$

j) $f(x) = (12x^2 + 10)(5x + 2x^3)^{-4}$

Rép. a) $\frac{1}{3}(2x + 1)^3$ b) $\frac{1}{3}(2x^2 + 1)^3$
c) $\frac{1}{4}(5x - 2x^2)^4$ d) $\frac{1}{2}(2x + 1)^4$
e) $-\frac{1}{3}(1 - 2x^2)^6$ f) $-\frac{1}{4}(2 - 3x^2)^8$
g) $\frac{1}{6}(x^3 + 2x + 1)^6$ h) $\frac{2}{5}(x^3 - 2x + 1)^5$
i) $-\frac{5}{8}(2x + 3)^{-4}$ j) $-\frac{2}{3}(5x + 2x^3)^{-3}$

INT

4. On donne une fonction de f par $f(x)$. Trouver une primitive de f .

1) $(2x+1)^3$

2) $(2-x)^{12}$

3) $6x(3x^2+1)^2$

4) $(2x-3)(x^2-3x+1)^5$

5) $6x(1-x^2)^3$

6) $(1-2x)^2$

7) $2x+1-\frac{1}{x^2}$

8) $\frac{1}{(x-1)^2}$

Rép. 1) $\frac{1}{8}(2x+1)^4$ 2) $-\frac{1}{13}(2-x)^{13}$ 3) $\frac{1}{3}(3x^2+1)^3$ 4) $\frac{1}{6}(x^2-3x+1)^6$

5) $-\frac{3}{4}(1-x^2)^4$ 6) $-\frac{1}{6}(1-2x)^3$ 7) $x^2+x+\frac{1}{x}$ 8) $\frac{-1}{x-1}$

5. Trouver une primitive :

1) $1+\frac{1}{x^2}$

2) $4+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^4}$

3) $-\frac{4}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}$

4) $x^3-\frac{1}{x^2}$

5) $\frac{x^3-3}{x^2}$

6) $\frac{3x^2}{(1+2x^3)^2}$

Rép. 1) $x-\frac{1}{x}$ 2) $4x-\frac{2}{x}+\frac{5}{3x^3}$ 3) $\frac{4}{3x^3}+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{4x^4}$ 4) $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{x}$

5) $\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x}$ 6) $\frac{-1}{2(1+2x^3)}$

6. Primitiver :

1) $\frac{2}{x^3}+\frac{1}{2x^2}$

2) $(3x+2)^6$

3) $(4x^2-5x)^2(16x-10)$

4) $\frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$

5) $x\sqrt{x}$

6) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

7) $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

8) $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

Rép. 1) $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}$ 2) $\frac{1}{21}(3x+2)^7$ 3) $\frac{2}{3}(4x^2-5x)^3$ 4) $\frac{-1}{x^2+x+3}$

5) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}$ 6) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ 7) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ 8) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}$

INT

7. Primitiver :

1) $x\sqrt{x^2+1}$

2) $x\sqrt[3]{ax^2+b}$

3) $\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

4) $\frac{3x^2}{\sqrt{9+x^3}}$

5) $\frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+8}}$

6) $\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$

Rép. 1) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$ 2) $\frac{3}{8a}\sqrt[3]{(ax^2+b)^4}$ 3) $2\sqrt{x^2+x+1}$ 4) $2\sqrt{9+x^3}$
5) $\frac{2}{5}\sqrt{5x^3+8}$ 6) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1}$

8. Primitiver :

1) $(3x^2+1)\sqrt{x^3+x+2}$

2) $2\sqrt{x}+\sqrt{2x}$

3) $2x-\sqrt[3]{x}$

4) $2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

Rép. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^3+x+2)^3}$ 2) $\frac{2}{3}(2+\sqrt{2})\sqrt{x^3}$ 3) $x^2-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$ 4) $x^2-2\sqrt{x}$

10. Ecrire sans le signe Σ :

a) $\sum_{k=1}^4 x^k$

b) $\sum_{i=1}^3 2i$

c) $\sum_{i=3}^6 i \cdot x^i$

d) $\sum_{p=1}^2 \alpha_p \vec{e}_p$

e) $\sum_{i=1}^5 \frac{(-1)^i}{i}$

f) $\sum_{p=0}^3 a^p b^{3-p}$

g) $\sum_{k=0}^4 (2k+1)$

h) $n = \sum_{i=1}^3 n_i$

i) $\sum_{i=1}^3 x_i n_i$

j) $\sum_{i=1}^3 (x_i - 3) \cdot n_i$

Rép. a) $x+x^2+x^3+x^4$ b) $2+4+6$ c) $3x^3+4x^4+5x^5+6x^6$ d) $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$
e) $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ f) $b^3+ab^2+a^2b+a^3$ g) $1+3+5+7+9$
h) $n=n_1+n_2+n_3$ i) $x_1n_1+x_2n_2+x_3n_3$ j) $(x_1-3)n_1+(x_2-3)n_2+(x_3-3)n_3$

INT

11. Ecrire au moyen du signe Σ :

1) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

2) $2+4+6+8+10+12+14+16$

Rép. 1) $\sum_{i=1}^{10} i$ 2) $\sum_{i=1}^8 2i$

12. Ecrire au moyen du signe Σ :

1) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

3) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

4) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7$

5) $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{7}{100000}$

6) $a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + ab^4 + b^5$

Rép. 1) $\sum_{k=1}^5 a_{2k}$ 2) $\sum_{i=0}^5 \frac{1}{2^i}$ 3) $\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i$
4) $\sum_{i=0}^7 (-1)^i x^i$ 5) $\sum_{i=1}^5 \frac{7}{10^i}$ 6) $\sum_{i=0}^5 a^{5-i} b^i$

14. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^4 x^2 dx$

b) $\int_0^3 3x^2 dx$

c) $\int_1^5 \frac{x^2}{2} dx$

d) $\int_0^1 \frac{3}{5} x^3 dx$

e) $\int_0^2 (2x^3 - 3x^2 + x - 3) dx$

f) $\int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx$

Rép. a) 21 b) 27 c) $\frac{62}{3}$ d) $\frac{3}{20}$ e) -4 f) 6

15. Calculer l'aire du domaine borné limité par l'axe Ox et la courbe d'équation $y = f(x)$:

a) $y = 6x - x^2$

b) $y = 15 + 4x - 4x^2$

c) $y = x^2 - 7x + 6$

d) $y = 12x^2 - 4x^3$

Rép. a) 36 b) $\frac{128}{3}$ c) $\frac{125}{6}$ d) 27

16. Trouver l'aire du domaine borné limité par les courbes f et g :

a) $f: y = \frac{1}{2}x^2$; $g: y = 4 - x$

b) $f: y = 1 + \frac{1}{9}x^2$; $g: y = 3 - \frac{1}{9}x^2$

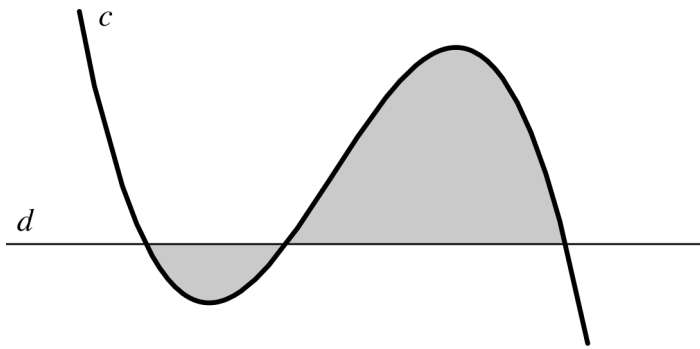
c) $f: y = 2x^2 - x + 5$; $g: y = 6$

d) $f: y = x^2 - 2x + 1$; $g: y = 3x + 1$

e) $f: y = 9x^2 - 3x^3$; $g: y = -3x^2 + 12x$

Rép. a) 18 b) 8 c) $\frac{9}{8}$ d) $\frac{125}{6}$ e) 4

17.—



Calculer l'aire grisée représentée ci-contre, connaissant les équations de la courbe c et de la droite d :

$$c : y = -x^3 + 5x^2 + x - 5$$

$$d : y = 0$$

Rép. 49,33

18. Soit $f(x) = x^3 - 10x^2 + 21x$.

a) Esquisser le graphe de la fonction f .

b) Calculer : $\int_0^7 f(x) dx$.

c) Calculer l'aire (géométrique) de la région comprise entre le graphe de f et l'axe Ox , et dans la bande verticale $0 \leq x \leq 7$.

Rép. b) -28,583 c) 78,083

19.—

a) Calculer : $\int_0^{2\pi} \sin x dx$.

b) Calculer l'aire (géométrique) de la région comprise entre le graphe de $\sin x$ et l'axe Ox , pour $x \in [0 ; 2\pi]$.

Rép. a) 0 b) 4

20. Trouver une primitive des fonctions suivantes au moyen d'une division euclidienne :

1) $\frac{x^3 + x^2 - 5x + 4}{(x-1)^2}$

2) $\frac{8x^5 + 8x^4 + 2x^3 - 2}{(2x+1)^2}$

3) $\frac{x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 5}{(x-1)^3}$

4) $\frac{x^3 - x^2 - 21x + 47}{x^2 - 6x + 9}$

Rép. 1) $\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{x-1}$

2) $\frac{x^4}{2} + \frac{1}{2x+1}$

3) $\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{5}{2(x-1)^2}$

4) $\frac{x^2}{2} + 5x - \frac{2}{x-3}$

INT

21. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{-2}^1 (x^2 - 3x + 2) dx$

2) $\int_0^2 (1-x)^3 dx$

3) $\int_{-1}^1 (2 + 3x^2 - 5x^4) dx$

4) $\int_{1/2}^2 \frac{x^2 + 1}{x^2} dx$

5) $\int_0^1 x^2 (2x+1)^2 dx$

6) $\int_1^2 \frac{x^3 + 2}{x^2} dx$

7) $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx$

8) $\int_0^a \pi a^2 x dx$

Rép. 1) $\frac{27}{2}$ 2) 0 3) 4 4) 3 5) $\frac{32}{15}$ 6) $\frac{5}{2}$ 7) $\frac{1}{6}$ 8) $\frac{\pi}{2}a^4$

22. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

2) $\int_2^3 \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$

3) $\int_a^0 (x^2 + a^2) dx$

4) $\int_0^3 \sqrt{1+x} dx$

5) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2 + 1)^3} dx$

6) $\int_{-1}^0 2x(1+x^2) dx$

Rép. 1) $2\sqrt{2} - \frac{5}{2}$ 2) $\frac{5}{12}$ 3) $-\frac{4}{3}a^3$ 4) $\frac{14}{3}$ 5) $\frac{9}{16}$ 6) $-\frac{3}{2}$

23. Soit $f: x \mapsto x^2 - 3x + 2$ et $g: x \mapsto -x^2 - x + 6$. Calculer la superficie du domaine borné compris entre les graphes de f et de g .

Rép. 9

24. Calculer l'aire de la région bornée du plan limitée par les deux paraboles $f: y = x^2 - 3x + 3$ et $g: y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$.

Rép. 2

25. Calculer l'aire de la région bornée du plan délimitée par les graphes des fonctions $f: x \mapsto \sqrt{x}$ et $g: x \mapsto x^2$.

Rép. $\frac{1}{3}$

INT

26. Soit $f: x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $g: x \mapsto |x|$. Calculer la superficie du domaine borné compris entre les graphes des fonctions f et g .

Rép. $\frac{4}{3}$

27. On donne la parabole d'équation $y = x - x^2$. Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe Ox du domaine limité par la parabole et l'axe Ox .

Rép. $\frac{1}{30}\pi$

28. On donne les points $R(0; 4)$ et $S(6; 0)$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation du segment RS autour de l'axe Ox . Rép. 32π

29. Calculer le volume du corps de révolution engendré par rotation autour de l'axe Ox du trapèze de sommets $(2; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 6)$ et $(2; 2)$.

Rép. $\frac{104}{3}\pi$

30. Calculer le volume d'une sphère de rayon r . Rép. $\frac{4}{3}\pi r^3$

31. (*Volume d'un cône de révolution*) Soient $O(0; 0)$, $A(0; r)$ et $S(h; 0)$ trois points du plan, r et h étant des réels strictement positifs. Calculer le volume du cône engendré par la rotation du triangle OAS autour de l'axe Ox .

Rép. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

32. (*Volume d'une pyramide à base carrée*) Calculer le volume d'une pyramide de hauteur h dont la base est un carré de côté a .

Rép. $\frac{1}{3}a^2 h$

33. Calculer :

a) $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

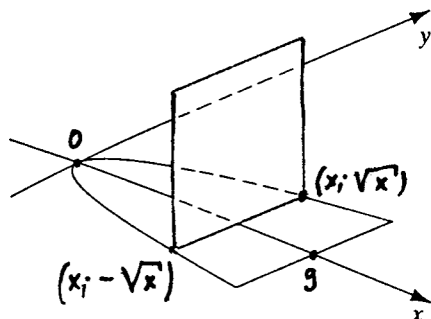
b) $\int_0^2 \frac{t+2}{\sqrt{t^2 + 4t + 8}} dt$

Rép. a) $2 - \sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

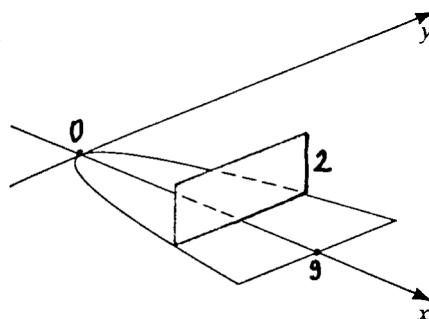
INT

34. Soit R la région bornée du plan Oxy délimitée par la parabole $y = \pm\sqrt{x}$ et la droite $x = 9$. Calculer le volume du solide dont R est la base et dont chaque section perpendiculaire à l'axe Ox a la forme indiquée ci-dessous :

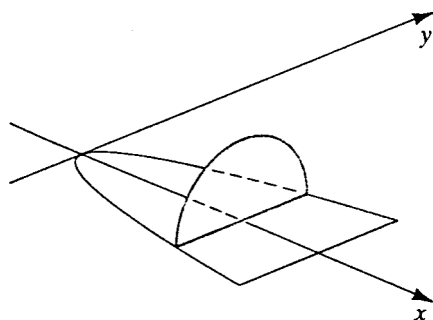
1) Un carré



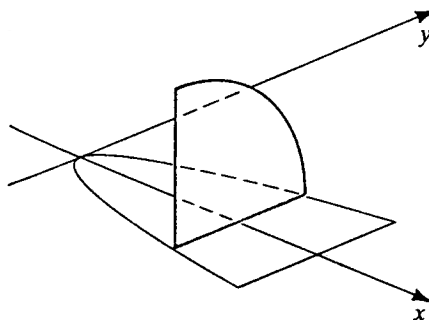
2) Un rectangle de hauteur 2



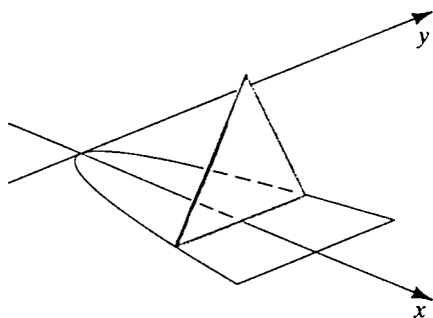
3) Un demi-cercle



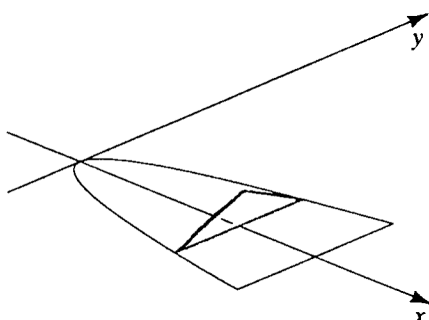
4) Un quart de cercle



5) Un triangle équilatéral



6) Un triangle dont la hauteur vaut le quart de la base



Rép. 1) 162 2) 72 3) $\frac{81}{4}\pi$ 4) $\frac{81}{2}\pi$ 5) $\frac{81}{2}\sqrt{3}$ 6) $\frac{81}{4}$

INT

35. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$. Esquisser le graphe de la fonction f pour $x \in [0; 1]$, puis calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce graphe autour de l'axe Ox .

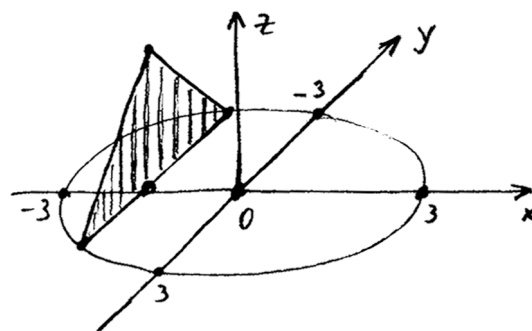
Rép. $\frac{2}{15} \pi$

36. Soit R la région du plan comprise entre la parabole $y = 1 - x^2$ et l'axe Ox . Calculer le volume du solide engendré par la rotation de R autour de :

- a) l'axe Ox . b) l'axe Oy .

Rép. a) $\frac{16}{15}\pi$ b) $\frac{1}{2}\pi$

37. Un solide a pour base un disque de rayon 3 contenu dans le plan Oxy et centré à l'origine. Ses sections perpendiculaires à l'axe Ox sont toutes des triangles équilatéraux. Calculer le volume de ce solide.



Rép. $36\sqrt{3}$

38. Trouver une primitive de :

- 1) $6x^2 \sin(2x^3)$
- 2) $3\sin(3x+1)$
- 3) $\sin(2x)$
- 4) $\sin(7x+1)$
- 5) $x \cos(x^2-5)$
- 6) $\cos(-3x)$
- 7) $2 \cos x \cdot \cos(1+\sin x)$
- 8) $(4x-2)\cos(x^2-x)$

Rép. 1) $-\cos(2x^3)$ 2) $-\cos(3x+1)$ 3) $-\frac{1}{2}\cos(2x)$ 4) $-\frac{1}{7}\cos(7x+1)$
5) $\frac{1}{2}\sin(x^2-5)$ 6) $-\frac{1}{3}\sin(-3x)$ 7) $2\sin(1+\sin x)$ 8) $2\sin(x^2-x)$

39. On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

- Montrer que f admet l'asymptote verticale d'équation $x = -1$, puis esquisser le graphe de f entre les abscisses -1 et 0 .
- Calculer l'aire sous f entre -1 et 0 . (Remarquez que cette région n'est pas bornée.)

Rép. b) $\frac{2}{3}$

INT

40. Au moyen du cercle trigonométrique (sans calculatrice), évaluer :

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\cos(\pi)$ | 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ | 3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ | 4) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ |
| 5) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | 6) $\tan(3\pi)$ | 7) $\sin(3\pi)$ | 8) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ |

Rép. 1) -1 2) -1 3) -1 4) 1 5) -1 6) 0 7) 0 8) 0

42. Calculer :

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\int_0^{3\pi/4} \sin(2x) dx$ | 2) $\int_0^{\pi/6} \cos(3x) dx$ | 3) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} dx$ |
| 4) $\int_0^{\pi/4} (1 + \tan x)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$ | 5) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x + \pi) dx$ | 6) $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ |

Rép. 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{7}{3}$ 5) 0 6) 1

43. On donne une fonction f et un point A . Déterminer la primitive F de f dont le graphe passe par A .

- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = 3x^2 + 2$; $A(1; 5)$ | 2) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$; $A(1; 0)$ |
| 3) $f(x) = \sin(x) + \cos(2x)$; $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ | 4) $f(x) = \cos(3x + \pi)$; $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ |

Rép. 1) $F(x) = x^3 + 2x + 2$	2) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}$
3) $F(x) = -\cos x + \frac{1}{2}\sin(2x) + 1$	4) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x + \pi) + \frac{2}{3}$

44. On donne la fonction $f(x) = \frac{x}{4x^3 + 1}$.

Esquisser le graphe de f pour $x \geq 0$, puis calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce graphe autour de l'axe Ox . (Remarque : ce corps n'est pas borné.)

Rép. $\frac{1}{12}\pi$

45. Déterminer le réel $m > 0$ de façon que la région bornée comprise entre les courbes $y = \frac{1}{4}x^2$ et $y = mx$ ait une aire égale à 9.

Rép. $\frac{3}{2}$

46. Calculer l'aire délimitée par les graphes de $\sin x$ et $\cos x$ entre deux points d'intersection voisins. Rép. $2,828 \left(= 2\sqrt{2}\right)$

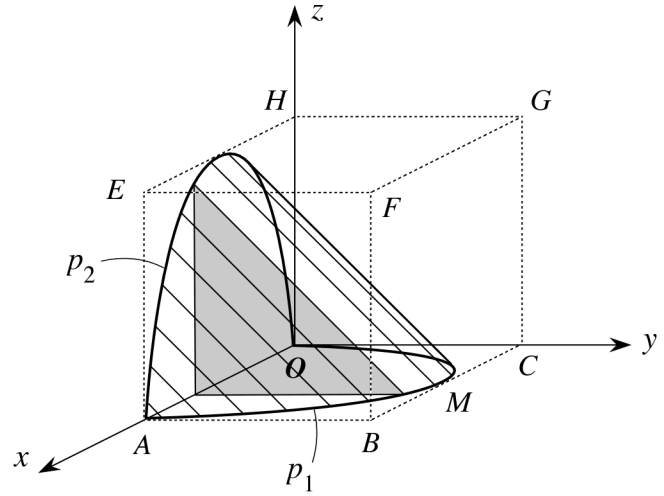
47.—

a) Déterminer la fonction du deuxième degré dont le graphe passe par les points $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ et $M(\frac{1}{2}; 1)$ du plan Oxy .

b) Un arc de parabole p_1 est inscrit dans la face $OABC$ d'un cube d'arête $OA = 1$ (cf. figure).

L'arc p_1 , d'extrémités O et A , passe par le milieu M de BC . Dans la face $OAEH$, l'arc de parabole p_2 , d'extrémités O et A , passe par le milieu de EH .

Calculer le volume du solide dont chaque section perpendiculaire à OA est un triangle ayant ses sommets sur OA , p_1 et p_2 .



Rép. a) $f(x) = -4x^2 + 4x$ b) $\frac{4}{15}$

INT

69. Primitiver :

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{2-x^4}{1+x^2} & 2) \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} & 3) \frac{x^2}{x^2+1} & 4) \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \\
 5) \frac{1}{x^2+2x+2} & 6) \frac{2}{x^2+4x+5} & 7) \frac{x+1}{(x-1)^2} & 8) \frac{x+3}{(x+1)^3}
 \end{array}$$

Rép. 1) $x - \frac{1}{3}x^3 + \text{Arctan} x$ 2) $2 \text{Arcsin} x - x$ 3) $x - \text{Arctan} x$
 4) $\text{Arcsin}(x/2)$ 5) $\text{Arctan}(x+1)$ 6) $2 \text{Arctan}(x+2)$
 7) $\ln|x-1| - \frac{2}{x-1}$ 8) $\frac{-1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

70. Primitiver :

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x^2+1} & 2) \frac{2\sqrt{2}}{4x^2+4x+3} & 3) \frac{1}{2\sqrt{3+2x-x^2}} \\
 4) \frac{x-1}{(x+2)^3} & 5) 15x^3\sqrt{4+x^2} & 6) \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0)
 \end{array}$$

Rép. 1) $\text{Arcsin} x + \text{Arctan} x$ 2) $\text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right)$ 3) $\frac{1}{2} \text{Arcsin}\left(\frac{x-1}{2}\right)$
 4) $\frac{3}{2(x+2)^2} - \frac{1}{x+2}$ 5) $(4+x^2)\sqrt{4+x^2}(3x^2-8)$
 6) Sur $] -\infty ; -a[: \frac{1}{a} \text{Arcsin}(a/x) ;$ Sur $] a ; +\infty[: -\frac{1}{a} \text{Arcsin}(a/x)$

71. Primitiver (intégration par parties) :

$$\begin{array}{llll}
 1) x e^x & 2) x^2 e^x & 3) (x-1)e^x & 4) (x^2+x)e^{-x} \\
 5) (2x-1)e^{2x} & 6) -2xe^{2-x} & 7) e^x \sin x & 8) \frac{e^x}{e^x+1}
 \end{array}$$

Rép. 1) $e^x(x-1)$ 2) $e^x(x^2-2x+2)$ 3) $e^x(x-2)$ 4) $-e^{-x}(x^2+3x+3)$
 5) $e^{2x}(x-1)$ 6) $e^{2-x}(2x+2)$ 7) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ 8) $\ln(e^x+1)$

INT

72. Au moyen d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$ 2) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$ 3) $\int_0^{\pi} (3t^2 - 4) \cos t \, dt$ 4) $\int_{-1}^0 x \sqrt{x+1} \, dx$
 5) $\int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin} x \, dx$ 6) $\int_0^x \ln t \, dt$ 7) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx$ 8) $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$

Rép. 1) $\frac{\pi}{2} - 1$ 2) $\pi - 2$ 3) -6π 4) $-\frac{4}{15}$ 5) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$
 6) $x \ln x - x$ 7) $\frac{\pi^2}{4} - 2$ 8) $\frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$

73. Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx$ 2) $\int_1^e x \ln x \, dx$
 3) $\int_0^2 (x-2)e^{2x} \, dx$ 4) $\int_0^1 x(1-x)^n \, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
 5) $\int_1^3 \ln^2 x \, dx$ 6) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$

Rép. 1) $\frac{4}{3}$ 2) $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$ 3) $\frac{1}{4}(5 - e^4)$ 4) $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$
 5) $3 \ln^2 3 - 6 \ln 3 + 4$ 6) $\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$

74. Au moyen de la formule de duplication $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, trouver une primitive de $\cos^2(x)$. En déduire une primitive de $\cos^4(x)$.

Rép. $\frac{\sin(2x) + 2x}{4} = \frac{\sin(x)\cos(x) + x}{2}$; $\frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3x}{8}$

75. Calculer les intégrales suivantes, à l'aide de la substitution indiquée :

- 1) $\int_{-2}^0 x \sqrt{x+2} \, dx \quad (x = t^2 - 2)$ 2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \quad (x = \sin t)$
 3) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx \quad (t = 1 + \sqrt{x})$ 4) $\int_{1/2}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} \, dx \quad (x+1 = t^2)$
 5) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx \quad (t = \sqrt{x})$ 6) $\int_{1/2}^1 (x+2)\sqrt{2x-1} \, dx \quad (2x-1 = t^2)$
 7) $\int_a^{2a} x \sqrt{x^2 - a^2} \, dx \quad (x^2 - a^2 = t^2; a \geq 0)$ 8) $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan}^2 x}{1+x^2} \, dx \quad (t = \operatorname{Arctan} x)$

Rép. 1) $-\frac{16}{15}\sqrt{2}$ 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) $2 \ln 3$ 4) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 5) $2 - \ln 4$ 6) $\frac{14}{15}$
 7) $a^3 \sqrt{3}$ 8) $\frac{1}{192}\pi^3$

INT

76. Calculer les intégrales suivantes, à l'aide de la substitution indiquée :

1) $\int_0^{1/2} x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \quad (x = \cos t)$

2) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (x = a \sin t)$

3) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} dx \quad (t = \tan(x/2))$

Rép. 1) $1 - \frac{5}{8}\sqrt{3} + \frac{\pi}{12}$ 2) $\frac{\pi}{16}a^4$ 3) 0,3466

77. Calculer :

1) $\int_0^1 \frac{x}{(x-2)^2} dx$

2) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$

3) $\int_2^3 \frac{3x+1}{x(x-1)^3} dx$

4) $\int_0^1 \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} dx$

5) $\int_2^4 \frac{x^2 - 4x - 1}{x(x^2 - 1)} dx$

6) $\int_1^2 \frac{2x^2 + x - 2}{x^2(x+2)} dx$

Rép. 1) $1 - \ln 2$ 2) $\frac{3}{2} \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2$ 3) $2 \ln 2 - \ln 3 + 1$ 4) $\ln 2 - \frac{1}{2}$
5) $\ln(50/81)$ 6) $\ln(8/3) - \frac{1}{2}$

78. Calculer l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Indication : montrer d'abord que l'équation ci-dessus équivaut à $y = \pm b \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$.

Rép. πab

79. On donne deux fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Calculer la superficie du domaine borné limité par les graphes de ces deux fonctions.

Rép. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

80. Calculer le volume de l'ellipsoïde obtenu par rotation de l'ellipse d'équation $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ autour de l'axe des abscisses ($a \geq b > 0$).

Rép. $\frac{4}{3} \pi ab^2$

INT

81. Calculer la longueur de la courbe $y = f(x)$ entre les abscisses a et b .

1) $f(x) = \sqrt{x^3}$ $a = 0$; $b = 5$

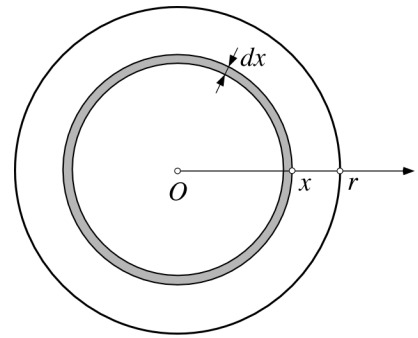
2) $f(x) = \frac{x^4 + 48}{24x}$ $a = 2$; $b = 4$

3) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $a = 0$; $b = 1$

Rép. 1) $\frac{335}{27}$ 2) $\frac{17}{6}$ 3) $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$

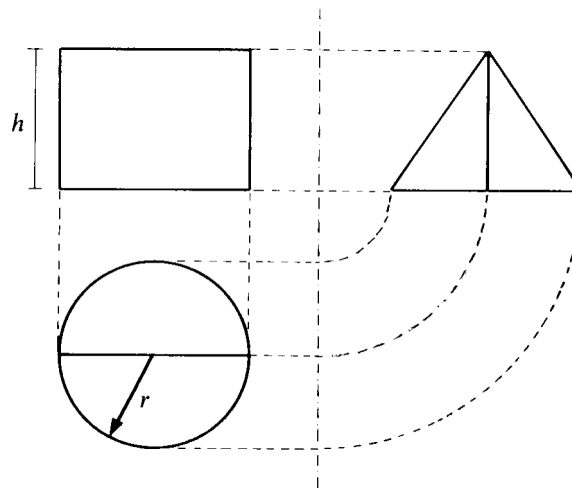
82. Etablir au moyen d'une intégrale que la circonférence du cercle $\Gamma: x^2 + y^2 = r^2$ est égale à $2\pi r$.

83. Etablir la formule donnant l'aire d'un disque de rayon r en sommant des "éléments différentiels" annulaires (cf. figure).



Rép. πr^2

84. Voici les trois projections de Monge d'un solide. Quel est son volume ?



Rép. $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$

INT

85. Un barrage en forme de trapèze isocèle a les dimensions suivantes :

base inférieure : 20 m ; base supérieure : 40 m ; hauteur : 20 m.

Quelle est la force totale exercée par l'eau sur ce barrage ? (On suppose que la base supérieure du trapèze est juste au niveau de l'eau.)

Rappel de physique : la pression P [N/m²] à la profondeur x [m] dans un liquide de masse volumique ρ [kg/m³] est donnée par $P = \rho g x$, avec $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Pour l'eau, prendre $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Indication : Calculer d'abord la force de pression à la profondeur x sur une très fine bande horizontale d'épaisseur dx .

Rép. $5,232 \cdot 10^7$ [Newton]

86. Un cylindre de révolution de rayon r est coupé par un plan passant par un diamètre de sa base et formant un angle α avec cette base. Quel est le volume de la partie du cylindre comprise entre le plan et la base ?

Rép. $\frac{2}{3} r^3 \tan \alpha$

87. Calculer : a) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ b) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\tan x \cos^2 x} dx$

Rép. a) $\frac{1}{6}$ b) $\ln \sqrt{3}$

88. Soit $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

- a) Etudier le signe de f et esquisser son graphe entre 0 et 2π .
- b) Calculer l'aire (géométrique) sous f entre 0 et $\frac{5\pi}{3}$.

Rép. 7

89. Déterminer le volume de la partie commune à deux cylindres de révolution de même rayon r dont les axes se coupent perpendiculairement.

Rép. $\frac{16}{3} r^3$

LG

1. On note $\exp_a$ la fonction $x \mapsto a^x$ (fonction **exponentielle** de base a). Calculer :

- | | | |
|--------------------|-----------------|---------------------|
| 1) $\exp_2(3)$ | 2) $\exp_3(-2)$ | 3) $\exp_{0,5}(3)$ |
| 4) $\exp_{3,5}(2)$ | 5) $\exp_4(-3)$ | 6) $\exp_{2/3}(-2)$ |

Rép. 1. 8 2. $\frac{1}{9}$ 3. $\frac{1}{8}$ 4. 12,25 5. $\frac{1}{64}$ 6. $\frac{9}{4}$

2. Esquisser à l'aide de quelques points les graphes de $\exp_{3/2}$ et de $\exp_{2/3}$.

3. Sans machine, déterminer le log en base 10 des nombres suivants :

10 000 ; 1 000 000 ; $\frac{1}{1000}$; 10^{231} ; $\frac{1}{10^9}$; 0,0001 ; $\sqrt[3]{10000}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{10000}}$

Rép. 4 ; 6 ; -3 ; 23,1 ; -9 ; -4 ; $\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{5}$

4. Calculer (sans utiliser de machine) les nombres suivants :

- | | | | |
|--|--------------------------------------|-----------------------|---------------------------|
| a) $\log_2(8)$ | b) $\log_2(512)$ | c) $\log_2(1024)$ | d) $\log_2(1)$ |
| e) $\log_3(\sqrt[5]{3^2})$ | f) $\log_3(3)$ | g) $\log_2(\sqrt{2})$ | h) $\log_4(\sqrt[5]{64})$ |
| i) $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$ | j) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ | k) $\log_5(0,04)$ | l) $\log_{1/8}(64)$ |

Rép. a) 0 b) 3 c) 10 d) 9 e) 2/5 f) 1 g) 1/2 h) 3/5
i) -2/3 j) -4 k) -2 l) -2

5. Esquisser les graphes de $f: x \mapsto \log_{3/2}(x)$ et de $g: x \mapsto \log_{2/3}(x)$.

6. Résoudre les équations suivantes :

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------------------|
| 1) $\log_2(x) = 4$ | 2) $\log_3(x) = 5$ | 3) $\log_4(x) = 3$ | 4) $\log_{27/8}(x) = \frac{1}{3}$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------------------|

Rép. 1. 16 2. 243 3. 64 4. 3/2

7. Résoudre les équations :

- | | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1) $\log_x(256) = 4$ | 2) $\log_x(125) = 3$ | 3) $\log_x(1000) = 3$ | 4) $\log_x(0,0025) = 2$ |
|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------|

Rép. 1. 4 2. 5 3. 10 4. 0,05

LG

8. Mettre sous la forme " $\alpha \log a + \beta \log b + \gamma \log c$ " :

1) $\log(a^2 bc)$	2) $\log\left(\frac{ab}{c}\right)$	3) $\log\left(\frac{a^2}{bc}\right)$
4) $\log\left(\frac{a^3}{\sqrt{b} c}\right)$	5) $\log\left(\frac{a^2 \sqrt[5]{b}}{\sqrt{c^3}}\right)$	6) $\log(ab^2 \sqrt{c})$

Rép. 1. $2 \log a + \log b + \log c$ 2. $\log a + \log b - \log c$
3. $2 \log a - \log b - \log c$ 4. $3 \log a - \frac{1}{2} \log b - \log c$
5. $2 \log a + \frac{1}{5} \log b - \frac{3}{2} \log c$ 6. $\log a + 2 \log b + \frac{1}{2} \log c$

10. Mettre sous la forme " $\log(\dots)$ " :

1) $3 \log(a) - 2 \log(b)$ 2) $\frac{1}{2} \log(a) + 5 \log(b)$ 3) $3 \log(a) + \frac{1}{5} \log(b) - \frac{7}{3} \log(c)$

Rép. 1) $\log\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$ 2) $\log(\sqrt{a} b^5)$ 3) $\log\left(\frac{a^3 \sqrt[5]{b}}{\sqrt[3]{c^7}}\right)$

14. En utilisant une calculatrice, résoudre les équations :

1) $2^x = 100$	2) $10^x = 5$	3) $2^{2x} = 10$
4) $10^{x-3} = 3$	5) $12^x = 149$	6) $10^{3x} = 14,87$

Rép. 1. 6,64386 / 2. 0,69897 / 3. 1,66096 / 4. 3,47712 / 5. 2,01373 / 6. 0,39077

15. Résoudre les équations suivantes :

a) $3^x = 177147$	b) $2^x = 100$	c) $10^{3x} = 14,87$
d) $3 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{-x} = 7$	e) $2^{2x} - 7 \cdot 2^{x+1} = 15$	f) $9^x \cdot 4^x = \frac{1}{200}$

Rép. a) 11 b) 6,64 c) 0,39077 d) 0,431 ; -0,683 e) 3,9 f) -1,479

18. Résoudre les équations suivantes, sans oublier de déterminer préalablement la condition d'existence :

1) $\log(x+1) - \log 3 = \log(2x-3) + \log 7$
2) $\log(2x-5) + \log(3x+7) = 4 \log 2$
3) $\log(x^2 - 4) = 2 \log(x+3)$
4) $\log(20) + \log(x^2 - 4) - \log(x-2) = 1 + \log(2x+4)$

Rép. 1) CE: $x > \frac{3}{2}$; S: $x = \frac{64}{41}$ 2) CE: $x > \frac{5}{2}$; S: $x = 3$
3) CE: $x \in]-3 ; -2[\cup]2 ; +\infty[$; S: $x = -\frac{13}{6}$ 4) CE: $x > 2$; S: $]2 ; +\infty[$

LG

23. Combien de temps faut-il pour qu'un capital de 20'000 fr placé à intérêts composés au taux de 6% devienne 37'966 fr ?

Rép. 11 ans

24. Un capital de 5000 fr placé à intérêts composés se monte à 9676,40 fr 15 ans plus tard. Trouver le taux.

Rép. 4,5%

25. Déterminer l'ensemble de définition de f :

a) $f(x) = \log(x)$

b) $f(x) = \log(x+5)$

c) $f(x) = \log\left(\frac{x+3}{x-4}\right)$

d) $f(x) = \log\left(\frac{x-5}{x(x+3)}\right)$

Rép. a) $\mathbb{R}_+^*$

b) $] -5 ; +\infty [$

c) $] -\infty ; -3 [\cup] 4 ; +\infty [$

d) $] -3 ; 0 [\cup] 5 ; +\infty [$

LG

31. Posons, pour tout entier positif n , $s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

a) Calculer $s_3 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$, $s_4 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$, s_5 et s_6 .

b) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$?

Rép. a) $2,6$; $2,708\bar{3}$; $2,71\bar{6}$; $2,7180\bar{5}$ b) $e \cong 2,718281828$

32. Dériver :

- | | | |
|--------------------|--------------------------------|----------------------|
| 1) $e^x + x^5$ | 2) $3e^x - \frac{x^3}{5} + 2x$ | 3) xe^x |
| 4) $\frac{e^x}{x}$ | 5) $x^3e^x + 1954$ | 6) $\frac{x-1}{e^x}$ |

Rép. 1) $e^x + 5x^4$ 2) $3e^x - \frac{3}{5}x^2 + 2$ 3) $e^x(1+x)$ 4) $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$
 5) $x^2e^x(3+x)$ 6) $\frac{2-x}{e^x}$

33. Dériver :

- | | | | |
|-----------------|---------------------|-----------------|----------------------|
| a) e^{2x} | b) $e^{(x^3)}$ | c) x^2e^x | d) $\frac{1}{e^x-1}$ |
| e) $e^x \sin x$ | f) $(2x^2-3)e^{3x}$ | g) $\sqrt{e^x}$ | h) $e^{-1/x}$ |

Rép. a) $2e^{2x}$ b) $3x^2e^{(x^3)}$ c) $x(x+2)e^x$ d) $\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}$ e) $e^x(\sin x + \cos x)$
 f) $(6x^2+4x-9)e^{3x}$ g) $\frac{1}{2}\sqrt{e^x}$ h) $\frac{1}{x^2} \cdot e^{-1/x}$

34. Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a) $e^x = 5$ | b) $e^x = 1$ |
| c) $e^x = 0$ | d) $e^{2x+1} = 2$ |
| e) $\frac{1}{e^x-3} = 2$ | f) $e^{2x} - e^x - 2 = 0$ |

Rép. a) $\ln 5$ b) 0 c) $\emptyset$ d) $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$ e) $\ln(7/2)$ f) $\ln 2$

LG**35. Dériver :**

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------|
| 1) $\ln(x-2)$ | 2) $\ln(\sqrt[3]{x})$ |
| 3) $\ln(\cos x)$ | 4) $\ln(\ln x)$ |
| 5) $x \ln x$ | 6) $\ln(-3x)$ |
| 7) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ | 8) $\ln x $ |

Rép. 1) $\frac{1}{x-2}$ 2) $\frac{1}{3x}$ 3) $-\tan x$ 4) $\frac{1}{x \ln x}$ 5) $\ln x + 1$ 6) $\frac{1}{x}$ 7) $\frac{-2}{x^2-1}$ 8) $\frac{1}{x}$

36. Mettre sous la forme " $\alpha \ln a + \beta \ln b + \gamma \ln c$ " :

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1) $\ln\left(\frac{a^2 b}{c}\right)$ | 2) $\ln\left(\frac{a \sqrt{b}}{c^3}\right)$ |
|--------------------------------------|---|

Rép. 1) $2 \ln a + \ln b - \ln c$ 2) $\ln a + \frac{1}{2} \ln b - 3 \ln c$

37. Mettre sous la forme " $\ln(\dots)$ " :

- | | |
|--|--|
| 1) $3 \ln a - 2 \ln b$ | 2) $\frac{1}{2} \ln a + 5 \ln b$ |
| 3) $\frac{1}{3} \ln a - \frac{3}{2} \ln b$ | 4) $3 \ln a + \frac{1}{5} \ln b - \frac{7}{3} \ln c$ |

Rép. 1) $\ln\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$ 2) $\ln(\sqrt{a} b^5)$ 3) $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3}}\right)$ 4) $\ln\left(\frac{a^3 \sqrt[5]{b}}{\sqrt[3]{c^7}}\right)$

38. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- | | | | |
|---------------|----------------------|---|--------------------------------------|
| 1) $\ln(x+3)$ | 2) $\ln(x^2-4)$ | 3) $\ln(\ln x)$ | 4) $\ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$ |
| 5) e^{x+2} | 6) $\frac{1}{\ln x}$ | 7) $\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ | 8) $\ln x $ |

Rép. 1) $] -3 ; +\infty [$ 2) $] -\infty ; -2 [\cup] 2 ; +\infty [$
 3) $] 1 ; +\infty [$ 4) $] -\infty ; 1 [- \{0\}$
 5) $\mathbb{R}$ 6) $] 0 ; +\infty [- \{1\}$
 7) $] -\infty ; -1 [\cup] 1 ; +\infty [$ 8) $\mathbb{R}^*$

39. Dans un même repère Oxy , dessiner les graphes de $\exp : x \mapsto e^x$ et $\ln : x \mapsto \ln(x)$. [Unité sur les deux axes : 2 carrés ; x et y compris entre -6 et 6 .]

LG

40. Résoudre les équations :

1) $e^{2x} - 3e^x = 10$

2) $e^{-x} = 3e^{2x}$

3) $e^x - e^{x/2} = 6$

4) $e^{3x} - e^{2x} - 2e^x = 0$

Rép. 1) $\ln 5$ 2) $-\frac{1}{3}\ln 3$ 3) $2\ln 3$ 4) $\ln 2$

41. Mettre sous la forme " $\alpha \ln a + \beta \ln b + \gamma \ln c$ " :

1) $\ln(a^2 bc)$ 2) $\ln\left(\frac{ab}{c}\right)$ 3) $\ln\left(\frac{a^3}{\sqrt{b}c}\right)$ 4) $\ln\left(\frac{a^2 \sqrt[5]{b}}{\sqrt{c^3}}\right)$

Rép. 1) $2\ln a + \ln b + \ln c$ 2) $\ln a + \ln b - \ln c$
3) $3\ln a - \frac{1}{2}\ln b - \ln c$ 4) $2\ln a + \frac{1}{5}\ln b - \frac{3}{2}\ln c$

42. Résoudre les équations suivantes : (chercher d'abord la condition d'existence)

a) $\ln x = 7$

b) $\ln x - 5 = 0$

c) $\ln(x+3) = 5$

d) $\ln(x-2) = 8$

e) $\ln x - \ln 2 = 3$

f) $\ln x + \ln(3x) = -1$

Rép. a) e^7 b) e^5 c) $e^5 - 3$ d) $e^8 + 2$ e) $2e^3$ f) $\frac{1}{\sqrt{3}e}$

43. Résoudre : (chercher d'abord la condition d'existence)

a) $\ln x = 3$

b) $\ln(x+1) = 7$

c) $\ln x > 2$

d) $\ln(x-1) < 5$

e) $1 + \ln x > 3 + \ln 2$

f) $\ln(x+1) < 1$

g) $\ln x + \ln(2x) < 3$

h) $1 - \ln x > \ln 5$

Rép. a) e^3 b) $e^7 - 1$ c) $]e^2; +\infty[$ d) $]1; e^5 + 1[$
e) $]2e^2; +\infty[$ f) $] -1; e - 1[$ g) $\left]0; \sqrt{\frac{e^3}{2}}\right[$ h) $]0; \frac{1}{5}e[$

44. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = e^x$, à l'abscisse 0 ; à l'abscisse 1.

Rép. $y = x + 1$; $y = ex$

LG

45. Dériver :

- | | | | |
|------------------------------------|-------------------|----------------|--------------------------------------|
| 1) $\ln(7x)$ | 2) $\ln(-x)$ | 3) $\ln(2x+3)$ | 4) $\ln\left(\frac{x-1}{x+4}\right)$ |
| 5) $\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)$ | 6) $\sqrt{\ln x}$ | 7) $\ln(e^x)$ | 8) $e^{\ln x}$ |

Rép. 1) $\frac{1}{x}$ 2) $\frac{1}{x}$ 3) $\frac{2}{2x+3}$ 4) $\frac{5}{(x-1)(x+4)}$ 5) $\frac{-1}{x+1}$
 6) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ 7) 1 8) 1

46. Dériver :

- | | |
|----------------------------------|--------------------|
| a) $e^{(x^2)}$ | b) $(e^x)^2$ |
| c) $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ | d) $\ln(2x^2 - x)$ |
| e) $x \ln x - x$ | f) e^{ax+b} |
| g) $e^x \ln x$ | h) $e^{x \ln 2}$ |

Rép. a) $2xe^{(x^2)}$ b) $2e^{2x}$ c) $-1/x$ d) $\frac{4x-1}{x(2x-1)}$ e) $\ln x$
 f) ae^{ax+b} g) $\frac{e^x(x \ln x + 1)}{x}$ h) $2^x \ln 2$

47. Etudier le signe de la fonction f :

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| 1) $f(x) = 3 \ln x - 1$ | 2) $f(x) = (\ln(3x) - 5)(x + 3)$ |
| 3) $f(x) = 2x - x \ln x$ | 4) $f(x) = e^x - 1$ |
| 5) $f(x) = (x+1)(e^{x-2} - 5)$ | 6) $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^3}$ |

Rép.

1.
$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \sqrt[3]{e} & \\ \hline f(x) & - & 0 & + \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \frac{1}{3}e^5 & \\ \hline f(x) & - & 0 & + \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & e^2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & \\ \hline f(x) & - & 0 & + \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -1 & 2+\ln 5 & & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -3 & -2 & 0 & & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

48. Dériver :

1) $\frac{e^{3x}}{e^x + 1}$

2) $\frac{e^x - 1}{e^{2x}}$

Rép. 1) $\frac{e^{3x}(2e^x + 3)}{(e^x + 1)^2}$ 2) $\frac{2 - e^x}{e^{2x}}$

49. Etudier la croissance des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x \ln x$

b) $f(x) = 1 - e^x$

c) $f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$

d) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

Rép.

a) $f'(x) = \ln x + 1$

x	0	1/e
$f'(x)$		- 0 +
$f(x)$		↘ m ↗

b) $f'(x) = -e^x$

x	
$f'(x)$	-
$f(x)$	↘

c) $f'(x) = \frac{x^2(3 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$

x	0	1	$\sqrt[3]{e}$
$f'(x)$		- - 0 +	
$f(x)$		↘	↘ m ↗

d) $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$

x	1
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	↗ M ↘

50. Calculer :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^x}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{e^{2x} - 7}$

7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3}{e^{2x} - 7}$

8) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-2}{\ln x}$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + e^x}{2e^x}$

Rép. 1) 0 2) $+\infty$ 3) $+\infty$ 4) $+\infty$ 5) $-\infty$
6) 0 7) $-\frac{3}{7}$ 8) 0 9) $-\infty$ 10) $+\infty$

LG

51. Un corps radioactif de masse initiale m_0 se désintègre. Sa masse après le temps t est donnée par :

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t} \quad (\alpha = \text{constante} > 0)$$

- Calculer la période T de ce corps, c'est-à-dire le temps au bout duquel la masse est réduite à la moitié de sa valeur initiale.
- Montrer que, pour tout t , $m(t+T) = \frac{1}{2} m(t)$.
- Etudier la fonction $m(t)$.

Rép. a) $T = \frac{1}{\alpha} \ln 2$

52. Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 e^x$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^5 \ln(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)}$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\ln(x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} x^5 e^x$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{17} + x^2 - 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{20} e^{-x}$

Rép. a) 0 b) 0 c) 0 d) $+\infty$
 e) 0 f) 0 g) $+\infty$ h) 0

53. Calculer :

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1}$

5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x \ln x}{x - 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(1/x)}}{(1/x) \ln x}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{17} + 3x^2 + 2}{(0,0001) e^x}$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} - 1 \right)$

Rép. 1) 0 2) -1 3) 0 4) 0 5) 0 6) $+\infty$ 7) 0 8) -1

LG

54. Trouver les asymptotes horizontales des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{e^x}$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 2}{2x^2 + 1}\right)$

c) $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 5}$

d) $f(x) = \frac{1}{\ln(1/x)}$

Rép. a) $y = 0$ (à droite)

b) $y = -\ln 2$ (à gauche et à droite)

c) $y = 2$ (à droite), $y = -\frac{3}{5}$ (à gauche)

d) $y = 0$ (à droite)

55. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f , puis chercher les asymptotes verticales (elles ne peuvent se trouver qu'au "bord" de l'ensemble de définition) :

a) $f(x) = \ln(x-1)$

b) $f(x) = \frac{e^x}{|e^x - 1|}$

c) $f(x) = \ln(9 - x^2)$

d) $f(x) = \frac{1}{x e^{|1/x|}}$

Rép. a) $]1; +\infty[$; $x=1$

b) $\mathbb{R}^*$; $x=0$

c) $] -3; 3[$; $x=-3$; $x=3$

d) $\mathbb{R}^*$; pas d'asymptote verticale

56. Déterminer les asymptotes de la fonction $f(x) = \frac{\ln|x|}{e^x - 1}$.

Rép. $x = 0$; $y = 0$ (à droite)

57. Déterminer les asymptotes horizontales et verticales de la fonction f :

a) $f(x) = \frac{2}{\ln x}$

b) $f(x) = \frac{e^x - 5}{e^{2x} - 5}$

Rép. a) $x = 1$; $y = 0$ (à droite)

b) $x = \ln\sqrt{5}$; $y = 0$ (à droite) ; $y = 1$ (à gauche)

58. Dériver :

1) 2^x

2) 2^{7x+3}

3) 5^{ax^2+b}

4) $3^{\ln x}$

Rép. 1) $2^x \ln 2$

2) $(7 \ln 2) 2^{7x+3}$

3) $(2ax \ln 5) 5^{ax^2+b}$

4) $\frac{\ln 3}{x} 3^{\ln x}$

65. Etudier la fonction f :

- | | | |
|--------------------------|---|-----------------------|
| 1) $f(x) = x^2 e^x$ | 2) $\frac{1}{e^x - 1}$ | 3) $f(x) = x \ln x$ |
| 4) $f(x) = \ln(x^2 + x)$ | 5) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$ | 6) $f(x) = x - \ln x$ |

Rép. (>> fin de la série)

66. Etudier la fonction $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$.

Rép. $f'(x) = \frac{2 - e^x}{e^{2x}}$ / max : $(\ln 2 ; \frac{1}{4})$ / asymptote horizontale à droite : $y = 0$

67. Etudier la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Montrer en particulier que son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy .

Rép. Paire / $f(x) > 0$ / $f'(x) = -x e^{-\frac{1}{2}x^2}$ / max : $(0 ; 1)$ / AH : $y = 0$ (à droite et à gauche)
 $f''(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^2 - 1)$ / zéros de f'' : ± 1 / signe de f'' : $+ 0 - 0 +$
 points d'inflexion : $(\pm 1 ; e^{-1/2})$

69. Etudier la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 12x + 36)$.

Montrer de plus que le graphe est symétrique par rapport à la verticale d'équation $x = 6$.

Rép. $D = \mathbb{R} - \{6\}$ / zéros de f : $5 ; 7$ / asymptotes : $x = 6$ / $f'(x) = \frac{2}{x-6}$
 $f''(x) = \frac{-2}{(x-6)^2}$ / $f''(x) < 0$

70. On considère la fonction f donnée par $f(x) = e^{-x}$.

- Dessiner le graphe de cette fonction.
- Entre le graphe de f et les axes Ox et Oy , on inscrit un rectangle $OABC$ de manière que A soit sur l'axe Ox positif, B sur le graphe de f et C sur l'axe Oy positif. Déterminer l'abscisse x de A afin que l'aire du rectangle $OABC$ soit maximale.

LG

71. Un parachutiste tombe en chute libre à une vitesse de 55 mètres par seconde. Dès l'ouverture de son parachute, sa vitesse diminue brusquement, et peut se calculer approximativement par la formule suivante :

$$v(t) = 5 \cdot \frac{6 + 5 \cdot e^{-4t}}{6 - 5 \cdot e^{-4t}}$$

où t désigne le temps écoulé, en secondes, depuis l'ouverture du parachute.

- a) Quelle est la vitesse de chute 0,15 seconde après l'ouverture du parachute ?
Et 2 secondes après l'ouverture ?
- b) Déterminer à quel instant t la vitesse est de 8 m/s.
- c) Que vaut $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$?

Rép. a) 13,43 m/s ; 5,003 m/s b) 0,32 s c) 5 m/s = 18 km/h

72. Une substance solide de 30 grammes se dissout progressivement dans 100 grammes d'eau. On ne le sait pas — c'est pourtant simple —, la vitesse de dissolution est proportionnelle d'une part à la masse de la substance non encore dissoute, et d'autre part à la différence entre la concentration d'une solution saturée et celle de la concentration actuelle de la substance...

Einstein en déduirait presque immédiatement qu'alors, pour une substance dont la concentration de saturation est évaluée à 50%, on a :

$$\log_{10}(m) - \log_{10}(m + 20) = At + B ,$$

étant bien entendu que :

- t désigne le temps écoulé (en heures) depuis le début de la dissolution ;
- m est la masse (en grammes) de la substance non encore dissoute au temps t ;
- A et B sont des constantes relatives à la substance considérées.

- a) En supposant qu'Einstein a raison, déterminer les nombres A et B sachant que $m = 30$ quand $t = 0$ et que $m = 20$ quand $t = 2$.
- b) Si $t = 5$, $A = -0,04$ et $B = -0,2$, que vaut m ?

Rép. a) $A = -0,0396$; $B = -0,222$ b) $m = 13,23$

73. Etudier la fonction $f(x) = \frac{x(1 - e^x)}{e^x}$. [Rép. >> fin de la série]

LG

80. Calculer l'aire sous e^x entre $-\infty$ et 0. [Rép. 1]

81. Primitiver :

- a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{2}{2x+3}$ c) $\frac{1}{2x-5}$ d) $\frac{x-1}{x^2-2x+4}$
 e) $\frac{(x+1)^2}{x}$ f) $\frac{3x}{x^2+1}$ g) $\frac{2x-1}{x^2-x-2}$ h) $\frac{x}{x^2-4}$
 i) $\frac{-\sin x}{\cos x}$ j) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

- Rép. a) $\ln|x|$ b) $\ln|2x+3|$ c) $\frac{1}{2}\ln|2x-5|$ d) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4|$
 e) $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x|$ f) $\frac{3}{2}\ln(x^2+1)$ g) $\ln|x^2-x-2|$
 h) $\frac{1}{2}\ln|x^2-4|$ i) $\ln|\cos x|$ j) $-\ln|\sin x + \cos x|$

82. Primitiver :

- 1) e^{2x} 2) $2xe^{(x^2)}$ 3) $x + e^{x+1}$
 4) $x^2e^{(x^3)}$ 5) $(e^x+1)^3e^x$ 6) $\frac{1}{e^{7x}}$

- Rép. 1) $\frac{1}{2}e^{2x}$ 2) $e^{(x^2)}$ 3) $\frac{1}{2}x^2 + e^{x+1}$ 4) $\frac{1}{3}e^{(x^3)}$ 5) $\frac{1}{4}(e^x+1)^4$ 6) $-\frac{1}{7}e^{-7x}$

83. Trouver une primitive de la fraction rationnelle donnée.

Indication : au moyen d'une division euclidienne, mettre la fraction $f(x)$ sous la forme $Q + \frac{R}{D}$.

- 1) $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x+1}$ 2) $f(x) = \frac{x^3-x^2+1}{x-1}$
 3) $f(x) = \frac{x^4+x^3+2x^2+3x+1}{x^2+1}$ 4) $f(x) = \frac{x^3+3x^2+6x+2}{x^2+x}$

- Rép. 1) $x^2+x-2\ln|x+1|$ 2) $\frac{1}{3}x^3+\ln|x-1|$
 3) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x^2+1|$ 4) $\frac{1}{2}x^2+2x+2\ln|x^2+x|$

LG**84. Primitiver :**

1) $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 1}$

2) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

3) $f(x) = \frac{-4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{4x^2 - 4x + 1}$

4) $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2x + 1}{x^2 + x}$

Rép. 1) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\ln(2x^2 + 1)$

2) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x-1}$

3) $-\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{2}{2x-1}$

4) $\frac{1}{3}x^3 + \ln|x^2 + x|$

85. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_2^7 \frac{1}{x} dx$

b) $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^3 - 7} dx$

c) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$

d) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx$

e) $\int_0^2 x e^{(x^2)} dx$

f) $\int_0^2 \frac{6x^2 - 4x + 2}{3x + 4} dx$

Rép. a) $\ln 7 - \ln 2$

b) $\frac{4}{3}\ln 20$

c) $\ln 2$

d) $\ln 2$

e) $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$

f) $6\ln 10 - 6\ln 4 - 4$

86.—a) Montrer que la courbe $f: y = e^x$ et la droite $g: y = (e-1)x + 1$ se coupent aux abscisses $x=0$ et $x=1$.b) Déterminer l'aire de la région bornée délimitée par f et g .

Rép. $\frac{1}{2}(3-e) \cong 0,141$

87. Trouver une primitive de f :

1) $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$

2) $f(x) = \sin^2 x \cos x$

3) $f(x) = \frac{\ln^4 x}{x}$

4) $f(x) = \cos^2 x \sin x$

5) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

6) $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$

7) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

8) $f(x) = \frac{(a \ln x + b)^n}{x} \quad [a \neq 0]$

Rép. 1) $\frac{1}{4} \ln^4 x$

2) $\frac{1}{3} \sin^3 x$

3) $\frac{1}{5} \ln^5 x$

4) $-\frac{1}{3} \cos^3 x$

5) $\frac{1}{2} \ln^2 x$

6) $\frac{-1}{\ln x}$

7) $\ln(|\ln x|)$

8) $\frac{1}{a(n+1)} (a \ln x + b)^{n+1}$

90.—

- a) Pour x compris entre 0 et 1, tracer dans un même repère les graphes des fonctions $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = x + 1$.
- b) Le graphe de f partage le domaine compris entre les graphes de g et de h en deux parties. Calculer les aires de celles-ci. [Rép. 0,057 et 0,109]

91. Dans les premières semaines qui suivent sa naissance, le poids d'un bébé obéit approximativement à la loi

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = k \quad (k = \text{constante})$$

où $p(t)$ désigne le poids (en kg) t jours après la naissance.

- a) En primitivant les deux membres de l'équation ci-dessus, montrer que

$$p(t) = a e^{kt} \quad (a = \text{constante})$$

- b) Un bébé qui pesait 4 kg à sa naissance pèse 4,4 kg deux semaines plus tard. Quel était son poids 5 jours après la naissance ?

Rép. b) 4,1385 kg (soyons précis !)

92.—

- 1) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(a + \frac{1}{n}\right) - \ln(a)}{\frac{1}{n}}$? ($a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

- 2) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$.

- 3) On pose $x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. On a donc : $x_n \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Remarquer que, pour toute fonction continue f , $f(x_n) \rightarrow f(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- 4) En faisant $f = \exp_e$ ci-dessus, montrer que :

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- 5) Calculer $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour $n = 10'000$.

Rép. 1) $\ln'(a) = \frac{1}{a}$ 5) 2,7181459...

LG : Réponses

65.

1) $\frac{x}{f(x)} \mid \begin{array}{c} 0 \\ + \end{array}$; $f'(x) = x e^x (2+x)$; $\frac{x}{f'(x)} \mid \begin{array}{c} -2 \quad 0 \\ + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \end{array}$
 $\max : (-2 ; 4e^{-2})$; $\min : (0 ; 0)$

AH : $y = 0$ (à g.)

pas d'AO ; $f''(x) = e^x (x^2 + 4x + 2)$; signe de f'' : $+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

points d'inflexion : $(-2 - \sqrt{2} ; 0,38)$, $(-2 + \sqrt{2} ; 0,41)$

2) $\frac{x}{f(x)} \mid \begin{array}{c} 0 \\ - \quad || \quad + \end{array}$; $f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$; $\frac{x}{f'(x)} \mid \begin{array}{c} 0 \\ - \quad || \quad - \end{array}$

AV : $x = 0$; AH : $y = -1$ (à g.) ; $y = 0$ (à d.)

$f''(x) = \frac{e^x (e^x + 1)}{(e^x - 1)^3}$; pôle de f'' : 0 ; signe de f'' : $- \quad || \quad +$

3) $\frac{x}{f(x)} \mid \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ // \quad - \quad 0 \quad + \end{array}$; $f'(x) = \ln x + 1$

$\frac{x}{f'(x)} \mid \begin{array}{c} 0 \quad e^{-1} \\ // \quad - \quad 0 \quad + \end{array}$; $\min : (e^{-1} ; -e^{-1})$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$

pas d'AO ;

$f''(x) = \frac{1}{x}$;

x	0
$f''(x)$	+
$f(x)$	

4) $\frac{x}{f(x)} \mid \begin{array}{c} -1,618 \quad -1 \quad 0 \quad 0,618 \\ + \quad 0 \quad - \quad // \quad - \quad 0 \quad + \end{array}$
 $f'(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)}$; AV : $x = -1$; $x = 0$

$\frac{x}{f'(x)} \mid \begin{array}{c} -1 \quad 0 \\ - \quad // \quad + \end{array}$

pas d'AA ;

$f''(x) = \frac{-(2x^2 + 2x + 1)}{x^2(x+1)^2}$;

x	-1	0
$f''(x)$	- -	
$f(x)$		

5) $\frac{x}{f(x)} \mid \begin{array}{c} -1,618 \quad 0 \quad 0,618 \quad 1 \\ + \quad 0 \quad - \quad || \quad - \quad 0 \quad + \quad // \end{array}$; $f'(x) = \frac{2-x}{x(1-x)}$

$\frac{x}{f'(x)} \mid \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ - \quad || \quad + \quad // \end{array}$; AV : $x = 0$; $x = 1$

pas d'AA ;

$f''(x) = \frac{-(x^2 - 4x + 2)}{x^2(x-1)^2}$

zéros de f'' :

$a = 2 - \sqrt{2} = 0,586$ et $b = 2 + \sqrt{2} = 3,414$;

x	0	a	1
$f''(x)$	- -	0	+
$f(x)$			

LG : Réponses

6) $\frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \text{//////} \\ \hline \end{array} \right| +$; $f'(x) = \frac{x-1}{x}$; AV: $x=0$

$\frac{x}{f'(x)} \left| \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \hline \text{//////} \\ \hline \end{array} \right| - \quad 0 \quad +$; min: $(1; 1)$

pas d'AA ;

$f'''(x) = \frac{1}{x^2}$;

x	0
$f''(x)$	$\text{//////} \quad \quad +$
$f(x)$	$\cup$

73.

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$; $\frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c} 0 \\ \hline - \quad 0 \quad - \end{array} \right|$

$f'(x) = \frac{1-x-e^x}{e^x}$; $\frac{x}{f'(x)} \left| \begin{array}{c} 0 \\ \hline + \quad 0 \quad - \end{array} \right|$ max: $(0; 0)$

$\frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{c} \nearrow \quad M \quad \searrow \end{array} \right|$

AAD: $y = -x$; graphe $\cap$ AA: $(0; 0)$