

ANALYSE 3^{MR}



THÉORIE

2014

TABLE DES MATIÈRES

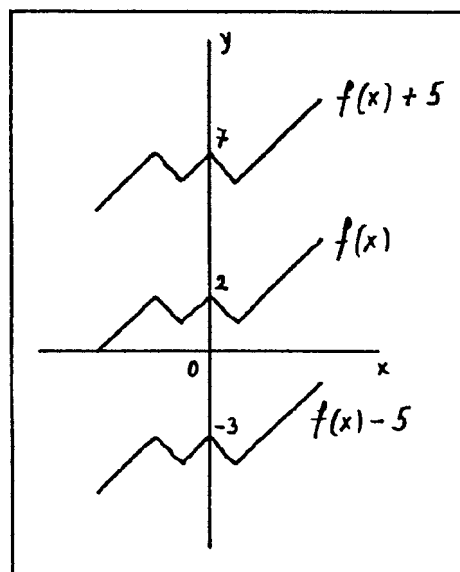
Variations sur le graphe d'une fonction	10
Parité d'une fonction	11
Périodicité	12
Asymptotes verticales et horizontales	13
Asymptotes affines	14
Détection d'une asymptote affine	15
Limites de fonctions avec radicaux	16
$a \cos x + b \sin x$	17
Rappels sur les dérivées	20
Vitesse	21
Dérivée seconde et courbure	22
Dérivée d'une réciproque	23
Théorèmes de Rolle et de Cauchy	24
Règle de L'Hospital	25
Fonctions trigonométriques réciproques	26
Graphes des fonctions trigonométriques réciproques	27
Primitives	30
Primitive de $g^n \cdot g'$	31
Primitive d'une fonction composée	32
Résumé sur les primitives	33
Le signe de sommation Σ	34
Intégrale d'une fonction	35
Théorème fondamental du calcul intégral	36
Quelques propriétés des intégrales	37
Régions bornées	38
Aire d'une région située entre deux courbes	39
Volume d'un solide	40
Logarithme – Définition	50
Calcul d'un logarithme à la machine	51
Réciprocité de $\exp_a$ et $\log_a$	52
Logarithme d'un produit	53
Fonction exponentielle de base e	54
Dérivée de la fonction e^x	55
Logarithme naturel	56
Graphe des fonctions $\exp$ et $\ln$	57
Dérivée de la fonction $\ln$	58
Primitive de $1/x$	59
Limite de $(\ln x)/x$ en $+\infty$	60
Croissances comparées de e^x , x^n et $\ln x$	61
Intégration par parties	70
Intégration par changement de variable	71
Intégration de fonctions rationnelles	72
Longueur d'une courbe	73
Primitives de fonctions usuelles	74
Plans d'étude de fonctions	80

§ 10. VARIATIONS SUR LE GRAPHE D'UNE FONCTION

Soit f une fonction réelle.

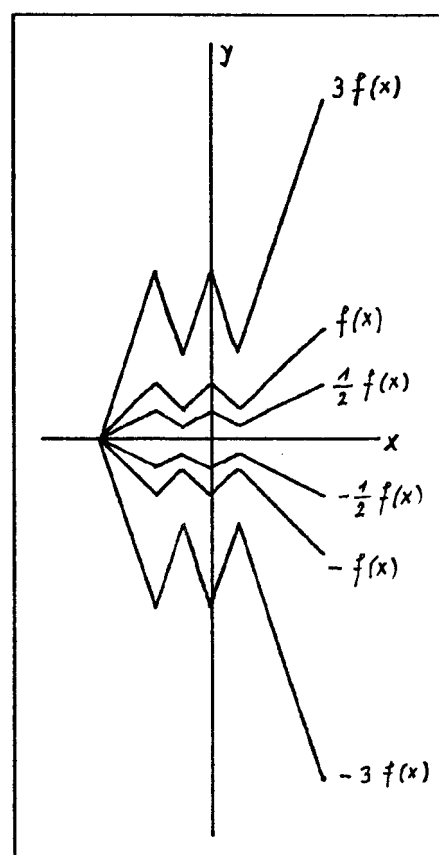
1. Graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + k$

Le graphe de $x \mapsto f(x) + k$ s'obtient à partir de celui de f au moyen d'une translation de direction Oy , vers le haut si $k > 0$, vers le bas si $k < 0$.



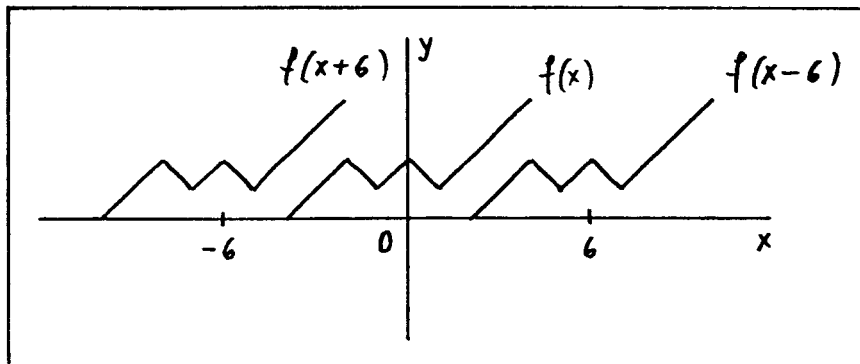
2. Graphe de la fonction $x \mapsto k \cdot f(x)$

Il s'obtient à partir du graphe de f au moyen d'une affinité de direction Oy , d'axe Ox et de rapport k . L'affinité dilate verticalement si $|k| > 1$ et contracte verticalement si $|k| < 1$; c'est une symétrie d'axe Ox si $k = -1$.



3. Graphe de la fonction $x \mapsto f(x+k)$

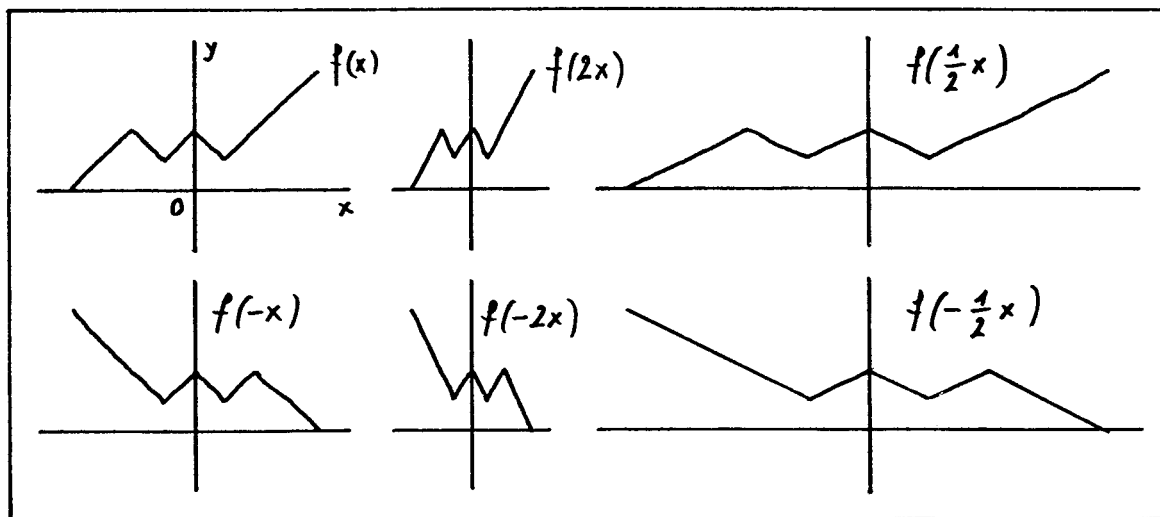
C'est le transformé du graphe de f par une translation de direction Ox , vers la gauche si $k > 0$, vers la droite si $k < 0$.



4. Graphe de la fonction $x \mapsto f(k \cdot x)$

On l'obtient en appliquant au graphe de f une affinité de direction Ox , d'axe Oy et de rapport $1/k$. Il y a dilatation horizontale si $|k| < 1$, contraction horizontale si $|k| > 1$.

Si $k = -1$, l'affinité est une symétrie d'axe Oy .



§ 11. PARITÉ D'UNE FONCTION

Définition

- Une fonction réelle f définie sur D est dite **paire** si son graphe est symétrique relativement à l'axe Oy , autrement dit si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = f(x)$$

- Une fonction réelle f définie sur D est dite **impaire** si son graphe est symétrique relativement à l'origine O , autrement dit si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = -f(x)$$

Exemples

Les fonctions x^2 , $\cos(x)$ et $\sqrt{x^4 - x^2}$ sont paires.

Les fonctions x^3 , $\sin(x)$ et $\frac{x}{x^2 + 4}$ sont impaires.

N.B. Il y a beaucoup de fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires...

§ 12. PÉRIODICITÉ

Définition

Soit f une fonction et D son ensemble de définition. f est dite *périodique* s'il existe $p > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, $x + p \in D$ et

$$f(x + p) = f(x)$$

Le nombre p est, par définition, une *période* de f .

La plus petite période de f — si elle existe — s'appelle *la* période de f .

Exemples

Les fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ et $\cot(x)$ sont périodiques.

La période de $\sin(x)$ et celle de $\cos(x)$ est 2π .

La période de $\tan(x)$ et celle de $\cot(x)$ est π .

Théorèmes

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si p est une période de f , kp en est également une.

Si p est *la* période de f , toute période de f est du type kp , avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Il en résulte que si q est une période de f , alors $p \in \left\{ q ; \frac{1}{2}q ; \frac{1}{3}q ; \frac{1}{4}q ; \dots \right\}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Si p est une période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est une période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.

Si p est *la* période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est *la* période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.

§ 13. ASYMPTOTES VERTICALES ET HORIZONTALES

1. Introduction

Soit par exemple $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$.

Cette fonction n'est pas définie en $x = 4$. Que se passe-t-il au voisinage de $x = 4$?

Pour répondre à cette question, calculons les limites de $f(x)$ quand x approche 4 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{x+3}{x-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{x+3}{x-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

Graphiquement, cela signifie que lorsque x tend vers 4 par la gauche ($x < 4$), le graphe de f plonge vertigineusement, puisque $f(x)$ tend vers $-\infty$ (cf. figure).

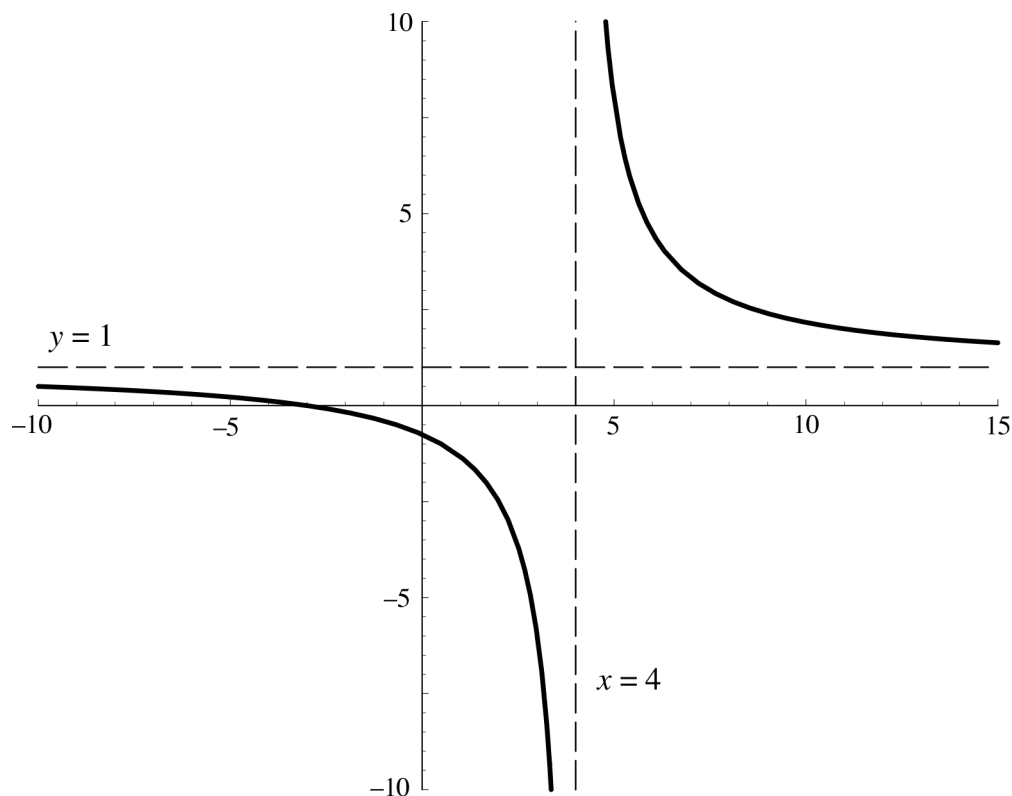
Lorsque x tend vers 4 par la droite ($x > 4$), le graphe de f s'envole infiniment, puisque $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Dans une telle situation, on dit que la droite d'équation $x = 4$ est une **asymptote verticale** de f .

Examinons maintenant le comportement de f quand x tend vers $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Ainsi, lorsque x devient très grand (en valeur absolue), le graphe de f se confond pratiquement avec la droite horizontale d'équation $y = 1$. On appelle alors cette droite une **asymptote horizontale** de la fonction f .



2. Définition des asymptotes verticales

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction.

La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale de f si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm \infty$$

Si de plus $f(x)$ est une fraction rationnelle $\frac{N(x)}{D(x)}$ **irréductible**, on a le critère suivant :

$$\left(\begin{array}{l} \text{La droite d'équation } x = a \\ \text{est asymptote verticale de } f \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} a \text{ est un zéro du} \\ \text{dénominateur } D(x) \end{array} \right)$$

Exemple

Les asymptotes verticales de $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$ sont les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

3. Définition des asymptotes horizontales

Soit $h \in \mathbb{R}$ et f une fonction.

La droite d'équation $y = h$ est asymptote horizontale à droite de f si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = h$$

De même à gauche ($x \rightarrow -\infty$).

Exemple

$f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$. D'où : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale de f (à droite et à gauche).

§ 14. ASYMPTOTES AFFINES

Définition

La droite d'équation $y = mx + h$ est asymptote affine à droite d'une fonction f si

$$f(x) = (mx + h) + \delta(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0$$

De même à gauche ($x \rightarrow -\infty$).

Dans un tel cas, $\delta(x)$ est pratiquement nul quand x est "proche" de $+\infty$ (resp. $-\infty$), et l'on a

$$f(x) \cong mx + h$$

La courbe représentative de f s'approche donc de la droite $y = mx + h$ sur le côté droit du graphique (resp. sur le côté gauche).

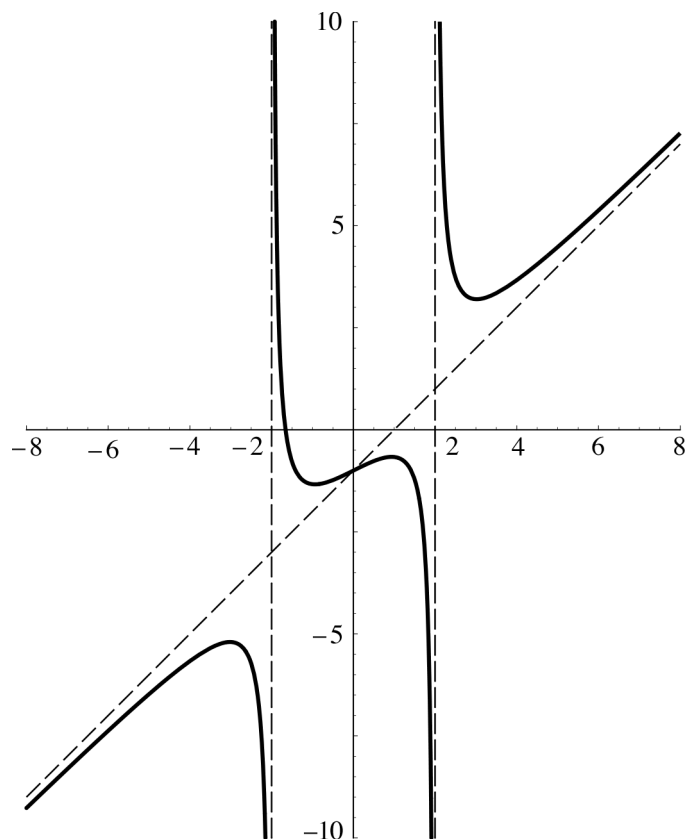
Exemple

Soit $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$.

Au moyen d'une division euclidienne, on obtient :

$$f(x) = (x - 1) + \frac{2x}{x^2 - 4}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 4} = 0$, la droite $y = x - 1$ est asymptote oblique de f (à droite et à gauche).



§ 15. DÉTECTION D'UNE ASYMPTOTE AFFINE

Dans le cas de fonctions non rationnelles, on ne peut plus déterminer les asymptotes affines au moyen de la division euclidienne des polynômes. On se sert alors du critère suivant :

Théorème

La droite $y = mx + h$ est asymptote à droite de la fonction f si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = h$$

La droite $y = mx + h$ est asymptote à gauche de la fonction f si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = h$$

Preuve

Prouvons le théorème pour une asymptote à droite, le cas de l'asymptote à gauche étant analogue.

Soit $\delta(x) = f(x) - (mx + h) \Leftrightarrow f(x) = (mx + h) + \delta(x)$.

Par définition de l'asymptote affine,

$$y = mx + h \text{ est une asymptote à droite de } f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0$$

Par ailleurs : $\frac{f(x)}{x} = m + \frac{h}{x} + \frac{\delta(x)}{x}$ et $f(x) - mx = h + \delta(x)$.

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = h \right)$$

§ 16. LIMITES DE FONCTIONS AVEC RADICAUX

Deux exemples

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Commentaire

On a multiplié les deux termes de la fraction initiale par $\sqrt{x} + 2$, et appliqué la formule $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ pour réduire le numérateur. $\sqrt{x} + 2$ est l'expression *conjuguée* de $\sqrt{x} - 2$.

De manière générale, les expressions $A - B$ et $A + B$ sont dites *conjuguées* l'une de l'autre.

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 3} \right) &= [\infty - \infty] = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 3} \right) \left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 3} \right)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 3}} &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x) - (x^2 + 3)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)}{\sqrt{x^2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{- \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(*) On rappelle que : $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

§ 17. $a \cos(x) + b \sin(x)$

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a \cos x + b \sin x = r \sin(x + \varphi)$$

Preuve

Choisissons φ de manière que

$$\tan \varphi = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \text{signe}(\sin \varphi) = \text{signe}(a)$$

Alors : $r \sin(x + \varphi) = r(\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = (r \sin \varphi) \cos x + (r \cos \varphi) \sin x$.

Il suffit donc d'établir que $a = r \sin \varphi$ et $b = r \cos \varphi$.

De $\tan \varphi = \frac{a}{b}$, on tire $\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{a^2}{b^2}$;

$$\Rightarrow b^2 \sin^2 \varphi = a^2 \cos^2 \varphi = a^2 (1 - \sin^2 \varphi) = a^2 - a^2 \sin^2 \varphi ;$$

$$\Rightarrow a^2 = (a^2 + b^2) \sin^2 \varphi = r^2 \sin^2 \varphi ;$$

$$\Rightarrow a = \pm r \sin \varphi .$$

Or $\sin \varphi$ et a sont supposés de même signe ;

$$\Rightarrow a = r \sin \varphi \quad \text{et, en reprenant} \quad \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{a}{b}, \quad b = r \cos \varphi .$$

§ 20. RAPPELS SUR LES DÉRIVÉES

Définition

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \text{pente du graphe de } f \text{ à l'abscisse } a$$

La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est la *dérivée* de f

Autres notations pour $f'(x)$: y' ; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d}{dx} f(x)$

Dérivée de quelques fonctions

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$ *
c (constante)	0	$\sin x$	$\cos x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$
x^n ($n \in \mathbb{R}$)	$n x^{n-1}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		

* Pour les fonctions trigonométriques, x doit être en *radians*

Règles de dérivation

$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(fg)' = f'g + fg'$	$(g^n)' = n g^{n-1} \cdot g'$
$(cf)' = c f'$ (c = constante)	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

§ 21. VITESSE

Soit $A(t)$ une grandeur variant avec le temps t .

Le quotient $\frac{A(t+h) - A(t)}{h}$ mesure la *vitesse moyenne* du "changement" A entre les temps t et $t+h$. La *vitesse (instantanée)* de ce changement au temps t sera donc égale à

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}$$

c'est-à-dire à la dérivée de A en t , pour autant que la limite existe. D'où :

$$A'(t) = \textbf{Vitesse (ou taux)} \text{ du changement } A \text{ au temps } t$$

L'accélération du changement A est la vitesse du changement A' . Ainsi :

$$A''(t) = \textbf{Accélération} \text{ du changement } A \text{ au temps } t$$

(A'' désigne la dérivée de A')

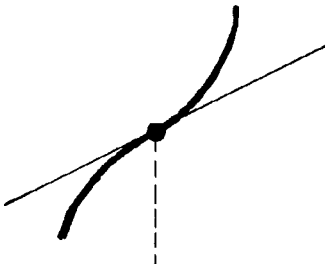
Petite remarque

La vitesse est donc une "incarnation" physique de la notion de dérivée. On connaît déjà l'incarnation géométrique, comme pente locale du graphe...

§ 22. DÉRIVÉE SECONDE ET COURBURE

Soit f une fonction réelle, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

- Si $f'' > 0$, f' est croissante ;
 - $\Leftrightarrow$ la pente de la tangente au graphe de f augmente ;
 - $\Leftrightarrow$ le graphe de f est "convexe" :  ;
 - $\Leftrightarrow$ sa courbure est positive.
- Si $f'' < 0$, f' est décroissante ;
 - $\Leftrightarrow$ la pente de la tangente au graphe de f diminue ;
 - $\Leftrightarrow$ le graphe de f est "concave" :  ;
 - $\Leftrightarrow$ sa courbure est négative.
- Si $f'' = 0$ en un réel a , et si f'' change de signe en a , alors $(a, f(a))$ est un *point d'inflexion* de f .

graphe de f :						
signe de f''	-	0	+	+	0	-
convexité de f		i			i	

§ 23. DÉRIVÉE D'UNE RÉCIPROQUE

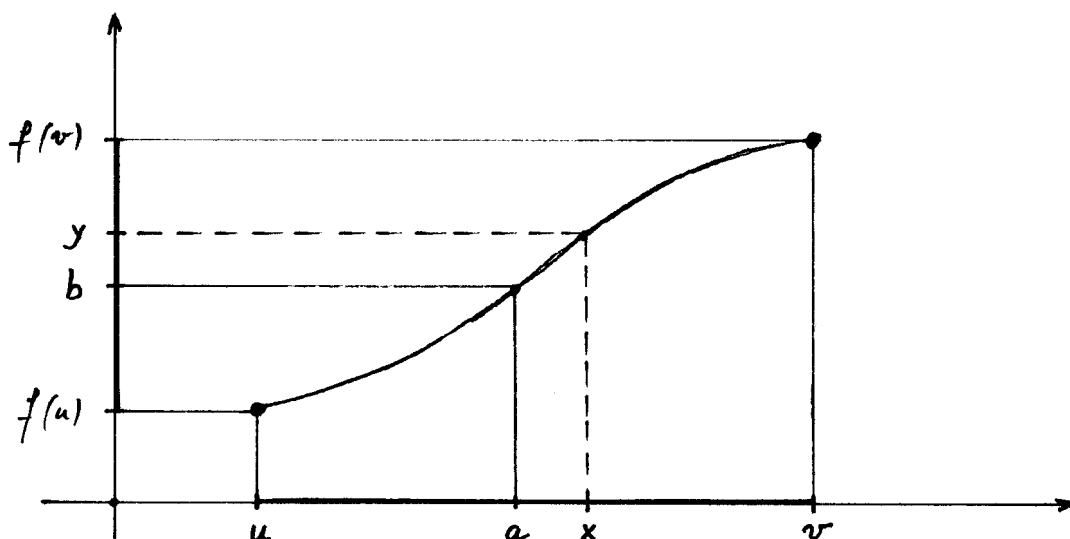
Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[u; v]$ et dérivable sur $I =]u; v[$. On suppose que $f'(x) > 0$ sur I (respectivement que $f'(x) < 0$ sur I). Alors, la fonction réciproque ${}^r f$ est dérivable sur $J = f(I)$, et l'on a, pour tout $b = f(a)$ dans J :

$$\left({}^r f\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Preuve

Il suffit de montrer que la limite de $\frac{{}^r f(y) - {}^r f(b)}{y - b}$ quand $y \rightarrow b$ existe et vaut $\frac{1}{f'(a)}$.



Comme $y = f(x) \Leftrightarrow x = {}^r f(y)$ et $b = f(a) \Leftrightarrow a = {}^r f(b)$, on a :

$$\frac{{}^r f(y) - {}^r f(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

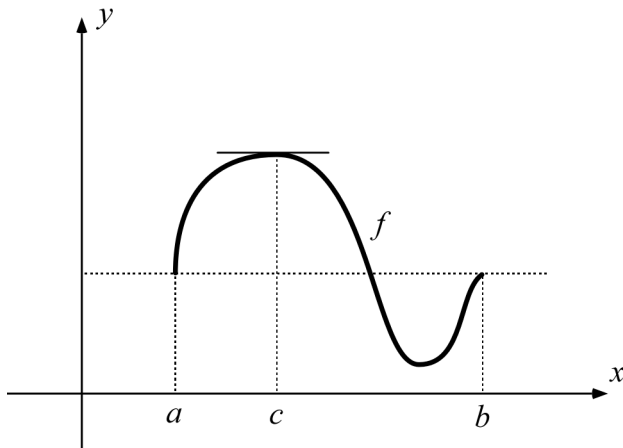
Or, $y \rightarrow b$ si et seulement si $x \rightarrow a$ (...). D'où :

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{{}^r f(y) - {}^r f(b)}{y - b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

§ 24. THÉORÈMES DE ROLLE ET DE CAUCHY

1. Le théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Ce théorème confirme l'évidence suivante : il existe au moins un point de la courbe $y = f(x)$ ($a < x < b$) en lequel la tangente est horizontale.

2. Le théorème de Cauchy

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Remarque. Le théorème de Rolle assure que $g(a) \neq g(b)$.

Preuve

Considérons la fonction h définie par $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$.

Cette fonction est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, sa dérivée étant $h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]$. De plus, on vérifie que $h(a) = h(b)$. Il existe donc, en vertu du théorème de Rolle, un réel $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, ce qui équivaut à $f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$. Ainsi, puisque $g(a) \neq g(b)$ et $g'(c) \neq 0$,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

§ 25. RÈGLE DE L'HOSPITAL*

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I contenant a . On suppose que :

1. $f(a) = g(a) = 0$;
2. g et g' ne s'annulent pas sur $I - \{a\}$;
3. la limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ lorsque x tend vers a existe.

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Remarque. Ce résultat permet le calcul de nombreuses limites du type $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Preuve

Soit $x \in I - \{a\}$. Les fonctions f et g satisfont les hypothèses du théorème de Cauchy sur l'intervalle $[a, x]$. Il existe donc $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Comme c_x tend vers a lorsque x tend vers a , on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A noter :

Le théorème est encore vrai lorsque la limite est du type $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, ou lorsque $a = \pm \infty$.

* Guillaume de L'Hospital, mathématicien français, 1661-1704

§ 26. FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES RÉCIPROQUES

Commençons par faire les remarques suivantes :

- La fonction $\sin x$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- La fonction $\cos x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- La fonction $\tan x$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
- La fonction $\cot x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \pi[$.

Ainsi, les fonctions $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$

$$\cos : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$$

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\cot :]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

sont **bijectives** et l'on peut considérer leurs réciproques *Arc sinus*, *Arc cosinus*, *Arc tangente* et *Arc cotangente* :

$$\text{Arcsin} : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ définie par } y = \text{Arcsin}(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)$$

$$\text{Arccos} : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi], \text{ définie par } y = \text{Arccos}(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$$

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \text{ définie par } y = \text{Arctan}(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$$

$$\text{Arccot} : \mathbb{R} \rightarrow]0; \pi[, \text{ définie par } y = \text{Arccot}(x) \Leftrightarrow x = \cot(y)$$

Théorème

Les fonctions $\text{Arcsin } x$ et $\text{Arccos } x$ sont dérivables sur $] -1; 1[$, et l'on a :

$$(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\text{Arccos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Les fonctions $\text{Arctan } x$ et $\text{Arccot } x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et l'on a :

$$(\text{Arctan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{Arccot } x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Preuve

Nous n'établissons que la première formule, le procédé étant analogue pour les trois autres.

Soit $x \in] -1; 1[$. Posons $y = \text{Arcsin}(x)$, ce qui équivaut à $x = \sin(y)$.

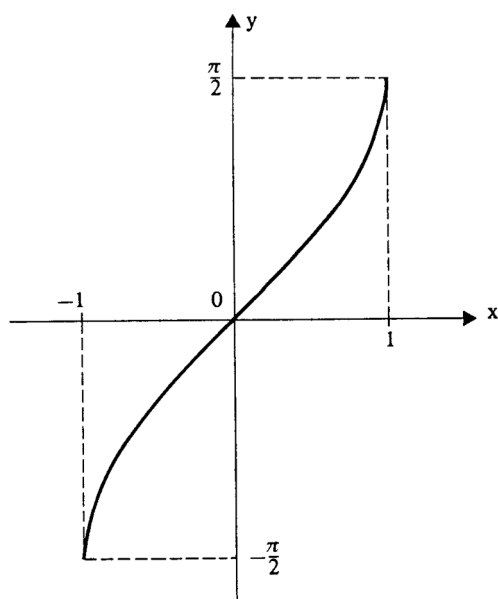
D'après le théorème sur la dérivation d'une réciproque, on peut écrire :

$$(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{(\sin)'(y)} = \frac{1}{\cos y}. \text{ Or, } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}, \text{ puisque } y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

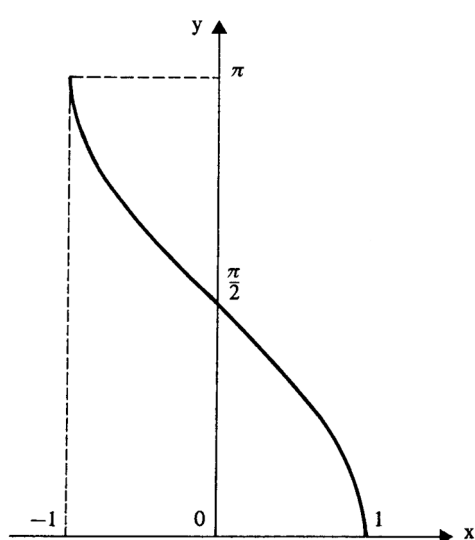
$$\text{D'où : } (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

§ 27. GRAPHE DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES RÉCIPROQUES

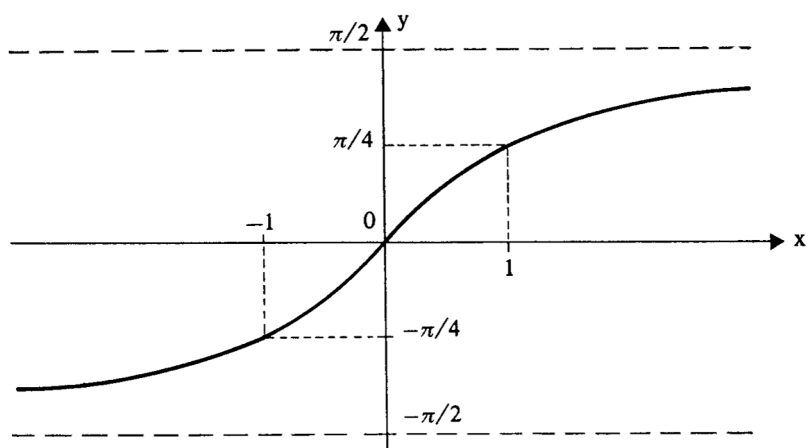
Arcsin(x)



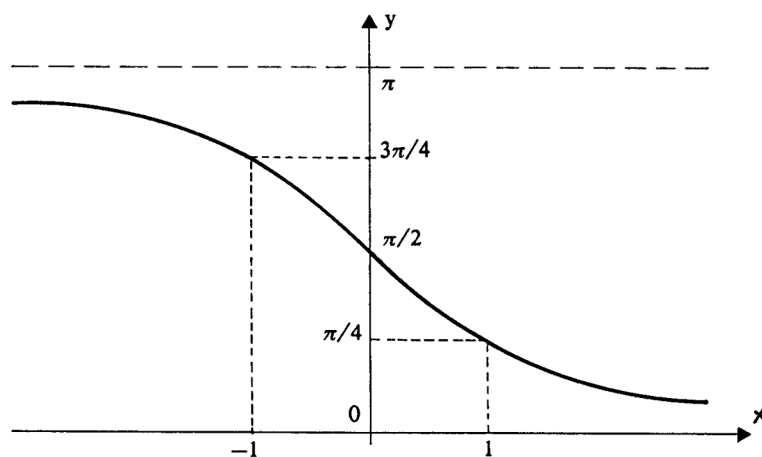
Arccos(x)



Arctan(x)



Arccot(x)



§ 30. PRIMITIVES

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F de I vers $\mathbb{R}$ dont la dérivée est f .

$$F' = f$$

Exemples

- $x+1$ admet la primitive $\frac{1}{2}x^2 + x$, car la dérivée de $\frac{1}{2}x^2 + x$ est $x+1$.
- x^3 admet la primitive $\frac{1}{4}x^4$, car la dérivée de $\frac{1}{4}x^4$ est x^3 .

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{R} - \{1\}$,

$$x^n \text{ admet la primitive } \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

Preuve : $\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = \frac{1}{n+1} (x^{n+1})' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = x^n.$

Théorème

Soit $c \in \mathbb{R}$, F une primitive de f , G une primitive de g .

$$\begin{aligned} cf &\text{ admet la primitive } cF \\ f+g &\text{ admet la primitive } F+G \end{aligned}$$

Preuve : $(cF)' = c(F)' = cf$; $(F+G)' = F' + G' = f+g.$

Application

$$2x^2 - 9x + 3 \text{ a pour primitive } 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 9 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 3 \cdot x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x.$$

$$\text{Autre primitive possible : } \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1954.$$

Notation

On écrira $P(f) = F$ pour signifier que F est **une** primitive de f . Par exemple : $P(2x) = x^2$ ou $P(2x) = x^2 + 17$.

Le théorème précédent s'exprime alors ainsi :

$$P(c \cdot f) = c \cdot P(f)$$

$$P(f + g) = P(f) + P(g)$$

(Il y a tout de même abus de langage, puisqu'une fonction admet plusieurs primitives.)

Théorème

1. Soit F une primitive de f , et c une constante. Alors $F + c$ est aussi une primitive de f .
2. Réciproquement, toute primitive de f est de la forme $F + c$, où c désigne une constante.

Preuve

1. $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$; $\Rightarrow F + c$ est une primitive de f .
2. Soit G une primitive de f .

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0 ;$$

$$\Rightarrow G - F \text{ est une constante ;}$$

$$\Rightarrow \text{il existe un réel } c \text{ tel que } G - F = c ;$$

$$\Rightarrow G = F + c .$$

§ 31. PRIMITIVE DE $g^n \cdot g'$

Théorème

Soit g une fonction dérivable et n un réel différent de -1 .

$g^n \cdot g'$ admet la primitive $\frac{1}{n+1} \cdot g^{n+1}$

Preuve

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n+1} \cdot g^{n+1} \right)' &= \frac{1}{n+1} \cdot (g^{n+1})' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot g^n \cdot g' \\ &= g^n \cdot g'. \end{aligned}$$

Exemples

- $\bullet \quad P \left(\underbrace{(x^3+1)}_g \cdot \underbrace{3x^2}_{g'} \right) = \frac{1}{6} (x^3+1)^6$
- $\bullet \quad P \left(\sqrt{x^2+x} (2x+1) \right) = P \left(\underbrace{(x^2+x)}_g^{1/2} \underbrace{(2x+1)}_{g'} \right)$
 $= \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (x^2+x)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+x)^3}$
- $\bullet \quad P \left((3x^2+1)^{11} \cdot 2x \right) = P \left(\frac{1}{3} \cdot \underbrace{(3x^2+1)}_g^{11} \cdot \underbrace{6x}_{g'} \right)$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} (3x^2+1)^{12} = \frac{1}{36} (3x^2+1)^{12}$

Corollaire

$(ax+b)^n$ admet la primitive $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} (ax+b)^{n+1}$

§ 32. PRIMITIVE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Théorème

Soit f et g deux fonctions, g étant dérivable, et soit F une primitive de f . Alors :

$$f(g(x)) \cdot g'(x) \text{ admet la primitive } F(g(x))$$

Preuve

$$\begin{array}{c} \text{dérivée intérieure} \\ \downarrow \\ \left(F(g(x)) \right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dérivation} \\ \text{d'une fonction} \\ \text{composée}}}{=} F'(g(x)) \cdot g'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ F' = f}}{=} f(g(x)) \cdot g'(x) \end{array}$$

Applications

$$a) \quad P \left(\underbrace{(x^3+1)}_g \cdot \underbrace{3x^2}_{g'} \right) = \frac{1}{8} (x^3+1)^8$$

$$b) \quad P \left(\underbrace{(2x+1)}_{g'} \cdot \cos \left(\underbrace{x^2+x}_g \right) \right) = \sin(x^2+x)$$

$$c) \quad P \left(\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}} \right) = P \left(\underbrace{3x^2}_{g'} \cdot \underbrace{(x^3)^{-\frac{1}{2}}}_g \right) = 2(x^3)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^3}$$

Corollaire

$$f(ax+b) \text{ admet la primitive } \frac{1}{a} F(ax+b)$$

§ 33. RÉSUMÉ SUR LES PRIMITIVES

Définition

On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Les autres primitives de f sur I sont toutes du type $F + c$, où c est une constante quelconque.

Propriétés

$$P(f + g) = P(f) + P(g) \qquad P(cf) = c P(f) \qquad P\left(f(g(x)) \cdot g'(x)\right) = F(g(x))$$

Primitives de quelques fonctions

Fonction	Primitive
c (constante)	cx
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$[g(x)]^n \cdot g'(x)$ ($n \neq -1$)	$\frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln g(x) $
e^x	e^x
$e^{g(x)} \cdot g'(x)$	$e^{g(x)}$
a^x	$a^x \cdot \frac{1}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a} F(ax+b)$

§ 34. LE SIGNE DE SOMMATION Σ

Définition

Soit $p \leq n$ deux entiers et $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_n$ une suite de nombres. Pour abréger l'écriture de la somme $a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$, on se sert de la lettre grecque Σ ("sigma") :

$$\sum_{i=p}^n a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$$

("somme de $i = p$ à n des a_i ")

Exemples

1. $\sum_{i=4}^9 i^2 = 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 =$ somme des carrés des entiers de 4 à 9.
2. $\sum_{i=0}^{50} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50 =$ somme des 51 premiers entiers.
3. $\sum_{k=0}^{50} 2k = 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 98 + 100 =$ somme des nombres pairs de 0 à 100.
4. $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} =$ somme des inverses des entiers entre 1 et n .
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = 0,33333 \dots = \frac{1}{3}$.

Propriétés

1. $\sum_{i=p}^n \alpha a_i = \alpha \sum_{i=p}^n a_i$
2. $\sum_{i=p}^n (a_i + b_i) = \left(\sum_{i=p}^n a_i \right) + \left(\sum_{i=p}^n b_i \right)$
3. $\sum_{i=p}^n \left(\sum_{j=q}^m a_{ij} \right) = \sum_{j=q}^m \left(\sum_{i=p}^n a_{ij} \right)$

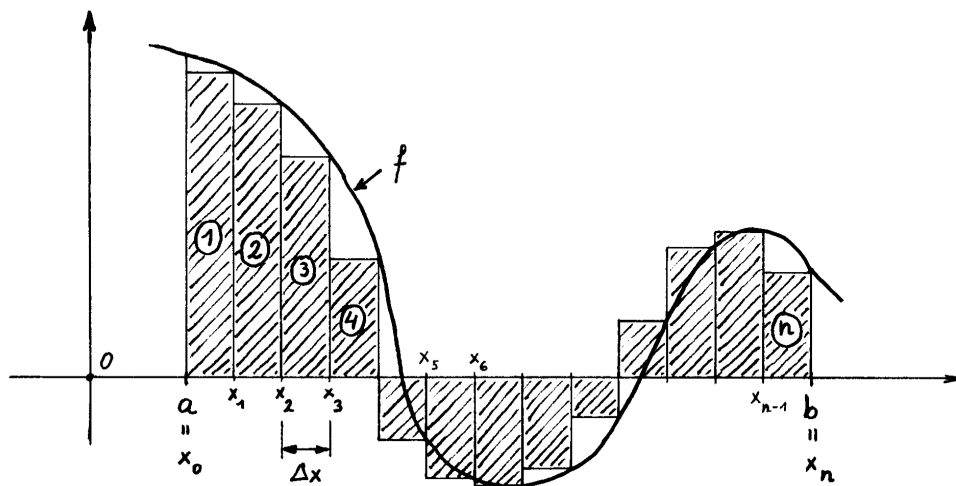
§ 35. INTÉGRALE D'UNE FONCTION

On considère un intervalle $[a, b]$ que l'on partage en n intervalles de même longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ et d'extrémités $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ telles que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On pose :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Le réel $\int_a^b f(x) dx$ ainsi défini s'appelle *intégrale de f , de a à b* . Les nombres a et b sont les *bornes d'intégration*.



Graphiquement, on voit que le nombre $\int_a^b f(x) dx$ mesure l'aire de la région du plan comprise entre le graphe de f , l'axe Ox et les verticales d'abscisses a et b , les zones situées sous l'axe Ox étant toutefois comptabilisées négativement. D'où la définition :

$$\text{Aire algébrique sous } f, \text{ de } a \text{ à } b = \int_a^b f(x) dx$$

On étend la définition de l'intégrale aux cas $a = b$ et $b < a$ en écrivant :

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \qquad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

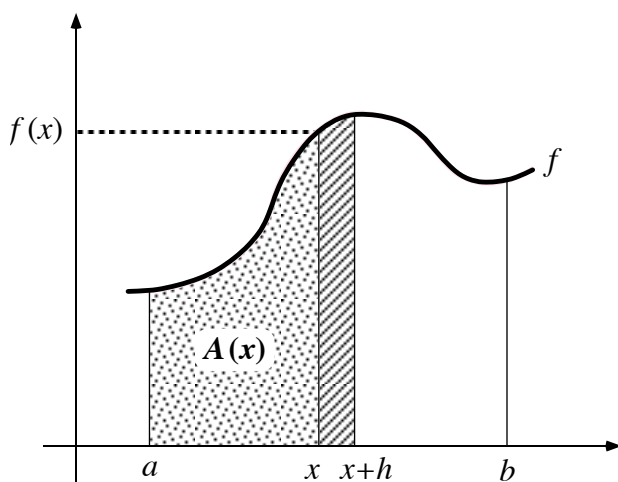
§ 36. THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL

Théorème

Soit F une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Preuve (idée)



aire  = $A(x+h) - A(x)$

Posons $A(x) = \int_a^x f(x) dx$ pour tout $x \in [a, b]$, et évaluons la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}.$$

Lorsque h est suffisamment petit, le nombre $A(x+h) - A(x)$ est à peu près l'aire algébrique d'un rectangle de dimensions h et $f(x)$.

Ainsi : $A(x+h) - A(x) \cong h \cdot f(x)$ et $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \cong f(x)$. On en déduit que

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$, ce qui signifie que la fonction A est dérivable et que sa dérivée est f .

A est donc une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Comme deux primitives de f diffèrent d'une constante, il existe un réel c tel que $F(x) = A(x) + c$, quel que soit $x \in [a, b]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (A(b) + c) - (A(a) + c) = A(b) - A(a) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = \\ &= \int_a^b f(x) dx - 0 = \int_a^b f(x) dx. \quad \text{D'où : } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Notation

$F(b) - F(a)$ s'écrit aussi $F(x) \Big|_a^b$ ou $\left[F(x) \right]_a^b$.

§ 37. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b, u des réels de cet intervalle. Soit encore F et G des primitives de f et g sur I .

Propriété 1

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Preuve

$$\begin{aligned} \int_a^b f + g &= [F + G]_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g. \end{aligned}$$

Propriété 2

$$\int_a^b c f = c \int_a^b f \quad (c = \text{constante})$$

Preuve

$$\int_a^b c f = [cF]_a^b = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c \int_a^b f.$$

Propriété 3

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

Preuve

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f.$$

Propriété 4

$$\int_a^u f + \int_u^b f = \int_a^b f$$

Preuve

$$\int_a^u f + \int_u^b f = (F(u) - F(a)) + (F(b) - F(u)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f.$$

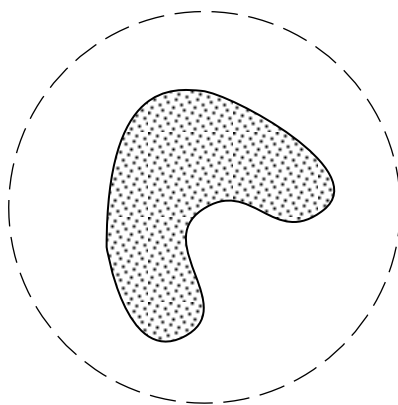
§ 38. RÉGIONS BORNÉES

Définition

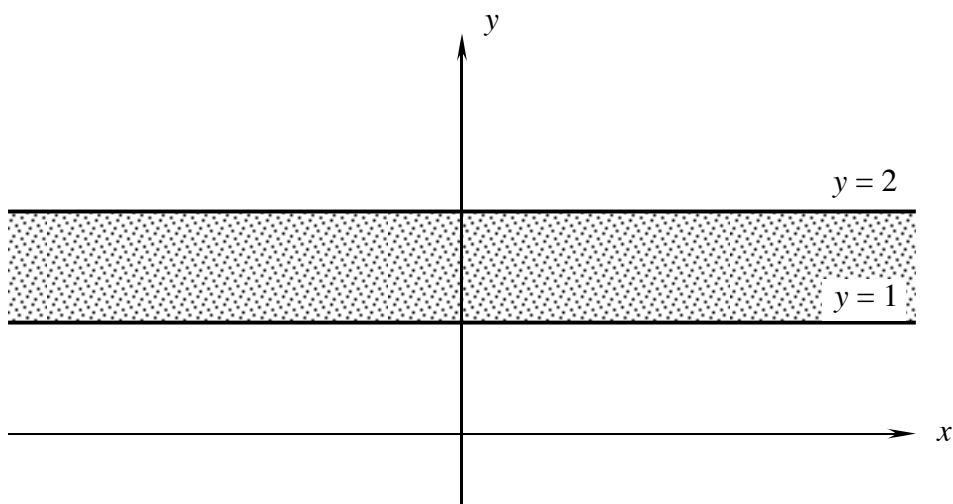
Une région du plan (resp. de l'espace) est dite *bornée* si elle est entièrement inscriptible dans un cercle (resp. une sphère).

Exemples

- a) La zone grisée ci-dessous est une région bornée du plan :



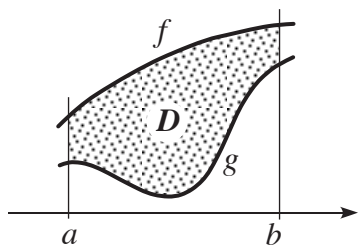
- b) Les points $P(x, y)$ du plan dont l'ordonnée est comprise entre 1 et 2 ($1 \leq y \leq 2$) forment une région **non** bornée du plan :



- c) Un cube est une figure bornée de l'espace.

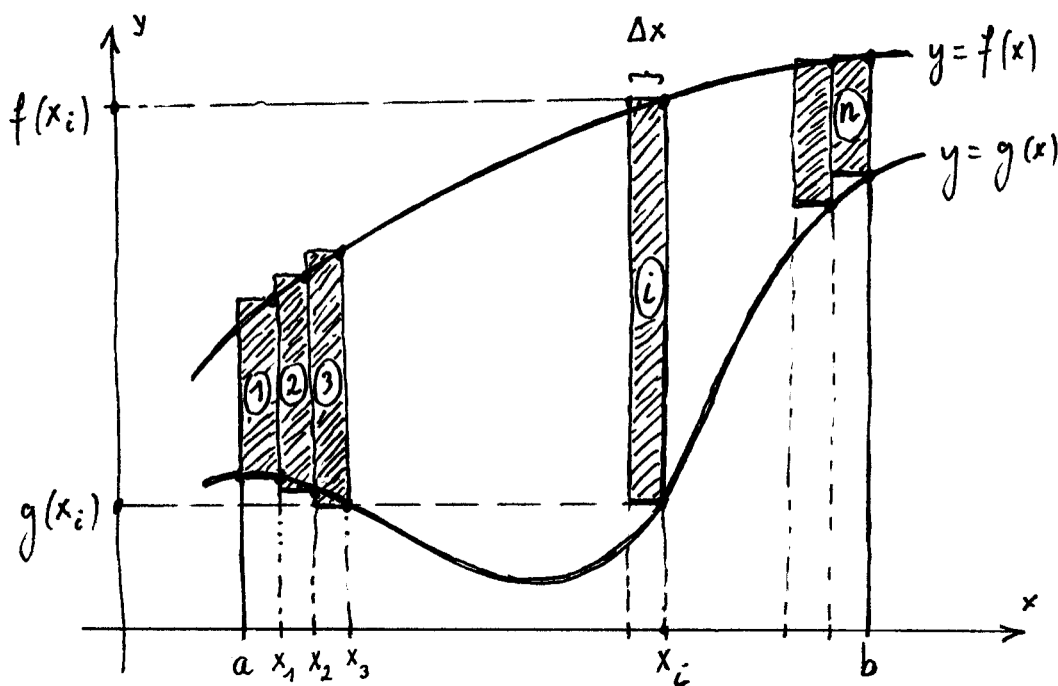
§ 39. AIRE D'UNE RÉGION SITUÉE ENTRE DEUX COURBES

On considère deux fonctions f et g continues sur un intervalle $[a, b]$ et telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit D le domaine borné limité par les graphes de f et g et par les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. Nous allons montrer que



$$\text{aire}(D) = \int_a^b f - g$$

Pour ce faire, divisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, d'extrémités $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, et introduisons n rectangles de hauteurs $f(x_i) - g(x_i)$ et de largeur Δx :

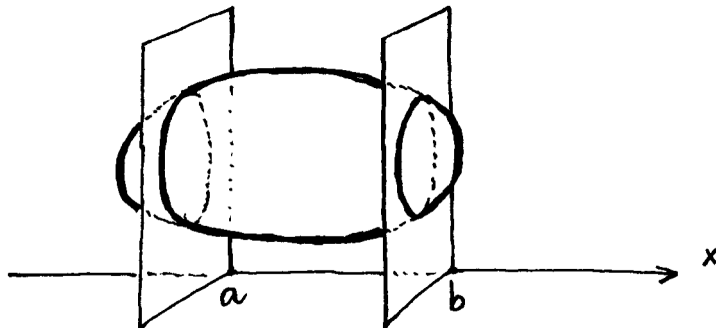


L'aire du domaine D est alors égale à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x$, puisque l'aire du i -ème rectangle est $(f(x_i) - g(x_i)) \Delta x$. Ainsi :

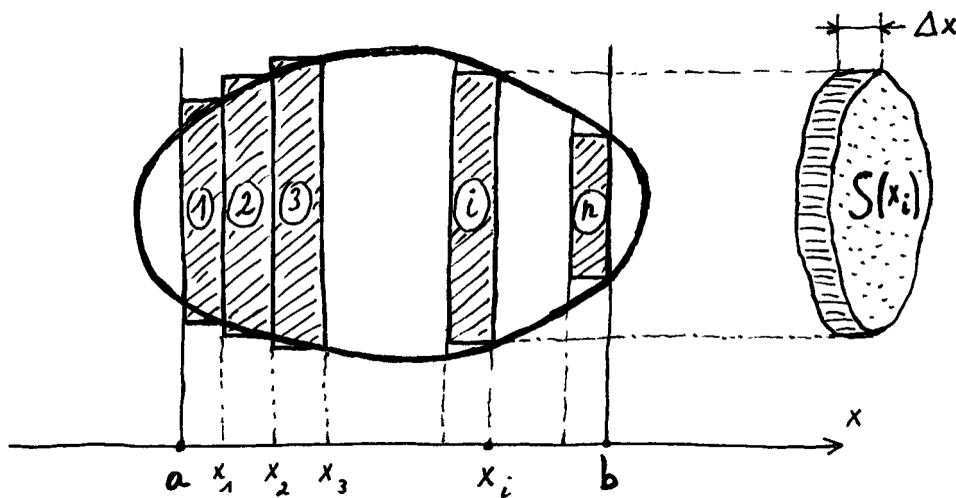
$$\text{aire}(D) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x = \int_a^b f - g$$

§ 40. VOLUME D'UN SOLIDE

On cherche à déterminer le volume V de la partie d'un solide comprise entre les plans perpendiculaires à Ox d'abscisses a et b :



Définissons n "*cyndres élémentaires*" (cyndres *droits*) en divisant comme d'habitude l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ de largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, et en prenant pour base du i -ème cylindre la section du solide par le plan perpendiculaire à Ox à l'abscisse x_i :



En désignant par $S(x)$ l'aire de la section d'abscisse x (section par un plan perpendiculaire à l'axe Ox), le volume du i -ème cylindre est alors égal à $V_i = S(x_i)\Delta x$ ("base · hauteur").

Ainsi :

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n S(x_i) \Delta x$$

D'où :

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

§ 50. LOGARITHME – DÉFINITION

Soient a et x deux réels > 0 , avec $a \neq 1$.

On appelle *logarithme de x en base a* — et l'on note $\log_a(x)$ — le nombre u tel que $x = a^u$.

$$u = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^u$$

Autrement dit, $\log_a(x)$ est *l'exposant de la puissance de base a qui est égale à x* .

Exemples

- $\log_{10}(1000) = 3$, car $1000 = 10^3$;
- $\log_{10}(0,01) = -2$, car $0,01 = 10^{-2}$;
- $\log_2(16) = 4$, car $16 = 2^4$.

§ 51. CALCUL D'UN LOGARITHME À LA MACHINE

La calculatrice donne le logarithme en base 10 (touche LOG). Pour calculer un logarithme de base différente, on utilise la formule suivante :

$$\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)}$$

Exemple

$$\log_{15}(1291) = \frac{\log_{10}(1291)}{\log_{10}(15)} = 2,645140178...$$

Preuve de la formule

Posons : $m = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^m$ (1)

$$u = \log_{10}(x) \Leftrightarrow x = 10^u$$
 (2)

$$v = \log_{10}(a) \Leftrightarrow a = 10^v$$
 (3)

Il faut montrer que $m = \frac{u}{v}$, qui équivaut à $mv = u$.

$$10^{mv} = \left(10^v\right)^m \stackrel{(3)}{=} a^m \stackrel{(1)}{=} x \stackrel{(2)}{=} 10^u. \quad \text{D'où} \quad 10^{mv} = 10^u \quad \text{et donc} \quad mv = u.$$

De manière analogue, on obtient la formule plus générale de **changement de base** :

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

§ 52. RÉCIPROCITÉ DE $\exp_a$ ET $\log_a$

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. On appelle *fonction exponentielle* de base a la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $\exp_a(x) = a^x$. On appelle *fonction logarithmique* de base a la fonction $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ envoyant x sur $\log_a(x)$.

Théorème

Les fonctions $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ sont **réciproques** l'une de l'autre. Autrement dit :

1. $\exp_a(\log_a(x)) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
2. $\log_a(\exp_a(x)) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Preuve

1. Posons $u = \log_a(x)$, qui équivaut à $x = a^u$.
Alors : $\exp_a(\log_a(x)) = \exp_a(u) = a^u = x$.
2. $\log_a(\exp_a(x)) = \log_a(a^x) = x$.

Corollaire

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

1. $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$
2. $\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve

1. $a^x = a^y \Rightarrow \log_a(a^x) = \log_a(a^y) \Rightarrow x = y$. La réciproque est banale.
2. $\log_a(x) = \log_a(y) \Rightarrow \exp_a(\log_a(x)) = \exp_a(\log_a(y)) \Rightarrow x = y$.

La réciproque est banale.

§ 53. LOGARITHME D'UN PRODUIT

Théorème

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

"Le logarithme transforme les multiplications en additions"

Preuve

Posons : $u = \log_a(xy) \Leftrightarrow a^u = xy$ (1)

$$v = \log_a(x) \Leftrightarrow a^v = x$$
 (2)

$$w = \log_a(y) \Leftrightarrow a^w = y$$
 (3)

Il faut établir que $u = v + w$.

$$a^{v+w} = a^v \cdot a^w \stackrel{(2)(3)}{=} xy \stackrel{(1)}{=} a^u. \text{ D'où } a^{v+w} = a^u \text{ et donc } u = v + w.$$

De manière analogue, on obtient :

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x), \text{ pour tout } n \in \mathbb{R}$$

§ 54. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons :

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Plus précisément : $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$, où $S_n(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. Il faut bien sûr montrer que cette limite existe et est finie (pour tout x), ce que nous ne ferons pas ici...

Définition

Notons e l'image de 1 par la fonction $\exp$:

$$e = \exp(1) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \cong 2,718$$

Théorème 1

Pour tous réels x, y :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Idée de la preuve

Multiplions les sommes définissant $\exp(x)$ et $\exp(y)$ comme de simples polynômes, en groupant les termes de même degré (on peut montrer que cette façon de faire est légitime) :

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \right) \\ &= 1 + (x+y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!} \right) + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^2y}{2!} + \frac{y^3}{3!} \right) + \dots \\ &= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots = \exp(x+y). \end{aligned}$$

Théorème 2

Pour tout réel x :

$$\exp(x) = e^x$$

Idée de la preuve

- $x \in \mathbb{N}$ $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \dots = 1 = e^0$

$$\exp(1) = e = e^1 \text{ (par définition de } e \text{)}$$

$$\exp(2) = \exp(1+1) \stackrel{*}{=} \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$$

$$\exp(3) = \exp(2+1) \stackrel{*}{=} \exp(2) \cdot \exp(1) = e^2 \cdot e = e^3$$

etc.

- $x \in \mathbb{Q}_+$ Prenons par exemple $x = \frac{3}{5}$. Il s'agit de montrer que $\exp\left(\frac{3}{5}\right) = e^{3/5} = \sqrt[5]{e^3}$.

$$\left(\exp\left(\frac{3}{5}\right)\right)^5 \stackrel{*}{=} \exp\left(5 \cdot \frac{3}{5}\right) = \exp(3) = e^3 ; \quad \Rightarrow \quad \exp\left(\frac{3}{5}\right) = \sqrt[5]{e^3}.$$

- $x \in \mathbb{Q}_-$ Ecrivons $x = -y$, avec $y \in \mathbb{Q}_+$. Alors :

$$\exp(y) \cdot \exp(-y) \stackrel{*}{=} \exp(y-y) = \exp(0) = 1 ;$$

$$\Rightarrow \exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{e^y} = e^{-y} \quad (y \in \mathbb{Q}_+) ; \quad \Rightarrow \quad \exp(x) = e^x.$$

- $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ C'est une question de "continuité"...

* En vertu du théorème 1

§ 55. DÉRIVÉE DE LA FONCTION e^x

Théorème

La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est sa propre dérivée :

$$(e^x)' = e^x$$

Preuve (idée)

On sait que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$. Il est possible de démontrer qu'en dérivant cette série terme à terme on obtient bien la dérivée de sa somme. Dérivons donc allégrement :

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x.\end{aligned}$$

D'où la formule annoncée.

La formule de dérivation d'une fonction composée donne alors :

Corollaire

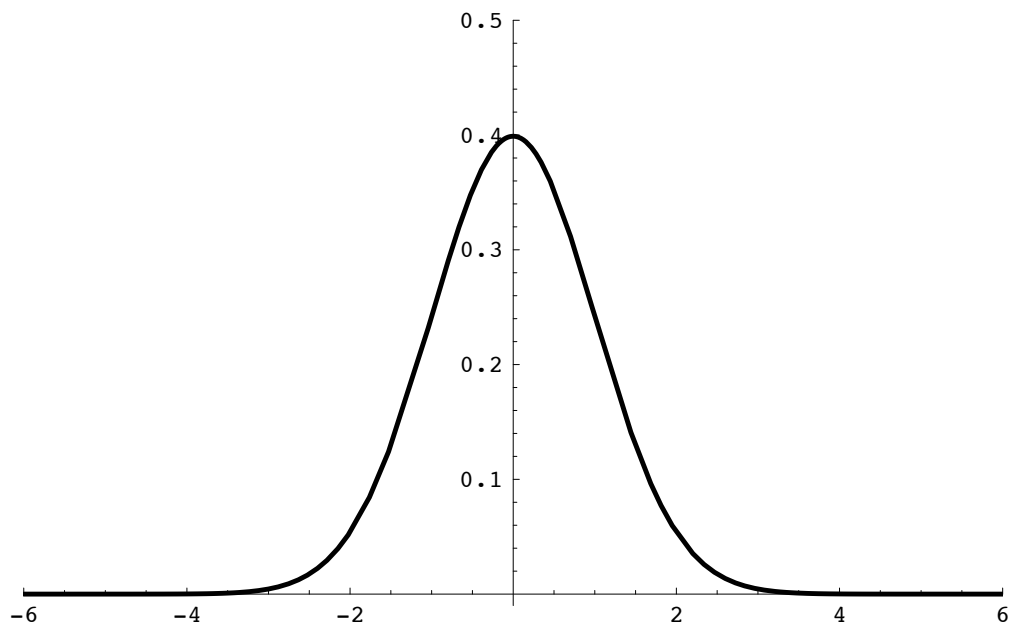
La dérivée de $e^{g(x)}$ est égale à $e^{g(x)} \cdot g'(x)$:

$$(e^g)' = e^g \cdot g'$$

Exemples

- $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$
- $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

Courbe de Gauss : $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$



*L'aire délimitée par la courbe et l'axe Ox
est exactement égale à 1*

§ 56. LOGARITHME NATUREL

Le logarithme naturel ("ln") est le logarithme en base $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \cong 2,718$:

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$$(x > 0)$$

On a donc :

$$u = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^u$$

L'ensemble de définition de la fonction $\ln : x \mapsto \ln(x)$ est $\mathbb{R}_+^*$, comme pour les autres logarithmes.

Formules diverses

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(e^x) = x$$

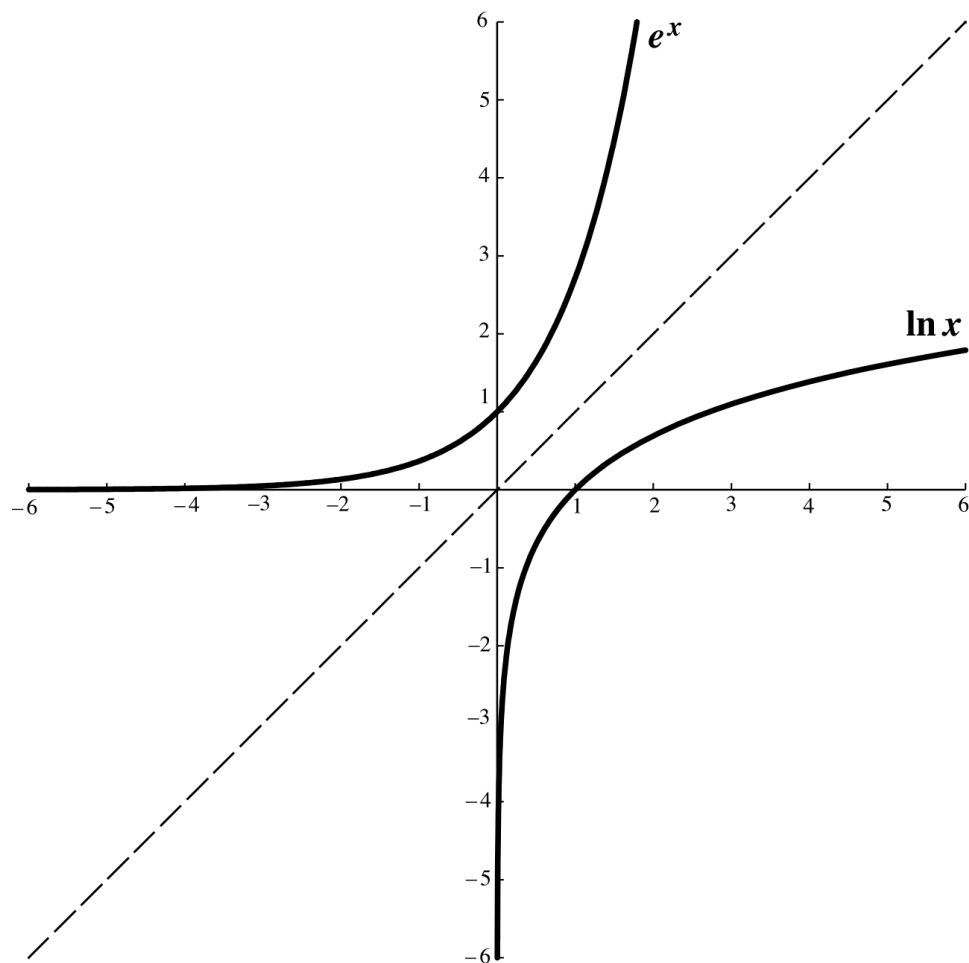
$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\text{Formules de passage : } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} ; \quad a^x = e^{(\ln a)x}$$

§ 57. GRAPHES DES FONCTIONS $\exp$ ET $\ln$



Les deux fonctions étant réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant (droite d'équation $y = x$).

Observons au passage que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$"e^{-\infty} = 0"$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$"e^{+\infty} = +\infty"$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

$$"\ln(0) = -\infty"$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$"\ln(+\infty) = +\infty"$$

§ 58. DÉRIVÉE DE LA FONCTION $\ln x$

Théorème

$$\left(\ln x \right)' = \frac{1}{x} \quad \left(\text{sur } \mathbb{R}_+^* \right)$$

Preuve

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il suffit de montrer que la limite de $\frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ lorsque x tend vers a existe et vaut $\frac{1}{a}$.

Posons $y = \ln x$ (qui équivaut à $x = \exp y$) et $b = \ln a$ (qui équivaut à $a = \exp b$). Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{\exp y - \exp b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\left(\frac{\exp y - \exp b}{y - b} \right)} = \frac{1}{\exp'(b)} = \frac{1}{\exp b} = \frac{1}{a}.$$

Corollaire 1

$$\text{La dérivée de } \ln(g(x)) \text{ est } \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Corollaire 2

$$\left(\ln |x| \right)' = \frac{1}{x} \quad \left(\text{sur } \mathbb{R}^* \right)$$

Preuve

Si $x > 0$, $|x| = x$, et $\left(\ln |x| \right)' = \left(\ln x \right)' = \frac{1}{x}$.

Si $x < 0$, $|x| = -x$, et $\left(\ln |x| \right)' = \left(\ln(-x) \right)' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Corollaire 3

$$\text{La dérivée de } \ln |g(x)| \text{ est } \frac{g'(x)}{g(x)}$$

§ 59. PRIMITIVE DE $1/x$

On sait que $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

$\ln|x|$ est donc une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$:

$$\boxed{P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln|x|}$$

Et je dirais même plus :

Comme la dérivée de $\ln|g(x)|$ est $\frac{g'(x)}{g(x)}$ [⊗],

on peut écrire :

$$\boxed{P\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right) = \ln|g(x)|}$$

Applications

$$1. \int_2^3 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| \right]_2^3 = \ln 3 - \ln 2 \approx 0,4055$$

$$2. \int_1^2 \frac{\overset{g'}{\underbrace{3x^2}_{g'}}}{\underbrace{x^3+1}_g} dx = \left[\ln|\underbrace{x^3+1}_g| \right]_1^2 = \ln 9 - \ln 2 \approx 1,504$$

[⊗] Si g est une "bonne" fonction.

§ 60. LIMITE DE $\frac{\ln x}{x}$ EN $+\infty$

Théorème

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

"La fonction $x \mapsto x$ l'emporte sur la fonction $x \mapsto \ln x$ en $+\infty$ "

Preuve

Soit $x > 1$. On a : $\int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$.

Mais $\frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$ pour tout $t > 1$. Ainsi :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt < \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}.$$

Nous avons donc, pour tout $x > 1$:

$$\underline{\underline{0 < \ln x < 2\sqrt{x}}}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, en vertu du "*théorème des deux gendarmes*"...

Corollaire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

§ 61. CROISSANCES COMPARÉES DE e^x , x^n et $\ln x$

Théorème

Pour tout $n > 0$, on a :

$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ $2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$ $3. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$	"la puissance l'emporte sur le log."
$4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$	"l'exponentielle l'emporte sur la puissance"

Preuves

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} \stackrel{x = z}{=} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\ln(z^{1/n})}{z} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln z}{z} = 0.$$

2. équivalent à 1.

$$3. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x \stackrel{x = 1/t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1/t)}{t^n} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln t}{t^n} \stackrel{\text{par 1.}}{=} 0.$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} \stackrel{\substack{x = \ln z \\ z = e^x}}{=} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z}{(\ln z)^n} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z^{1/n}}{\ln z} \right)^n \stackrel{\text{par 2.}}{=} +\infty$$

5. équivalent à 4.

Corollaire. Si n est un entier, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

§ 70. INTÉGRATION PAR PARTIES

Théorème

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$, f' et g' étant continues. Alors :

$$P(f'g) = fg - P(fg')$$

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

Preuve

De la formule $(fg)' = f'g + fg'$, on tire : $f'g = (fg)' - fg'$. D'où :

- $P(f'g) = P((fg)') - P(fg') = fg - P(fg')$.
- $\int_a^b f'g = \int_a^b (fg)' - \int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.

Exemples

- 1) Pour trouver une primitive de $x \sin x$, on se sert de la première formule ci-dessus, avec $f'(x) = \sin x$ et $g(x) = x$:

$$P(x \sin x) = -x \cos x - P(-\cos x) = -x \cos x + \sin x.$$

- 2) Pour calculer $\int_0^2 x e^{x/2} dx$, on utilise cette fois la deuxième formule, avec $f'(x) = e^{x/2}$ et $g(x) = x$:

$$\int_0^2 x e^{x/2} dx = [x \cdot 2e^{x/2}]_0^2 - \int_0^2 2e^{x/2} dx = 4e - [4e^{x/2}]_0^2 = 4e - 4e + 4 = 4.$$

§ 71. INTÉGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

Théorème

Soient I et J deux intervalles ; $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; $\varphi : I \rightarrow J$ une fonction dérivable dont la dérivée est continue ; $t_1, t_2 \in I$; $x_1 = \varphi(t_1)$; $x_2 = \varphi(t_2)$. Alors :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Preuve

Soit F une primitive de f sur J . (Existence de F : cf. démonstration du théorème fondamental du calcul intégral.)

En vertu de la règle de dérivation d'une fonction composée, la dérivée de $F(\varphi(t))$ est $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$;

$\Rightarrow F(\varphi(t))$ est une primitive de $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ sur I ;

$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$.

Remarques

1. Le passage de $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ à $\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ se fait formellement en remplaçant x par $\varphi(t)$, dx par $\varphi'(t) dt$, x_1 par t_1 et x_2 par t_2 .
2. L'écriture $dx = \varphi'(t) dt$, couramment utilisée, est en accord avec la notation de Leibniz :
$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Exemple

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx &\stackrel{(1)}{=} \int_0^2 \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2}} \cdot 2t dt \stackrel{(2)}{=} \int_0^2 \frac{t^2+1}{t} \cdot 2t dt = \int_0^2 (2t^2+2) dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + 2t \right]_0^2 = \left(\frac{28}{3} \right) - (0) = \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

(1) $t^2 = x - 1$; $x = t^2 + 1$; $dx = 2t dt$

(2) $\sqrt{t^2} = |t|$ et $|t| = t$ pour t entre 0 et 2

§ 72. INTÉGRATION DE FONCTIONS RATIONNELLES

A polynomial in x is a function of the form $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, where the a 's are constants, $a_0 \neq 0$, and n is a positive integer including zero. If two polynomials of the same degree are equal for all values of the variable, the coefficients of the like powers of the variable in the two polynomials are equal. Every polynomial with real coefficients can be expressed (at least, theoretically) as a product of real linear factors of the form $ax + b$ and real irreducible quadratic factors of the form $ax^2 + bx + c$.

A function $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, where $N(x)$ and $D(x)$ are polynomials, is called a **rational fraction**.

If the degree of $N(x)$ is less than the degree of $D(x)$, $f(x)$ is called **proper**; otherwise, $f(x)$ is called **improper**. An improper rational fraction can be expressed as the sum of a polynomial and a

proper rational fraction. Thus, $\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$.

Every proper rational fraction can be expressed (at least, theoretically) as a sum of simpler fractions (*partial fractions*) whose denominators are of the form $(ax + b)^n$ and $(ax^2 + bx + c)^n$, n being a positive integer.

Four cases, depending upon the nature of the factors of the denominator, arise.

Case I. Distinct linear factors. To each linear factor $ax + b$ occurring once in the denominator of a proper rational fraction, there corresponds a single partial fraction of the form $\frac{A}{ax + b}$, where A is a constant to be determined.

Case II. Repeated linear factors. To each linear factor $ax + b$ occurring n times in the denominator of a proper rational fraction, there corresponds a sum of n partial fractions of the form

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

where the A 's are constants to be determined.

Case III. Distinct quadratic factors. To each irreducible quadratic factor $ax^2 + bx + c$ occurring once in the denominator of a proper rational fraction, there corresponds a single partial fraction of the form $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$, where A and B are constants to be determined.

Case IV. Repeated quadratic factors. To each irreducible quadratic factor $ax^2 + bx + c$ occurring n times in the denominator of a proper rational fraction, there corresponds a sum of n partial fractions of the form

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Where the A 's and B 's are constants to be determined.

§ 73. LONGUEUR D'UNE COURBE

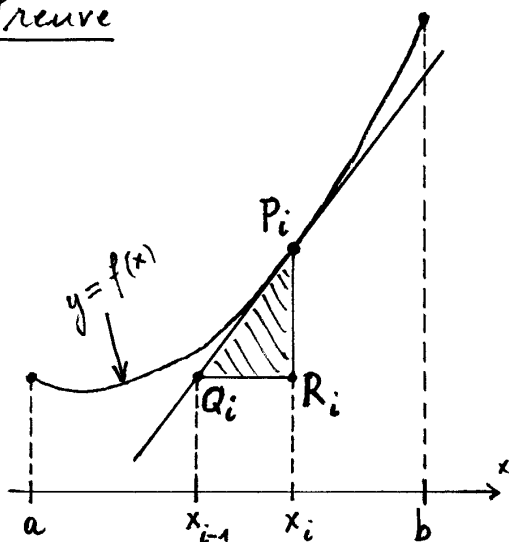
Théorème

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est continue.

La longueur s de la courbe $y = f(x)$ est donnée par :

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$$

Preuve



Partageons $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ et d'extrémités $x_0, x_1, \dots, x_n$ telles que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

A chaque indice i , on peut associer un triangle rectangle $P_i Q_i R_i$ comme indiqué sur

la figure, avec $P_i Q_i$ tangente au graphe de f en P_i . On a alors : $Q_i R_i = \Delta x$, $P_i R_i = \Delta y = f'(x_i) \Delta x$ et, par Pythagore, $P_i Q_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + f'^2(x_i) (\Delta x)^2} = \sqrt{1 + f'^2(x_i)} \Delta x$.

Ainsi :

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n P_i Q_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(x_i)} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx.$$

§ 74. PRIMITIVES DE FONCTIONS USUELLES

Dans ce tableau, F désigne une primitive de f .

$f(x)$	$F(x)$
$f[g(x)]g'(x)$	$F[g(x)]$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln g(x) $
a	ax
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \quad (n \neq 1)$
$\ln x$	$x(\ln x - 1)$
$\log_a x$	$x(\log_a x - \log_a e)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$\cot x$	$\ln \sin x $
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln(\cosh x)$
$\coth x$	$\ln \sinh x $

$f(x)$	$F(x)$
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b) \quad (a \neq 0)$
$[g(x)]^n g'(x)$	$\frac{1}{n+1}[g(x)]^{n+1} \quad (n \neq -1)$
x^m	$\frac{1}{m+1}x^{m+1} \quad (m \neq -1)$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ax+b}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln cx+d $
e^x	e^x
a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x$
$\operatorname{Arcsin} x$	$x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{Arccos} x$	$x \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{Arctan} x$	$x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\operatorname{Arccot} x$	$x \operatorname{Arccot} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\operatorname{Arcsinh} x$	$x \operatorname{Arcsinh} x - \sqrt{x^2+1}$
$\operatorname{Arccosh} x$	$x \operatorname{Arccosh} x - \sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{Arctanh} x$	$x \operatorname{Arctanh} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$
$\operatorname{Arccoth} x$	$x \operatorname{Arccoth} x + \frac{1}{2} \ln(x^2-1)$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b} \ln \left \frac{x-a}{x-b} \right \quad (a \neq b)$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left x + \sqrt{x^2 - a^2} \right $
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2} (x + \sin x \cos x)$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$
$\cot^2 x$	$-\cot x - x$
$\frac{1}{1 + \sin x}$	$\tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$
$\frac{1}{1 + \cos x}$	$\tan \frac{x}{2}$
$e^{ax} \sin(bx)$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin(bx) - b \cos(bx)]$
$e^{ax} \cos(bx)$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos(bx) + b \sin(bx)]$
$x \sin(ax)$	$-\frac{1}{a} x \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax)$
$x \cos(ax)$	$\frac{1}{a} x \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax)$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right $
$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right $
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\ln \left x + \sqrt{x^2 - a^2} \right $
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left \tan \frac{x}{2} \right $
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $
$\frac{1}{1 - \sin x}$	$-\cot \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$
$\frac{1}{1 - \cos x}$	$-\cot \frac{x}{2}$
xe^{ax}	$\left(\frac{1}{a} x - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$
$x \ln(ax)$	$\frac{x^2}{2} \ln(ax) - \frac{x^2}{4}$

§ 80. PLANS D'ÉTUDE DE FONCTIONS

A) Fonctions rationnelles 1. Ensemble de définition, parité 2. Signe de la fonction 3. Asymptotes (verticales, horizontale ou oblique) 4. Position du graphe relativement à l'asymptote horizontale ou oblique 5. Croissance (= variation), extremums et paliers 6. Convexité (= courbure) et points d'inflexion 7. Graphe	<i>Exemples :</i> • $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ • $f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1}$
B) Fonctions avec radicaux 1. Ensemble de définition, parité 2. Signe de la fonction 3. Croissance (= variation), extremums et paliers 4. Convexité (= courbure) et points d'inflexion 5. Asymptotes affines et points d'intersection du graphe avec celles-ci 6. Comportement au bord de l'ensemble de définition (asymptote verticale ? sinon, pente de la tangente ?) 7. Graphe	<i>Exemples :</i> • $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x+1}$ • $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$
C) Fonctions trigonométriques 1. Ensemble de définition, parité, périodicité (choix d'un intervalle d'étude) 2. Signe de la fonction 3. Croissance (= variation), extremums et paliers 4. Convexité (= courbure) et points d'inflexion 5. Asymptotes 6. Graphe	<i>Exemples :</i> • $f(x) = 2 \sin x \cos x$ • $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$
D) Fonctions exponentielles ou logarithmiques 1. Ensemble de définition, parité 2. Signe de la fonction 3. Croissance (= variation), extremums et paliers 4. Convexité (= courbure) et points d'inflexion 5. Asymptotes horizontales et/ou obliques 6. Comportement aux "bords" de l'ensemble de définition (asymptote verticale ? pente de la tangente ?) 7. Graphe	<i>Exemples :</i> • $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$ • $f(x) = \frac{\ln(3x)}{x-1}$