

3MS

ANALYSE

EXERCICES

EXERCICES D'ANALYSE 3MS

Fonctions rationnelles	FCR
Fonctions trigonométriques	FT
Calcul intégral	INT
Exponentielles et logarithmes	LG
Règle de L'Hospital	LH

FCR

9. Déterminer les pôles de la fonction f puis, pour chaque pôle a trouvé, calculer $u = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$

et $v = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$. En déduire les asymptotes verticales de f , les représenter dans un repère Oxy et

indiquer l'allure du graphe de f au voisinage de ces asymptotes.

$$1) \quad f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x+1}{(x-5)(1-x)}$$

4) $f(x) = \frac{-7}{x^3 + 3x^2}$

$$5) \quad f(x) = \frac{1-x}{x^2+7x+12}$$

6) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x-6}$

Rép. 1) $a=1: u=+\infty; v=+\infty$ / AV: $x=1$

2) $a=2: u=-\infty; v=+\infty / AV: x=2$

3) $a=1: u=-\infty; v=+\infty / a=5: u=+\infty; v=-\infty / \text{AV}: x=1; x=5$

4) $a = -3: u = +\infty; v = -\infty / a = 0: u = -\infty; v = -\infty / \text{AV}: x = -3; x = 0$

5) $a = -4: u = +\infty; v = -\infty / a = -3: u = -\infty; v = +\infty / \Delta V: x = -4; x = -3$

6) $a = -1: u = v = -\frac{1}{7} / a = 6: u = -\infty; v = +\infty / \text{AV}: x = 6$

10. Déterminer les asymptotes verticales et horizontales de la fonction f :

$$1) \quad f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 3x + 2}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$$

4) $f(x) = \frac{x+2}{2x^2+x}$

Rép. 1) $x = 3$; $y = 1$

3) $x = 1$; $x = 2$; $y = 1$

$$2) \quad x = 2; \quad y = 3$$

4) $x = 0$; $x = -\frac{1}{2}$; $y = 0$

11. Etudier le signe des fonctions suivantes :

$$1) \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + x - 6}$$

3) $f(x) = \frac{x-2}{x+3} - 1$

4) $f(x) = \frac{2x}{x-5} - 2$

$$5) \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} - 1$$

6) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-3}$

Rép.

1.

x	-3	-2	-1	1					
$f(x)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$

4. $\begin{array}{c|ccc} x & & 5 & \\ \hline f(x) & - & 11 & + \end{array}$

2.

x	-3	1	2
$f(x)$	$+$	11	$-$

 $0 - 11 +$

5.

x	-1	1
$f(x)$	$+$	$-$

3. $\begin{array}{c|ccc} x & & -3 & \\ \hline f(x) & + & || & - \end{array}$

6.

x	-5	-1	3
$f(x)$	+	0	-

FCR

12. Déterminer les asymptotes verticales et horizontales :

$$\begin{array}{lll}
 1) \ f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 3} & 2) \ f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x - 15} & 3) \ f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 17}{x^2 + 9} \\
 4) \ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & 5) \ f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x + 2} & 6) \ f(x) = \frac{3x^2 - 11x + 13}{3x^2 - 11x - 4}
 \end{array}$$

Rép. 1) $x = 3$ 2) $x = -5$; $x = 3$; $y = 0$ 3) — 4) —
 5) $x = -2$; $y = 0$ 6) $x = -\frac{1}{3}$; $x = 4$; $y = 1$

13.—

- Déterminer les asymptotes verticales et horizontales de la fonction donnée f .
- Etudier le signe de la fonction $\delta(x) = f(x) - h$ mesurant la "différence d'altitude" entre le graphe de f et l'asymptote horizontale d'équation $y = h$.
- Dans un système d'axes Oxy , représenter les asymptotes de f , puis hachurer les zones du plan dans lesquelles le graphe de f ne passe en tout cas pas, en vertu du signe de $\delta(x)$.
- Esquisser un graphe plausible pour f .

$$\begin{array}{ll}
 1) \ f(x) = \frac{2x+1}{x-3} & 2) \ f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 1}{x(x+2)} \\
 3) \ f(x) = \frac{-2x^2 - 11x + 12}{x^2 + 6x - 7} & 4) \ f(x) = \frac{2x^2 - x - 18}{x^2 - 9}
 \end{array}$$

Rép. 1) AV : $x = 3$ / AH : $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{7}{x-3}$
 zéros et pôles de δ : 3 / signe de δ : — || +

2) AV : $x = 0$; $x = -2$ / AH : $y = 3$ / $\delta(x) = \frac{1-x}{x(x+2)}$
 zéros et pôles de δ : -2 ; 0 ; 1 / signe de δ : + || - || + 0 -

3) AV : $x = -7$; $x = 1$ / AH : $y = -2$ / $\delta(x) = \frac{x-2}{x^2+6x-7}$
 zéros et pôles de δ : -7 ; 1 ; 2 / signe de δ : - || + || - 0 +

4) AV : $x = -3$; $x = 3$ / AH : $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{-x}{x^2-9}$
 zéros et pôles de δ : -3 ; 0 ; 3 / signe de δ : + || - 0 + || -

FCR

14. A l'aide d'une division euclidienne, exprimer les fractions $\frac{N}{D}$ suivantes comme somme d'un polynôme Q et d'une fraction $\frac{R}{D}$ telle que $d^\circ(R) < d^\circ(D)$: $\boxed{\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}}$.

1) $\frac{3x^2 - 8x - 32}{x - 5}$ 2) $\frac{x^4 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$ 3) $\frac{-4x^2 + 8x + 2}{2x + 1}$ 4) $\frac{x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2}$

Rép. 1) $(3x + 7) + \frac{3}{x - 5}$ 2) $(x^2 + 2) + \frac{2x}{x^2 + 1}$
 3) $(-2x + 5) + \frac{-3}{2x + 1}$ 4) $x + \frac{x + 1}{x^2}$

16. On donne une fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$. Au moyen d'une division euclidienne, mettre f sous la forme $Q + \frac{R}{D}$ et vérifier que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{R}{D} = 0$. Donner ensuite l'équation de l'asymptote oblique de f .

1) $\frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ 2) $\frac{2x^2 - 3x - 7}{x - 3}$ 3) $\frac{-x^3 + 5x^2 - 10}{x^2 - 2}$ 4) $\frac{3x^2 - 32}{3 - x}$

Rép. 1) $y = x - 1$ 2) $y = 2x + 3$ 3) $y = -x + 5$ 4) $y = -3x - 9$

17.—

- Déterminer les asymptotes de la fonction donnée f .
- Etudier le signe de la fonction $\delta(x)$ déterminant la position relative du graphe et de l'asymptote horizontale ou oblique.
- Dans un système d'axes Oxy , représenter les asymptotes de f , puis hachurer les zones du plan dans lesquelles le graphe de f ne passe en tous cas pas, en vertu du signe de δ .
- Esquisser un graphe plausible pour f .

1) $\frac{x^2 + 3x - 2}{x + 4}$ 2) $\frac{2x^2 + 3x - 7}{x^2 + x - 2}$ 3) $\frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 5}{2x^2 - 4x + 2}$ 4) $\frac{-2x^2 + 8x + 7}{x^2 - 4x - 5}$

Rép. 1) AV : $x = -4$ / AO : $y = x - 1$ / $\delta(x) = \frac{2}{x + 4}$
 zéros et pôles de δ : -4 / signe de δ : $- \parallel +$
 2) AV : $x = -2$; $x = 1$ / AH : $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{x - 3}{(x + 2)(x - 1)}$
 zéros et pôles de δ : -2 ; 1 ; 3 / signe de δ : $- \parallel + \parallel - 0 +$
 3) AV : $x = 1$ / AO : $y = \frac{1}{2}x - 1$ / $\delta(x) = \frac{x - 3}{2(x - 1)^2}$
 zéros et pôles de δ : 1 ; 3 / signe de δ : $- \parallel - 0 +$
 4) AV : $x = -1$; $x = 5$ / AH : $y = -2$ / $\delta(x) = \frac{-3}{(x - 5)(x + 1)}$
 zéros et pôles de δ : -1 ; 5 / signe de δ : $- \parallel + \parallel -$

FCR

18. Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes. Etudier la position du graphe relativement à l'asymptote horizontale ou oblique (signe de la fonction δ). Esquisser le graphe.

$$1) \frac{2x^2 - x}{x-1} \quad 2) \frac{x^3 - x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} \quad 3) \frac{-3x^2 + x + 33}{9 - x^2} \quad 4) \frac{-x^4 + 9x^3 - 25x^2 + 19x - 14}{x^3 - 6x^2 + 8x}$$

Rép. 1) AV : $x=1$ / AO : $y=2x+1$ / $\delta(x) = \frac{1}{x-1}$
zéros et pôles de δ : 1 / signe de δ : - || +

2) AV : $x=-2$; $x=2$ / AO : $y=x-1$ / $\delta(x) = \frac{2x}{x^2-4}$
zéros et pôles de δ : -2 ; 0 ; 2 / signe de δ : - || + 0 - || +

3) AV : $x=-3$; $x=3$ / AH : $y=3$ / $\delta(x) = \frac{x+6}{(3-x)(3+x)}$
zéros et pôles de δ : -6 ; -3 ; 3 / signe de δ : + 0 - || + || -

4) AV : $x=0$; $x=2$; $x=4$ / AO : $y=-x+3$ / $\delta(x) = \frac{(x+2)(x-7)}{x(x-2)(x-4)}$
zéros et pôles de δ : -2 ; 0 ; 2 ; 4 ; 7 / signe de δ : - 0 + || - || + || - 0 +

19. Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes. Etudier la position du graphe relativement à l'asymptote horizontale ou oblique (signe de la fonction δ). Esquisser le graphe.

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 3x} \quad 2) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4}$$

Rép. 1) AV : $x=0$; $x=3$ / AH : $y=1$ / $\delta(x) = \frac{-18}{x(x-3)}$
zéros et pôles de δ : 0 ; 3 / signe de δ : - || + || -

2) AV : $x=-2$; $x=2$ / AO : $y=x-3$ / $\delta(x) = \frac{4x-10}{x^2-4}$
zéros et pôles de δ : -2 ; 2 ; $\frac{5}{2}$ / signe de δ : - || + || - 0 +

20. Trouver deux polynômes $N(x)$ et $D(x)$ tels que la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ admette les asymptotes d'équations $x=-1$, $x=0$, $x=7$, $y=\frac{2}{7}$, et que 2 soit un zéro de f .

21. Construire une fonction rationnelle admettant les asymptotes $y=2x+5$, $x=2$, $x=3$, et dont le graphe passe par les points $A(1; 12)$ et $B(4; 21)$.

Rép. $f(x) = (2x+5) + \frac{2x+8}{(x-2)(x-3)} = \frac{2x^3 - 5x^2 - 11x + 38}{x^2 - 5x + 6}$

FCR

22. Soit $f(x) = \frac{-x^2 + bx - 7}{x + a}$. Déterminer a et b afin que les asymptotes de f soient $x = 3$ et $y = -x + 1$.

Rép. $a = -3$; $b = 4$

23. Montrer qu'une fonction polynomiale de degré ≥ 2 n'a aucune asymptote.

24. Dériver:

1) x^7

2) $3x^2$

3) $\frac{2}{5}x^9$

4) $\frac{5x^3}{3}$

5) $2x^3 - 5x^2 + 9$

6) $\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{5}x + 1$

7) $\frac{2x^5}{7} - \frac{3x^2}{5} + 2$

8) $(2x + 1)^5$

9) $(x^3 - 1)^7$

10) $(3x^2 + x)^3$

11) $(2x + 5x^4)^3$

12) $\frac{7x^2}{5} - \frac{3x}{7} + 1$

Rép. 1) $7x^6$ 2) $6x$ 3) $\frac{18}{5}x^8$ 4) $5x^2$ 5) $6x^2 - 10x$ 6) $\frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{5}$
7) $\frac{10}{7}x^4 - \frac{6}{5}x$ 8) $10(2x + 1)^4$ 9) $21x^2(x^3 - 1)^6$ 10) $3x^2(3x + 1)^2(6x + 1)$
11) $6x^2(2 + 5x^3)^2(1 + 10x^3)$ 12) $\frac{14}{5}x - \frac{3}{7}$

25. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a :

1) $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$; $a = 1$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$ 3) $f(x) = \frac{3x - 2}{5x + 1}$; $a = 0$

Rép. 1) $y = 4x - 3$ 2) $y = \frac{1}{4}x + 1$ 3) $y = 13x - 2$

26. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{5}$ et le point $A(-1; -3)$.

Déterminer les équations des tangentes passant par A à la parabole $y = f(x)$.

Rép. $y = \frac{6}{5}x - \frac{9}{5}$ et $y = -2x - 5$

FCR

27. Dériver :

- | | | |
|--------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 1) $(2x+1)^7$ | 2) $(-6x^2+x)^{15}$ | 3) $\frac{x^2+12x-15}{x+1}$ |
| 4) $\frac{1}{2x+1}$ | 5) $\frac{1}{x^4+9}$ | 6) $\frac{x^3}{x+1}$ |
| 7) $\frac{(x-1)^2}{x^3}$ | 8) $\frac{(x-3)^3}{(x^2-2)^4}$ | 9) $\frac{1}{(2x-3)^7}$ |

Rép.

- | | | | |
|---|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| 1) $14(2x+1)^6$ | 2) $15(-12x+1)(-6x^2+x)^{14}$ | 3) $\frac{x^2+2x+27}{(x+1)^2}$ | 4) $\frac{-2}{(2x+1)^2}$ |
| 5) $\frac{-4x^3}{(x^4+9)^2}$ | 6) $\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ | 7) $\frac{(x-1)(-x+3)}{x^4}$ | |
| 8) $\frac{(x-3)^2(-5x^2+24x-6)}{(x^2-2)^5}$ | 9) $\frac{-14}{(2x-3)^8}$ | | |

28. Etudier la *croissance* de f et calculer les coordonnées des "points à tangente horizontale" (= maximums, minimums, paliers).

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 - 6x + 8$ | 2. $f(x) = \frac{-2x^2 + x - 2}{x}$ |
| 3. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ | 4. $f(x) = \frac{6x}{1+x^2}$ |

Rép. 1. $f'(x) = 2x - 6$ / min : (3 ; -1)

2. $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x+1)}{x^2}$ / min : (-1 ; 5) / max : (1 ; -3)

3. $f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}$ / palier : (-1 ; 0) / min : $(2 ; \frac{27}{4})$

4. $f'(x) = \frac{6(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ / min : (-1 ; -3) / max : (1 ; 3)

FCR

29. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

2. $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2$

3. $f(x) = \frac{1}{16}(3x^5 - 15x^4 + 20x^3)$

4. $f(x) = \frac{x^3 + 2}{2x}$

Rép. 1. $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+2)^2$ / $f'(x) = -\frac{3}{2}x(x+2)$ / min : $(-2; 0)$ / max : $(0; 2)$

2. zéros de f : $\pm\sqrt{2}$; ± 2 / $f'(x) = x(3-x^2)$ / max : $(\pm\sqrt{3}; \frac{1}{4})$ / min : $(0; -2)$

3. $f'(x) = \frac{15}{16}x^2(x-2)^2$ / paliers : $(0; 0), (2; 1)$

4. zéro de f : $-\sqrt[3]{2} \cong -1,26$ / $f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$ / min : $(1; \frac{3}{2})$

30. On donne une fonction f et un nombre a . Etudier la croissance de f et déterminer l'équation de la tangente au graphe au point d'abscisse a . Dessiner le graphe avec la tangente trouvée.

1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; $a = 5$

2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$; $a = 3$

3) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$; $a = 1$

Rép. 1) $y = 4x - 17$ 2) $y = 3x - 7$ 3) $y = -x + 1$

31. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{10}{(x-5)^2}$

2. $f(x) = \frac{3x-16}{x-5}$

Rép. 1. $D = \mathbb{R} - \{5\}$ / asymptotes : $x = 5$; $y = 0$ / $\delta(x) = f(x)$ / $f'(x) = \frac{-20}{(x-5)^3}$

2. $D = \mathbb{R} - \{5\}$ / zéro de f : $\frac{16}{3}$ / asymptotes : $x = 5$; $y = 3$ / $\delta(x) = \frac{-1}{x-5}$
 $f'(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$

32.—

a) Trouver une fonction rationnelle f telle que :

- f admet les asymptotes d'équations $y = 2x + 1$, $x = 2$, $x = -3$;
- le graphe de f passe par $A(-2; 0)$ et coupe l'asymptote oblique à l'abscisse 1.

b) Etudier la position relative du graphe de f et de l'asymptote oblique ; esquisser un graphe plausible pour f .

FCR

33. Etudier les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} & 2) f(x) = \frac{-2x^2 + x - 2}{x} \\ 3) f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x+1)} & 4) f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 31}{x-2} \end{array}$$

Rép. 1. $D = \mathbb{R}^*$ / asymptotes : $x=0$; $y=x+1$ / $\delta(x) = \frac{1}{x}$ / $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$
max : $(-1 ; -1)$ / min : $(1 ; 3)$

2. $D = \mathbb{R}^*$ / asymptotes : $x=0$; $y=-2x+1$ / $\delta(x) = \frac{-2}{x}$
 $f'(x) = \frac{-2(x^2-1)}{x^2}$ / min : $(-1 ; 5)$ / max : $(1 ; -3)$

3. $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ / asymptotes : $x=-1$; $y=\frac{1}{2}x+1$ / $\delta(x) = \frac{2}{x+1}$
 $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)^2}$ / max : $(-3 ; -\frac{3}{2})$ / min : $(1 ; \frac{5}{2})$

4. $D = \mathbb{R} - \{2\}$ / asymptotes : $x=2$; $y=-x+3$ / $\delta(x) = \frac{-25}{x-2}$
 $f'(x) = \frac{-(x-7)(x+3)}{(x-2)^2}$ / min : $(-3 ; 11)$ / max : $(7 ; -9)$

34. Etudier la fonction f donnée par $f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1}$.

Rép. Zéros de f : $0 ; \frac{1}{2}$ / AV : $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ / AO : $y = x - \frac{1}{2}$ / $\delta(x) = \frac{2x-1}{2(2x^2-1)}$

$$f'(x) = \frac{4x^4 - 6x^2 + 2x}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x-1)(2x^2 + 2x - 1)}{(2x^2 - 1)^2} \quad / \text{ Zéros de } f' : 0 ; 1 ; \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f(x)$	$- \quad \quad +$	0	$+$	$- \quad \quad +$

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\delta(x)$	$- \quad \quad +$	0	$- \quad \quad +$

x	x_1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	x_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$- \quad \quad -$	0	$+$	0
$f(x)$	$\nearrow M$	$\searrow m$	$\searrow m$	$\nearrow M$	$\searrow m$	$\nearrow$

où $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \approx -1,37$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \approx 0,37$

FCR

35. Etudier les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$

2) $f(x) = \frac{x^2 - x + 5}{x}$

3) $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$

4) $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 2x}$

Rép. 1) $D = \mathbb{R} - \{1\}$ / zéros de f : -2 ; 0 / asymptotes: $x = 1$; $y = x + 3$ / $\delta(x) = \frac{3}{x - 1}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2} \quad / \quad \max: (1 - \sqrt{3}; 0,536) \quad / \quad \min: (1 + \sqrt{3}; 7,464)$$

2) $D = \mathbb{R}^*$ / zéros de f : — / asymptotes: $x = 0$; $y = x - 1$ / $\delta(x) = \frac{5}{x}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2} \quad / \quad \max: (-\sqrt{5}; -5,47) \quad / \quad \min: (\sqrt{5}; 3,47)$$

3) $D = \mathbb{R}$ / zéros de f : 1 ; $\frac{5}{2}$ / asymptote: $y = 2$ / $\delta(x) = \frac{3(x - 3)}{x^2 - 5x + 7}$

$$f'(x) = \frac{-3(x - 2)(x - 4)}{(x^2 - 5x + 7)^2} \quad / \quad \min: (2; -1) \quad / \quad \max: (4; 3)$$

4) $D = \mathbb{R} - \{-2; 0\}$ / zéro de f : 1 / asymptotes: $x = -2$; $x = 0$; $y = 1$

$$\delta(x) = \frac{-4x + 1}{x(x + 2)} \quad / \quad f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2(x + 2)^2} \quad / \quad \max: (-\frac{1}{2}; -3) \quad / \quad \min: (1; 0)$$

FCR

36. Encore des fonctions à étudier :

$$1) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^3}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{(x+3)^3}{2x(x-5)}$$

Rép. 1) $D = \mathbb{R} - \{-2; 3\}$ / zéros de f : — / asymptotes : $x = -2$; $x = 3$; $y = 0$

$$\delta(x) = f(x) \quad / \quad f'(x) = \frac{-2x+1}{(x+2)^2(x-3)^2} \quad / \quad \max : \left(\frac{1}{2}; -\frac{4}{25}\right)$$

2) $D = \mathbb{R}^*$ / zéro de f : 1 / asymptotes : $x = 0$; $y = 1$ / $\delta(x) = \frac{x-2}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{-2(x-3)}{x^4} \quad / \quad \max : \left(3; \frac{28}{27}\right)$$

3) $D = \mathbb{R}$ / zéro de f : $\sqrt[3]{-2}$ / AO : $y = x$ / $\delta(x) = \frac{-x+2}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2} \quad / \quad \max : (0; 2) \quad / \quad \min : \left(1; \frac{3}{2}\right)$$

4) $D = \mathbb{R} - \{0; 5\}$ / zéro de f : -3 / pôles de f : 0 ; 5 / AV : $x = 0$; $x = 5$

$$\text{AO : } y = \frac{1}{2}x + 7 \quad / \quad \delta(x) = \frac{97x+27}{2x(x-5)} \quad / \quad f'(x) = \frac{(x+3)^2(x-1)(x-15)}{2x^2(x-5)^2}$$

palier : $(-3; 0)$ / $\max : (1; -8)$ / $\min : (15; 19,44)$

FT

1. Résoudre les équations :

- | | |
|----------------------|----------------------------|
| a) $\sin x = 0$ | b) $\cos x = 0$ |
| c) $\tan x = 0$ | d) $\tan x = 1$ |
| e) $\sin x = -1$ | f) $\cos x = -\frac{1}{2}$ |
| g) $\sin x = \cos x$ | h) $\sin x + \cos x = 0$ |
| i) $\sin x = 0,2$ | j) $\sin(2x) = 0$ |

- Rép.*
- | | |
|---|--|
| a) $k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ | b) $\frac{\pi}{2} + k\pi$ |
| c) $k\pi$ | d) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ |
| e) $\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ | f) $\pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ |
| g) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ | h) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ |
| i) $11,5^\circ + k \cdot 360^\circ / 168,5^\circ + k \cdot 360^\circ$ | j) $k \cdot \frac{\pi}{2}$ |

2. Etablir les identités suivantes à partir des trois "relations fondamentales" :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

- 1) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x$
- 2) $\frac{1}{\cos^2 u} - \frac{1}{\cos^2 v} = \tan^2 u - \tan^2 v$
- 3) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$
- 4) $\sin x \cos x (1 + \tan x) \left(1 - \frac{1}{\tan x}\right) = 1 - 2\cos^2 x$
- 5) $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$

3. Résoudre :

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1) $2 \tan^2 x - 3 \tan x + 1 = 0$ | 2) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$ |
| 3) $3 \sin^2 t + \cos^2 t - 2 = 0$ | 4) $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$ |
| 5) $\frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{4}$ | 6) |

- Rép.*
- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{\pi}{4} + k\pi / 26,565^\circ + k \cdot 180^\circ$ | 2) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi / \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ |
| 3) $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ | 4) $k \cdot 2\pi / \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ |
| 5) $\pm 36,667^\circ + k \cdot 180^\circ$ | 6) |

FT

4. Soit f une fonction et D son ensemble de définition. f est dite *périodique* s'il existe $p > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, $x + p \in D$ et $f(x + p) = f(x)$. Le nombre p est, par définition, une *période* de f .

On donne un nombre $p > 0$ et une fonction f . Montrer que p est une période de f :

1) $p = 1$; $f(x) = \sin(2\pi x + 1)$

2) $p = 2\pi$; $f(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$

3) $p = \pi$; $f(x) = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

4) $p = 8\pi$; $f(x) = \sin(x/4) + \cos(x/2)$

5) $p = \pi$; $f(x) = \sin^2(x)$

6) $p = 12\pi$; $f(x) = \sin(x/3) - \cos(x/2)$

5. On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si p est une période de f , kp en est également une.

6. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Démontrer que si p est une période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est une période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.

b) Démontrer que si p est **la** période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est **la** période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.

7. Trouver une période de la fonction f :

1) $f(x) = \sin(3x + \pi)$

2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

3) $f(x) = \tan\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

4) $f(x) = 7 \sin\left(\pi - \frac{2x}{5}\right)$

Rép. 1) $\frac{2\pi}{3}$ 2) 4π 3) $\frac{2\pi}{3}$ 4) 5π

FT

8. Etudier le signe des fonctions suivantes entre 0 et 2π :

1) $f(x) = \sin x$

2) $f(x) = \cos x$

3) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

4) $f(x) = \sin x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)$

5) $f(x) = \cos x \left(\sqrt{2} \sin x - 1 \right)$

6) $f(x) = \tan x - \sqrt{3}$

- Rép. 1) zéros de f : $0; \pi; 2\pi$ / signe de f : $0 + 0 - 0$
2) zéros de f : $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$ / signe de f : $+ 0 - 0 +$
3) zéros et pôles de f : $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ / signe de f : $0 + \parallel - 0 + \parallel - 0$
4) zéros de f : $0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; 2\pi$ / signe de f : $0 + 0 - 0 + 0 - 0$
5) zéros de f : $\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}$ / signe de f : $- 0 + 0 - 0 + 0 -$
6) zéros et pôles de f : $\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$ / signe de f : $- 0 + \parallel - 0 + \parallel -$

9. Etudier le signe de f entre 0 et 2π :

1) $f(x) = \sin(2x)$

2) $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

3) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

4) $f(x) = \frac{\cos(2x)}{1 - \sin x}$

5) $f(x) = \cos x + \sin^2 x - 1$

6)

- Rép. 1) zéros de f : $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ / signe de f : $0 + 0 - 0 + 0 - 0$
2) zéros de f : $0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; 2\pi$ / signe de f : $0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0$
3) zéros et pôles de f : $0; \pi; 2\pi$ / signe de f : $0 + \parallel - 0$
4) zéros et pôles de f : $\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$ / signe de f : $+ 0 - \parallel - 0 + 0 - 0 +$
5) zéros de f : $0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ / signe de f : $0 + 0 - 0 + 0$

10. Etudier la *croissance* de f entre 0 et 2π :

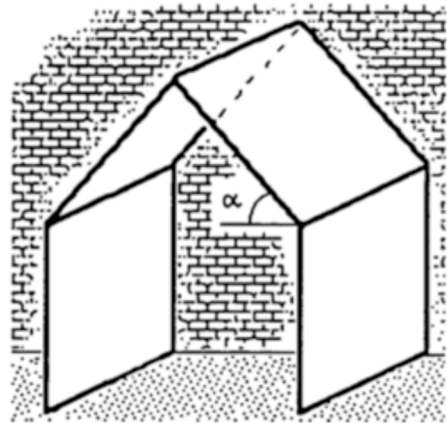
- 1) $f(x) = \cos x$
- 2) $f(x) = \sin(2x + \pi)$
- 3) $f(x) = \sin^2 x - 1$
- 4) $f(x) = \cos^2 x + \sin x + 17$

- Rép. 1. $f'(x) = -\sin x$ / zéros et pôles de f' : $0; \pi; 2\pi$ / signe de f' : $0 - 0 + 0$
croissance de f : $M \searrow m \nearrow M$
2. $f'(x) = 2 \cos(2x + \pi)$ / zéros et pôles de f' : $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$
signe de f' : $- 0 + 0 - 0 + 0 -$ / croiss. de f : $\searrow m \nearrow M \searrow m \nearrow M$
3. $f'(x) = 2 \sin x \cos x$ / zéros et pôles de f' : $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$
signe de f' : $0 + 0 - 0 + 0 - 0$ / croiss. de f : $m \nearrow M \searrow m \nearrow M \searrow m$
4. $f'(x) = \cos x(1 - 2 \sin x)$ / zéros et pôles de f' : $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}$
signe de f' : $+ 0 - 0 + 0 - 0 +$ / croiss. de f : $\nearrow M \searrow m \nearrow M \searrow m \nearrow$

12. Avec quatre planches carrées de côté a , on fabrique une niche à chien contre le mur d'une maison (cf. figure).

Déterminer l'angle α afin que le volume de la niche soit maximal.

- Rép. Volume de la niche :
 $a^3(2 \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha)$;
 maximal lorsque $\alpha = 21,47^\circ$



13. Calculer : a) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ b) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\tan x \cos^2 x} dx$

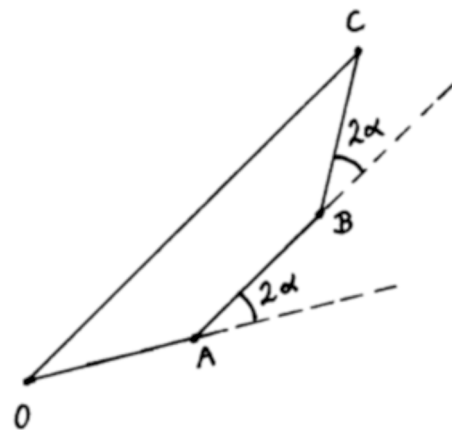
- Rép. a) $\frac{1}{6}$ b) $\ln \sqrt{3}$

14. Soit $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

- a) Etudier le signe de f et esquisser son graphe entre 0 et 2π .
- b) Calculer l'aire (géométrique) sous f entre 0 et $\frac{5\pi}{3}$.

Rép. 7

15. Dans la figure ci-contre, $OA = AB = BC = 1$.
L'angle α est compris entre 0° et 60° . Déterminer α de sorte que l'aire du trapèze soit maximale.



Rép. Aire du trapèze : $(1 + \cos(2\alpha)) \sin(2\alpha)$;
maximale quand $\alpha = 30^\circ$

16. Etudier les fonctions suivantes entre 0 et 2π . Points à traiter : signe de f , croissance, points à tangente horizontale, asymptotes verticales, esquisse du graphe.

1) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$

3) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$

4) $f(x) = \sin x - \sin^2 x$

Rép. 1) zéros de f : $\frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{10\pi}{6}$ / $f'(x) = 2 \cos x \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
zéros de f' : $\frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}; \frac{23\pi}{12}$ / 2 max. d'ordonnée 1 / 2 min. d'ordonnée -1

2) zéros de f : $\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$ / $f'(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ / zéros de f' : $\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}$
max : $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$ / min : $\left(\frac{7\pi}{6}; -2\right)$

3) zéros et pôles de f : $0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ / $f'(x) = (-\sin x) / (1 - \cos x)^2$
zéros et pôles de f' : $0; \pi; 2\pi$ / min : $\left(\pi; -\frac{1}{2}\right)$ / AV : $x = 0$; $x = 2\pi$

4) zéros de f : $0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi$ / $f'(x) = \cos x (1 - 2 \sin x)$
zéros de f' : $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}$ / max : $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{4}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{4}\right)$ / min : $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right); \left(\frac{3\pi}{2}; -2\right)$

17. Calculer l'aire sous $f(x) = \sin(2x)$ entre les abscisses 0 et $\frac{3\pi}{4}$.

Rép. 1,5

INT

1. On donne une fonction de f par $f(x)$. Trouver une primitive de f .

1) $\frac{5}{3}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 1$

2) $x^3 - 5x^2 + 3x - 2$

3) $x^2 - 5x + 6$

4) $2x - 1$

5) $\frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$

6) $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

7) $5x^2 - 2x + 3$

8) $-x^4 - 5x + 3$

Rép. 1) $\frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + x$ 2) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$ 3) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$ 4) $x^2 - x$
5) $\frac{1}{12}x^4 - x^2 + x$ 6) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x$ 7) $\frac{5}{3}x^3 - x^2 + 3x$ 8) $-\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 3x$

2. Trouver une primitive de la fonction f .

1) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$

2) $f(x) = \frac{5x^2}{7}$

3) $f(x) = 1 + x^{-5}$

4) $f(x) = 6x^3 - x + 3x^{-2}$

5) $f(x) = x^{2/7}$

6) $f(x) = 3x + 2 + x^{-2/3}$

7) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$

8) $f(x) = \frac{1}{x^5} + \sqrt[3]{x^4}$

Rép. 1) $\frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$ 2) $\frac{5}{21}x^3$ 3) $x - \frac{1}{4x^4}$ 4) $\frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x}$
5) $\frac{7}{9}\sqrt[7]{x^9}$ 6) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + 3\sqrt[3]{x}$ 7) $\frac{-1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ 8) $\frac{-1}{4x^4} + \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}$

3. Trouver une primitive :

a) $f(x) = 2(2x + 1)^2$

b) $f(x) = 4x(2x^2 + 1)^2$

c) $f(x) = (5 - 4x)(5x - 2x^2)^3$

d) $f(x) = 4(2x + 1)^3$

e) $f(x) = 8x(1 - 2x^2)^5$

f) $f(x) = 12x(2 - 3x^2)^7$

g) $f(x) = (3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)^5$

h) $f(x) = (6x^2 - 4)(x^3 - 2x + 1)^4$

i) $f(x) = 5(2x + 3)^{-5}$

j) $f(x) = (12x^2 + 10)(5x + 2x^3)^{-4}$

Rép. a) $\frac{1}{3}(2x + 1)^3$ b) $\frac{1}{3}(2x^2 + 1)^3$
c) $\frac{1}{4}(5x - 2x^2)^4$ d) $\frac{1}{2}(2x + 1)^4$
e) $-\frac{1}{3}(1 - 2x^2)^6$ f) $-\frac{1}{4}(2 - 3x^2)^8$
g) $\frac{1}{6}(x^3 + 2x + 1)^6$ h) $\frac{2}{5}(x^3 - 2x + 1)^5$
i) $-\frac{5}{8}(2x + 3)^{-4}$ j) $-\frac{2}{3}(5x + 2x^3)^{-3}$

INT

4. On donne une fonction de f par $f(x)$. Trouver une primitive de f .

1) $(2x+1)^3$

2) $(2-x)^{12}$

3) $6x(3x^2+1)^2$

4) $(2x-3)(x^2-3x+1)^5$

5) $6x(1-x^2)^3$

6) $(1-2x)^2$

7) $2x+1-\frac{1}{x^2}$

8) $\frac{1}{(x-1)^2}$

Rép. 1) $\frac{1}{8}(2x+1)^4$ 2) $-\frac{1}{13}(2-x)^{13}$ 3) $\frac{1}{3}(3x^2+1)^3$ 4) $\frac{1}{6}(x^2-3x+1)^6$

5) $-\frac{3}{4}(1-x^2)^4$ 6) $-\frac{1}{6}(1-2x)^3$ 7) $x^2+x+\frac{1}{x}$ 8) $\frac{-1}{x-1}$

5. Trouver une primitive :

1) $1+\frac{1}{x^2}$

2) $4+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^4}$

3) $-\frac{4}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}$

4) $x^3-\frac{1}{x^2}$

5) $\frac{x^3-3}{x^2}$

6) $\frac{3x^2}{(1+2x^3)^2}$

Rép. 1) $x-\frac{1}{x}$ 2) $4x-\frac{2}{x}+\frac{5}{3x^3}$ 3) $\frac{4}{3x^3}+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{4x^4}$ 4) $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{x}$

5) $\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x}$ 6) $\frac{-1}{2(1+2x^3)}$

6. Primitiver :

1) $\frac{2}{x^3}+\frac{1}{2x^2}$

2) $(3x+2)^6$

3) $(4x^2-5x)^2(16x-10)$

4) $\frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$

5) $x\sqrt{x}$

6) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

7) $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

8) $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

Rép. 1) $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}$ 2) $\frac{1}{21}(3x+2)^7$ 3) $\frac{2}{3}(4x^2-5x)^3$ 4) $\frac{-1}{x^2+x+3}$

5) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}$ 6) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ 7) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ 8) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}$

INT

7. Primitiver :

1) $x\sqrt{x^2+1}$

2) $x\sqrt[3]{ax^2+b}$

3) $\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

4) $\frac{3x^2}{\sqrt{9+x^3}}$

5) $\frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+8}}$

6) $\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$

Rép. 1) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$ 2) $\frac{3}{8a}\sqrt[3]{(ax^2+b)^4}$ 3) $2\sqrt{x^2+x+1}$ 4) $2\sqrt{9+x^3}$
 5) $\frac{2}{5}\sqrt{5x^3+8}$ 6) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1}$

8. Primitiver :

1) $(3x^2+1)\sqrt{x^3+x+2}$

2) $2\sqrt{x}+\sqrt{2x}$

3) $2x-\sqrt[3]{x}$

4) $2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

Rép. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^3+x+2)^3}$ 2) $\frac{2}{3}(2+\sqrt{2})\sqrt{x^3}$ 3) $x^2-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$ 4) $x^2-2\sqrt{x}$

10. Ecrire sans le signe Σ :

a) $\sum_{k=1}^4 x^k$

b) $\sum_{i=1}^3 2i$

c) $\sum_{i=3}^6 i \cdot x^i$

d) $\sum_{p=1}^2 \alpha_p \vec{e}_p$

e) $\sum_{i=1}^5 \frac{(-1)^i}{i}$

f) $\sum_{p=0}^3 a^p b^{3-p}$

g) $\sum_{k=0}^4 (2k+1)$

h) $n = \sum_{i=1}^3 n_i$

i) $\sum_{i=1}^3 x_i n_i$

j) $\sum_{i=1}^3 (x_i - 3) \cdot n_i$

Rép. a) $x+x^2+x^3+x^4$ b) $2+4+6$ c) $3x^3+4x^4+5x^5+6x^6$ d) $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$
 e) $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ f) $b^3+ab^2+a^2b+a^3$ g) $1+3+5+7+9$
 h) $n=n_1+n_2+n_3$ i) $x_1n_1+x_2n_2+x_3n_3$ j) $(x_1-3)n_1+(x_2-3)n_2+(x_3-3)n_3$

INT

11. Ecrire au moyen du signe Σ :

1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

2) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$

Rép. 1) $\sum_{i=1}^{10} i$ 2) $\sum_{i=1}^8 2i$

12. Ecrire au moyen du signe Σ :

1) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

3) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

4) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7$

5) $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{7}{100000}$

6) $a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + ab^4 + b^5$

Rép. 1) $\sum_{k=1}^5 a_{2k}$ 2) $\sum_{i=0}^5 \frac{1}{2^i}$ 3) $\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i$
4) $\sum_{i=0}^7 (-1)^i x^i$ 5) $\sum_{i=1}^5 \frac{7}{10^i}$ 6) $\sum_{i=0}^5 a^{5-i} b^i$

14. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^4 x^2 dx$

b) $\int_0^3 3x^2 dx$

c) $\int_1^5 \frac{x^2}{2} dx$

d) $\int_0^1 \frac{3}{5} x^3 dx$

e) $\int_0^2 (2x^3 - 3x^2 + x - 3) dx$

f) $\int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx$

Rép. a) 21 b) 27 c) $\frac{62}{3}$ d) $\frac{3}{20}$ e) -4 f) 6

15. Calculer l'aire du domaine borné limité par l'axe Ox et la courbe d'équation $y = f(x)$:

a) $y = 6x - x^2$

b) $y = 15 + 4x - 4x^2$

c) $y = x^2 - 7x + 6$

d) $y = 12x^2 - 4x^3$

Rép. a) 36 b) $\frac{128}{3}$ c) $\frac{125}{6}$ d) 27

16. Trouver l'aire du domaine borné limité par les courbes f et g :

a) $f: y = \frac{1}{2}x^2$; $g: y = 4 - x$

b) $f: y = 1 + \frac{1}{9}x^2$; $g: y = 3 - \frac{1}{9}x^2$

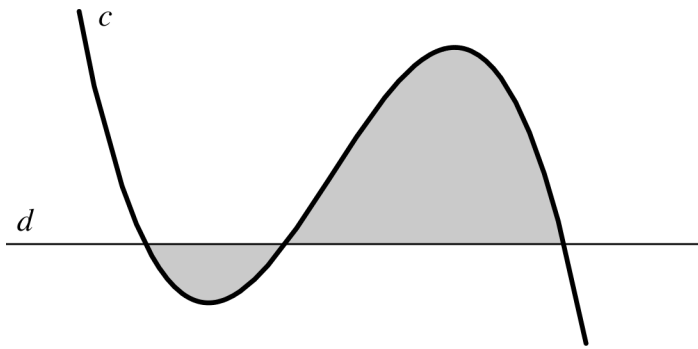
c) $f: y = 2x^2 - x + 5$; $g: y = 6$

d) $f: y = x^2 - 2x + 1$; $g: y = 3x + 1$

e) $f: y = 9x^2 - 3x^3$; $g: y = -3x^2 + 12x$

Rép. a) 18 b) 8 c) $\frac{9}{8}$ d) $\frac{125}{6}$ e) 4

17.—



Calculer l'aire grisée représentée ci-contre, connaissant les équations de la courbe c et de la droite d :

$$c : y = -x^3 + 5x^2 + x - 5$$

$$d : y = 0$$

Rép. 49,33

18. Soit $f(x) = x^3 - 10x^2 + 21x$.

a) Esquisser le graphe de la fonction f .

b) Calculer : $\int_0^7 f(x) dx$.

c) Calculer l'aire (géométrique) de la région comprise entre le graphe de f et l'axe Ox , et dans la bande verticale $0 \leq x \leq 7$.

Rép. b) -28,583 c) 78,083

19.—

a) Calculer : $\int_0^{2\pi} \sin x dx$.

b) Calculer l'aire (géométrique) de la région comprise entre le graphe de $\sin x$ et l'axe Ox , pour $x \in [0; 2\pi]$.

Rép. a) 0 b) 4

20. Trouver une primitive des fonctions suivantes au moyen d'une division euclidienne :

1) $\frac{x^3 + x^2 - 5x + 4}{(x-1)^2}$

2) $\frac{8x^5 + 8x^4 + 2x^3 - 2}{(2x+1)^2}$

3) $\frac{x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 5}{(x-1)^3}$

4) $\frac{x^3 - x^2 - 21x + 47}{x^2 - 6x + 9}$

Rép. 1) $\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{x-1}$

2) $\frac{x^4}{2} + \frac{1}{2x+1}$

3) $\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{5}{2(x-1)^2}$

4) $\frac{x^2}{2} + 5x - \frac{2}{x-3}$

INT

21. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{-2}^1 (x^2 - 3x + 2) dx$

2) $\int_0^2 (1-x)^3 dx$

3) $\int_{-1}^1 (2 + 3x^2 - 5x^4) dx$

4) $\int_{1/2}^2 \frac{x^2 + 1}{x^2} dx$

5) $\int_0^1 x^2 (2x+1)^2 dx$

6) $\int_1^2 \frac{x^3 + 2}{x^2} dx$

7) $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx$

8) $\int_0^a \pi a^2 x dx$

Rép. 1) $\frac{27}{2}$ 2) 0 3) 4 4) 3 5) $\frac{32}{15}$ 6) $\frac{5}{2}$ 7) $\frac{1}{6}$ 8) $\frac{\pi}{2}a^4$

22. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

2) $\int_2^3 \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$

3) $\int_a^0 (x^2 + a^2) dx$

4) $\int_0^3 \sqrt{1+x} dx$

5) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2 + 1)^3} dx$

6) $\int_{-1}^0 2x(1+x^2) dx$

Rép. 1) $2\sqrt{2} - \frac{5}{2}$ 2) $\frac{5}{12}$ 3) $-\frac{4}{3}a^3$ 4) $\frac{14}{3}$ 5) $\frac{9}{16}$ 6) $-\frac{3}{2}$

23. Soit $f: x \mapsto x^2 - 3x + 2$ et $g: x \mapsto -x^2 - x + 6$. Calculer la superficie du domaine borné compris entre les graphes de f et de g .

Rép. 9

24. Calculer l'aire de la région bornée du plan limitée par les deux paraboles $f: y = x^2 - 3x + 3$ et $g: y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$.

Rép. 2

25. Calculer l'aire de la région bornée du plan délimitée par les graphes des fonctions $f: x \mapsto \sqrt{x}$ et $g: x \mapsto x^2$.

Rép. $\frac{1}{3}$

INT

26. Soit $f: x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $g: x \mapsto |x|$. Calculer la superficie du domaine borné compris entre les graphes des fonctions f et g .

Rép. $\frac{4}{3}$

27. On donne la parabole d'équation $y = x - x^2$. Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe Ox du domaine limité par la parabole et l'axe Ox .

Rép. $\frac{1}{30}\pi$

28. On donne les points $R(0; 4)$ et $S(6; 0)$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation du segment RS autour de l'axe Ox . Rép. 32π

29. Calculer le volume du corps de révolution engendré par rotation autour de l'axe Ox du trapèze de sommets $(2; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 6)$ et $(2; 2)$.

Rép. $\frac{104}{3}\pi$

30. Calculer le volume d'une sphère de rayon r . Rép. $\frac{4}{3}\pi r^3$

31. (*Volume d'un cône de révolution*) Soient $O(0; 0)$, $A(0; r)$ et $S(h; 0)$ trois points du plan, r et h étant des réels strictement positifs. Calculer le volume du cône engendré par la rotation du triangle OAS autour de l'axe Ox .

Rép. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

32. (*Volume d'une pyramide à base carrée*) Calculer le volume d'une pyramide de hauteur h dont la base est un carré de côté a .

Rép. $\frac{1}{3}a^2 h$

33. Calculer :

a) $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

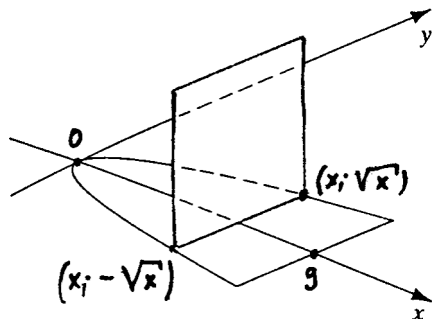
b) $\int_0^2 \frac{t+2}{\sqrt{t^2 + 4t + 8}} dt$

Rép. a) $2 - \sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

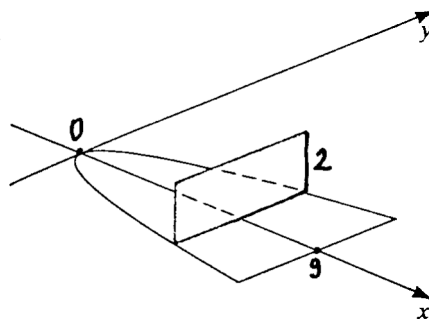
INT

34. Soit R la région bornée du plan Oxy délimitée par la parabole $y = \pm\sqrt{x}$ et la droite $x = 9$. Calculer le volume du solide dont R est la base et dont chaque section perpendiculaire à l'axe Ox a la forme indiquée ci-dessous :

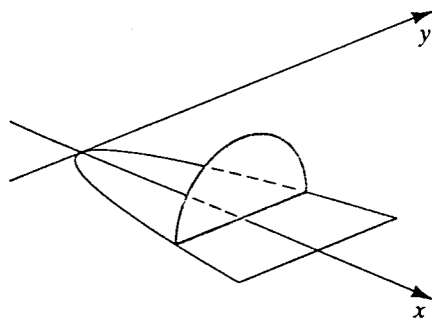
1) Un carré



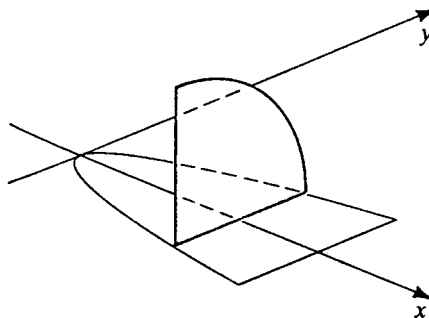
2) Un rectangle de hauteur 2



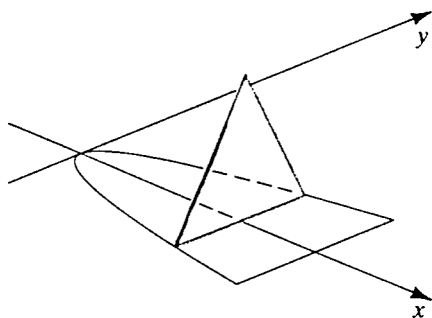
3) Un demi-cercle



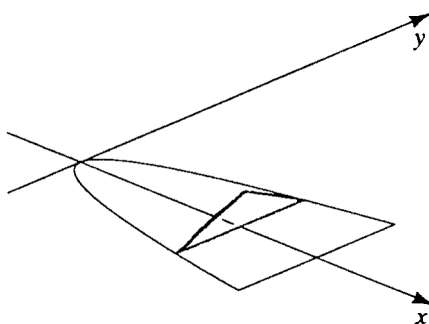
4) Un quart de cercle



5) Un triangle équilatéral



6) Un triangle dont la hauteur vaut le quart de la base



Rép. 1) 162 2) 72 3) $\frac{81}{4}\pi$ 4) $\frac{81}{2}\pi$ 5) $\frac{81}{2}\sqrt{3}$ 6) $\frac{81}{4}$

INT

35. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$. Esquisser le graphe de la fonction f pour $x \in [0; 1]$, puis calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce graphe autour de l'axe Ox .

Rép. $\frac{2}{15}\pi$

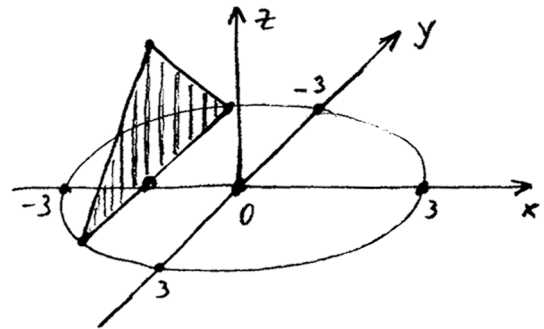
36. Soit R la région du plan comprise entre la parabole $y = 1 - x^2$ et l'axe Ox . Calculer le volume du solide engendré par la rotation de R autour de :

a) l'axe Ox .

b) l'axe Oy .

Rép. a) $\frac{16}{15}\pi$ b) $\frac{1}{2}\pi$

37. Un solide a pour base un disque de rayon 3 contenu dans le plan Oxy et centré à l'origine. Ses sections perpendiculaires à l'axe Ox sont toutes des triangles équilatéraux. Calculer le volume de ce solide.



Rép. $36\sqrt{3}$

38. On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

a) Montrer que f admet l'asymptote verticale d'équation $x = -1$, puis esquisser le graphe de f entre les abscisses -1 et 0 .

b) Calculer l'aire sous f entre -1 et 0 . (Remarquez que cette région n'est pas bornée.)

Rép. b) $\frac{2}{3}$

INT

40. Trouver une primitive :

- | | |
|---|--|
| 1) $\sin(5x)$ | 2) $\cos(2x)$ |
| 3) $\tan(3x)$ | 4) $\sin(x/2)$ |
| 5) $\sin\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$ | 6) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$ |
| 7) $\cos\left(\frac{x}{5} + \pi\right)$ | 8) $\tan\left(\frac{x}{3}\right)$ |

Rép. 1) $-\frac{1}{5}\cos(5x)$ 2) $\frac{1}{2}\sin(2x)$ 3) $-\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)|$ 4) $-2\cos(x/2)$
 5) $-3\cos\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$ 6) $\frac{1}{5}\sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$ 7) $5\sin\left(\frac{x}{5} + \pi\right)$ 8) $-3\ln\left|\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right|$

41. Trouver une primitive :

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------|
| 1) $6x^2 \sin(2x^3)$ | 2) $3\sin(3x+1)$ |
| 3) $\sin(2x)$ | 4) $\sin(7x+1)$ |
| 5) $x \cos(x^2 - 5)$ | 6) $\cos(-3x)$ |
| 7) $2\cos x \cdot \cos(1 + \sin x)$ | 8) $(4x-2)\cos(x^2 - x)$ |

Rép. 1) $-\cos(2x^3)$ 2) $-\cos(3x+1)$ 3) $-\frac{1}{2}\cos(2x)$ 4) $-\frac{1}{7}\cos(7x+1)$
 5) $\frac{1}{2}\sin(x^2 - 5)$ 6) $-\frac{1}{3}\sin(-3x)$ 7) $2\sin(1 + \sin x)$ 8) $2\sin(x^2 - x)$

42. Au moyen du cercle trigonométrique (sans calculatrice), évaluer :

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\cos(\pi)$ | 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ | 3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ | 4) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ |
| 5) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | 6) $\tan(3\pi)$ | 7) $\sin(3\pi)$ | 8) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ |

Rép. 1) -1 2) -1 3) -1 4) 1 5) -1 6) 0 7) 0 8) 0

43. Calculer :

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\int_0^{3\pi/4} \sin(2x) dx$ | 2) $\int_0^{\pi/6} \cos(3x) dx$ | 3) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} dx$ |
| 4) $\int_0^{\pi/4} (1 + \tan x)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$ | 5) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x + \pi) dx$ | 6) $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ |

Rép. 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{7}{3}$ 5) 0 6) 1

INT

44. On donne une fonction f et un point A . Déterminer la primitive F de f dont le graphe passe par A .

1) $f(x) = 3x^2 + 2$; $A(1; 5)$

2) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$; $A(1; 0)$

3) $f(x) = \sin(x) + \cos(2x)$; $A(\frac{\pi}{2}; 1)$

4) $f(x) = \cos(3x + \pi)$; $A(\frac{\pi}{2}; 1)$

Rép. 1) $F(x) = x^3 + 2x + 2$

2) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}$

3) $F(x) = -\cos x + \frac{1}{2}\sin(2x) + 1$

4) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x + \pi) + \frac{2}{3}$

45. On donne la fonction $f(x) = \frac{x}{4x^3 + 1}$.

Esquisser le graphe de f pour $x \geq 0$, puis calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce graphe autour de l'axe Ox . (Remarque : ce corps n'est pas borné.)

Rép. $\frac{1}{12}\pi$

46. Déterminer le réel $m > 0$ de façon que la région bornée comprise entre les courbes $y = \frac{1}{4}x^2$ et $y = mx$ ait une aire égale à 9.

Rép. $\frac{3}{2}$

47. Calculer l'aire délimitée par les graphes de $\sin x$ et $\cos x$ entre deux points d'intersection voisins. Rép. $2,828 (= 2\sqrt{2})$

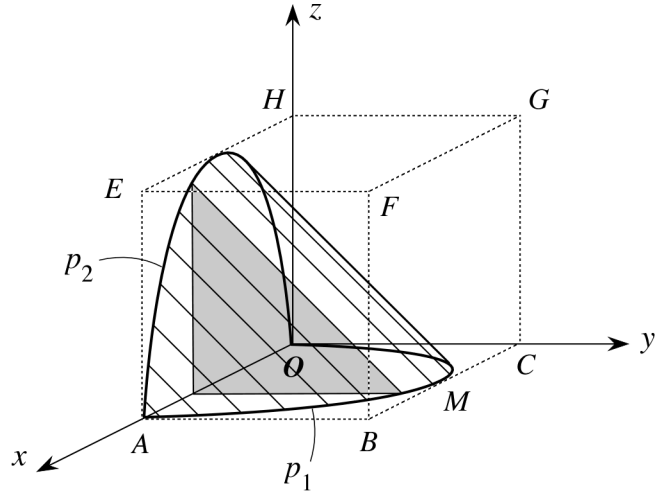
48.—

a) Déterminer la fonction du deuxième degré dont le graphe passe par les points $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ et $M(\frac{1}{2}; 1)$ du plan Oxy .

b) Un arc de parabole p_1 est inscrit dans la face $OABC$ d'un cube d'arête $OA = 1$ (cf. figure).

L'arc p_1 , d'extrémités O et A , passe par le milieu M de BC . Dans la face $OAEH$, l'arc de parabole p_2 , d'extrémités O et A , passe par le milieu de EH .

Calculer le volume du solide dont chaque section perpendiculaire à OA est un triangle ayant ses sommets sur OA , p_1 et p_2 .



Rép. a) $f(x) = -4x^2 + 4x$ b) $\frac{4}{15}$

LG

1. On note $\exp_a$ la fonction $x \mapsto a^x$ (fonction **exponentielle** de base a). Calculer :

- | | | |
|--------------------|-----------------|---------------------|
| 1. $\exp_2(3)$ | 2. $\exp_3(-2)$ | 3. $\exp_{0,5}(3)$ |
| 4. $\exp_{3,5}(2)$ | 5. $\exp_4(-3)$ | 6. $\exp_{2/3}(-2)$ |

Rép. 1. 8 2. $\frac{1}{9}$ 3. $\frac{1}{8}$ 4. 12,25 5. $\frac{1}{64}$ 6. $\frac{9}{4}$

2. Esquisser à l'aide de quelques points les graphes de $\exp_{3/2}$ et de $\exp_{2/3}$.

3. Sans machine, déterminer le log en base 10 des nombres suivants :

10 000 ; 1 000 000 ; $\frac{1}{1000}$; $10^{23,1}$; $\frac{1}{10^9}$; 0,0001 ; $\sqrt[3]{10000}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{10000}}$

Rép. 4 ; 6 ; -3 ; 23,1 ; -9 ; -4 ; $\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{5}$

4. Calculer (sans utiliser de machine) les nombres suivants :

- | | | | |
|--|--------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------|
| a) $\log_2(8)$ | b) $\log_2(128)$ | c) $\log_2(512)$ | d) $\log_2(1)$ |
| e) $\log_3\left(\sqrt[5]{3^2}\right)$ | f) $\log_3(3)$ | g) $\log_2(\sqrt{2})$ | h) $\log_4\left(\sqrt[5]{64}\right)$ |
| i) $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$ | j) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ | k) $\log_5(0,04)$ | l) $\log_{1/8}(64)$ |

Rép. a) 3 b) 7 c) 9 d) 0 e) 2/5 f) 1 g) 1/2 h) 3/5
i) -2/3 j) -4 k) -2 l) -2

5. Esquisser les graphes de $f: x \mapsto \log_{3/2}(x)$ et de $g: x \mapsto \log_{2/3}(x)$.

6. Résoudre les équations suivantes :

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------------------|
| 1) $\log_2(x) = 4$ | 2) $\log_3(x) = 5$ | 3) $\log_4(x) = 3$ | 4) $\log_{27/8}(x) = \frac{1}{3}$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------------------|

Rép. 1. 16 2. 243 3. 64 4. 3/2

7. Résoudre les équations :

- | | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1) $\log_x(256) = 4$ | 2) $\log_x(125) = 3$ | 3) $\log_x(1000) = 3$ | 4) $\log_x(0,0025) = 2$ |
|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------|

Rép. 1. 4 2. 5 3. 10 4. 0,05

LG

8. Mettre sous la forme " $\alpha \log a + \beta \log b + \gamma \log c$ " :

$$\begin{array}{lll} 1) \quad \log(a^2 bc) & 2) \quad \log\left(\frac{ab}{c}\right) & 3) \quad \log\left(\frac{a^2}{bc}\right) \\ 4) \quad \log\left(\frac{a^3}{\sqrt{b} c}\right) & 5) \quad \log\left(\frac{a^2 \sqrt[5]{b}}{\sqrt{c^3}}\right) & 6) \quad \log(ab^2 \sqrt{c}) \end{array}$$

Rép.

1.	$2 \log a + \log b + \log c$	2.	$\log a + \log b - \log c$
3.	$2 \log a - \log b - \log c$	4.	$3 \log a - \frac{1}{2} \log b - \log c$
5.	$2 \log a + \frac{1}{5} \log b - \frac{3}{2} \log c$	6.	$\log a + 2 \log b + \frac{1}{2} \log c$

9. Exprimer $\log_a \left(\frac{a^2 c \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[5]{d^4}} \right)$ en fonction des logarithmes en base a de b , c et d .

Rép. $2 + \frac{2}{3}\log_a(b) + \log_a(c) - \frac{4}{5}\log_a(d)$

10. Mettre sous la forme "log(...)" :

1) $3\log(a) - 2\log(b)$ 2) $\frac{1}{2}\log(a) + 5\log(b)$ 3) $3\log(a) + \frac{1}{5}\log(b) - \frac{7}{3}\log(c)$

Rép. 1) $\log\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$ 2) $\log(\sqrt{a} b^5)$ 3) $\log\left(\frac{a^3 \sqrt[5]{b}}{\sqrt[3]{c^7}}\right)$

11. On sait que $\log_a(y) = 2 + \frac{1}{3}\log_a(b) + 5\log_a(c) - \frac{4}{5}\log_a(d)$. Calculer y en fonction de a , b , c et d .

Rép. $y = \frac{a^2 \sqrt[3]{b} c^5}{\sqrt[5]{d^4}}$

12. Résoudre les équations :

1. $\log_a(x) = \log_a(16) + 2\log_a(3) - 2\log_a(2) - \frac{1}{2}\log_a(9)$

2. $\log_a(y) = 4\log_a(5) + \log_a(\frac{1}{5}) - 3\log_a(3) + \frac{1}{3}\log_a(27)$

Rép. $x = 12$; $y = \frac{125}{9}$

LG

13. En utilisant une machine, calculer :

- | | | |
|-------------------|----------------------|---------------------|
| 1. $\log_{10}(3)$ | 2. $\log_2(3)$ | 3. $\log_3(2)$ |
| 4. $\log_7(0,5)$ | 5. $\log_{1,5}(5,9)$ | 6. $\log_{0,8}(13)$ |

Rép. 1. 0,47712 / 2. 1,58496 / 3. 0,63093 / 4. -0,35620 / 5. 4,37757 / 6. -11,49461

14. En utilisant une calculatrice, résoudre les équations :

- | | | |
|-------------------|-----------------|----------------------|
| 1) $2^x = 100$ | 2) $10^x = 5$ | 3) $2^{2x} = 10$ |
| 4) $10^{x-3} = 3$ | 5) $12^x = 149$ | 6) $10^{3x} = 14,87$ |

Rép. 1. 6,64386 / 2. 0,69897 / 3. 1,66096 / 4. 3,47712 / 5. 2,01373 / 6. 0,39077

15. Résoudre les équations suivantes :

- | | | |
|---------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $3^x = 177147$ | b) $2^x = 100$ | c) $10^{3x} = 14,87$ |
| d) $3 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{-x} = 7$ | e) $2^{2x} - 7 \cdot 2^{x+1} = 15$ | f) $9^x \cdot 4^x = \frac{1}{200}$ |

Rép. a) 11 b) 6,64 c) 0,39077 d) 0,431 ; -0,683 e) 3,9 f) -1,479

16. Le nombre de bactéries d'une culture double toutes les 10 secondes. On suppose qu'il y a 200 bactéries au début de l'expérience.

- a) Combien de bactéries y aura-t-il après t secondes ?
b) Au bout de combien de secondes a-t-on 2000 bactéries ?

Rép. a) $200 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$ b) 33,2 secondes

17. Résoudre les équations suivantes:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1) $(3^{x-1})^3 = 3^2 \cdot 3^{x-2}$ | 2) $(5^{x+2})^4 = 5^3 \cdot 5^{x-3}$ |
| 3) $(3^3)^{x+2} = 3^{5x+8}$ | 4) $3 \cdot (3^{2x})^2 - 4 \cdot 3^{2x} + 1 = 0$ |
| 5) $2^{6x} + 6 \cdot 2^{3x} + 9 = 0$ | 6) $3 \cdot 2^{2x+2} - 20 \cdot 2^{x+1} = 32$ |

Rép. 1) $3/2$ 2) $-8/3$ 3) -1 4) 0 ; -1/2 5) pas de solution 6) 2

LG

18. Résoudre les équations suivantes, sans oublier de déterminer préalablement la condition d'existence :

- 1) $\log(x+1) - \log 3 = \log(2x-3) + \log 7$
- 2) $\log(2x-5) + \log(3x+7) = 4 \log 2$
- 3) $\log(x^2 - 4) = 2 \log(x+3)$
- 4) $\log(20) + \log(x^2 - 4) - \log(x-2) = 1 + \log(2x+4)$

Rép. 1) CE: $x > \frac{3}{2}$; $S: x = \frac{64}{41}$ 2) CE: $x > \frac{5}{2}$; $S: x = 3$
3) CE: $x \in]-3; -2[\cup]2; +\infty[$; $S: x = -\frac{13}{6}$ 4) CE: $x > 2$; $S =]2; +\infty[$

23. Combien de temps faut-il pour qu'un capital de 20'000 fr placé à intérêts composés au taux de 6% devienne 37'966 fr ?

Rép. 11 ans

24. Un capital de 5000 fr. placé à intérêts composés se monte à 9676,40 fr. 15 ans plus tard. Trouver le taux.

Rép. 4,5%

25. Déterminer l'ensemble de définition de f :

- a) $f(x) = \log(x)$
- b) $f(x) = \log(x+5)$
- c) $f(x) = \log\left(\frac{x+3}{x-4}\right)$
- d) $f(x) = \log\left(\frac{x-5}{x(x+3)}\right)$

Rép. a) $\mathbb{R}_+^*$ b) $] -5; +\infty[$
c) $] -\infty; -3[\cup] 4; +\infty[$ d) $] -3; 0[\cup] 5; +\infty[$

LG

31. Posons, pour tout entier positif n , $s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

a) Calculer $s_3 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$, $s_4 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$, s_5 et s_6 .

b) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$?

Rép. a) $2, \bar{6}$; $2,708\bar{3}$; $2,71\bar{6}$; $2,7180\bar{5}$ b) $e \equiv 2,718281828$

32. Dériver :

- | | | |
|--------------------|--------------------------------|----------------------|
| 1) $e^x + x^5$ | 2) $3e^x - \frac{x^3}{5} + 2x$ | 3) xe^x |
| 4) $\frac{e^x}{x}$ | 5) $x^3e^x + 1954$ | 6) $\frac{x-1}{e^x}$ |

Rép. 1) $e^x + 5x^4$ 2) $3e^x - \frac{3}{5}x^2 + 2$ 3) $e^x(1+x)$ 4) $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$
 5) $x^2e^x(3+x)$ 6) $\frac{2-x}{e^x}$

33. Dériver :

- | | | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------|------------------------|
| a) e^{2x} | b) $e^{(x^3)}$ | c) x^2e^x | d) $\frac{1}{e^x - 1}$ |
| e) $e^x \sin x$ | f) $(2x^2 - 3)e^{3x}$ | g) $\sqrt{e^x}$ | h) $e^{-1/x}$ |

Rép. a) $2e^{2x}$ b) $3x^2e^{(x^3)}$ c) $x(x+2)e^x$ d) $\frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$ e) $e^x(\sin x + \cos x)$
 f) $(6x^2 + 4x - 9)e^{3x}$ g) $\frac{1}{2}\sqrt{e^x}$ h) $\frac{1}{x^2} \cdot e^{-1/x}$

34. Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $e^x = 5$ | b) $e^x = 1$ |
| c) $e^x = 0$ | d) $e^{2x+1} = 2$ |
| e) $\frac{1}{e^x - 3} = 2$ | f) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ |

Rép. a) $\ln 5$ b) 0 c) $\emptyset$ d) $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$ e) $\ln 7 - \ln 2$ f) $\ln 2, \ln 3$

LG**35. Dériver :**

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------|
| 1) $\ln(x-2)$ | 2) $\ln(\sqrt[3]{x})$ |
| 3) $\ln(\cos x)$ | 4) $\ln(\ln x)$ |
| 5) $x \ln x$ | 6) $\ln(-3x)$ |
| 7) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ | 8) $\ln x $ |

Rép. 1) $\frac{1}{x-2}$ 2) $\frac{1}{3x}$ 3) $-\tan x$ 4) $\frac{1}{x \ln x}$ 5) $\ln x + 1$ 6) $\frac{1}{x}$ 7) $\frac{-2}{x^2-1}$ 8) $\frac{1}{x}$

36. Mettre sous la forme " $\alpha \ln a + \beta \ln b + \gamma \ln c$ " :

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1) $\ln\left(\frac{a^2 b}{c}\right)$ | 2) $\ln\left(\frac{a \sqrt{b}}{c^3}\right)$ |
|--------------------------------------|---|

Rép. 1) $2 \ln a + \ln b - \ln c$ 2) $\ln a + \frac{1}{2} \ln b - 3 \ln c$

37. Mettre sous la forme " $\ln(\dots)$ " :

- | | |
|--|--|
| 1) $3 \ln a - 2 \ln b$ | 2) $\frac{1}{2} \ln a + 5 \ln b$ |
| 3) $\frac{1}{3} \ln a - \frac{3}{2} \ln b$ | 4) $3 \ln a + \frac{1}{5} \ln b - \frac{7}{3} \ln c$ |

Rép. 1) $\ln\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$ 2) $\ln(\sqrt{a} b^5)$ 3) $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3}}\right)$ 4) $\ln\left(\frac{a^3 \sqrt[5]{b}}{\sqrt[3]{c^7}}\right)$

38. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- | | | | |
|---------------|----------------------|---|--------------------------------------|
| 1) $\ln(x+3)$ | 2) $\ln(x^2-4)$ | 3) $\ln(\ln x)$ | 4) $\ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$ |
| 5) e^{x+2} | 6) $\frac{1}{\ln x}$ | 7) $\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ | 8) $\ln x $ |

Rép. 1) $] -3 ; +\infty [$ 2) $] -\infty ; -2 [\cup] 2 ; +\infty [$
 3) $] 1 ; +\infty [$ 4) $] -\infty ; 1 [- \{0\}$
 5) $\mathbb{R}$ 6) $] 0 ; +\infty [- \{1\}$
 7) $] -\infty ; -1 [\cup] 1 ; +\infty [$ 8) $\mathbb{R}^*$

39. Dans un même repère Oxy , dessiner les graphes de $\exp : x \mapsto e^x$ et $\ln : x \mapsto \ln(x)$. [Unité sur les deux axes : 2 carrés ; x et y compris entre -6 et 6 .]

LG

40. Résoudre les équations :

1) $e^{2x} - 3e^x = 10$

2) $e^{-x} = 3e^{2x}$

3) $e^x - e^{x/2} = 6$

4) $e^{3x} - e^{2x} - 2e^x = 0$

Rép. 1) $\ln 5$ 2) $-\frac{1}{3}\ln 3$ 3) $2\ln 3$ 4) $\ln 2$

41. Mettre sous la forme " $\alpha \ln a + \beta \ln b + \gamma \ln c$ " :

1) $\ln(a^2 bc)$ 2) $\ln\left(\frac{ab}{c}\right)$ 3) $\ln\left(\frac{a^3}{\sqrt{b}c}\right)$ 4) $\ln\left(\frac{a^2 \sqrt[5]{b}}{\sqrt{c^3}}\right)$

Rép. 1) $2\ln a + \ln b + \ln c$ 2) $\ln a + \ln b - \ln c$
3) $3\ln a - \frac{1}{2}\ln b - \ln c$ 4) $2\ln a + \frac{1}{5}\ln b - \frac{3}{2}\ln c$

42. Résoudre les équations suivantes : (chercher d'abord la condition d'existence)

a) $\ln x = 7$

b) $\ln x - 5 = 0$

c) $\ln(x+3) = 5$

d) $\ln(x-2) = 8$

e) $\ln x - \ln 2 = 3$

f) $\ln x + \ln(3x) = -1$

Rép. a) e^7 b) e^5 c) $e^5 - 3$ d) $e^8 + 2$ e) $2e^3$ f) $\frac{1}{\sqrt{3}e}$

43. Résoudre : (chercher d'abord la condition d'existence)

a) $\ln x = 3$

b) $\ln(x+1) = 7$

c) $\ln x = 2$

d) $\ln(x-1) = 5$

e) $1 + \ln x = 3 + \ln 2$

f) $\ln(x+1) = 1$

g) $\ln x + \ln(2x) = 3$

h) $1 - \ln x = \ln 5$

Rép. a) e^3 b) $e^7 - 1$ c) e^2 d) $e^5 + 1$
e) $2e^2$ f) $e - 1$ g) $\sqrt{\frac{e^3}{2}}$ h) $\frac{1}{5}e$

44. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = e^x$, à l'abscisse 0 ; à l'abscisse 1.

Rép. $y = x + 1$; $y = ex$

LG

45. Dériver :

- | | | | |
|------------------------------------|-------------------|----------------|--------------------------------------|
| 1) $\ln(7x)$ | 2) $\ln(-x)$ | 3) $\ln(2x+3)$ | 4) $\ln\left(\frac{x-1}{x+4}\right)$ |
| 5) $\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)$ | 6) $\sqrt{\ln x}$ | 7) $\ln(e^x)$ | 8) $e^{\ln x}$ |

- Rép. 1) $\frac{1}{x}$ 2) $\frac{1}{x}$ 3) $\frac{2}{2x+3}$ 4) $\frac{5}{(x-1)(x+4)}$ 5) $\frac{-1}{x+1}$
- 6) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ 7) 1 8) 1

46. Dériver :

- | | |
|----------------------------------|--------------------|
| a) $e^{(x^2)}$ | b) $(e^x)^2$ |
| c) $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ | d) $\ln(2x^2 - x)$ |
| e) $x \ln x - x$ | f) e^{ax+b} |
| g) $e^x \ln x$ | h) $e^{x \ln 2}$ |

- Rép. a) $2xe^{(x^2)}$ b) $2e^{2x}$ c) $-1/x$ d) $\frac{4x-1}{x(2x-1)}$ e) $\ln x$
- f) ae^{ax+b} g) $\frac{e^x(x \ln x + 1)}{x}$ h) $2^x \ln 2$

47. Etudier le signe de la fonction f :

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| 1) $f(x) = 3 \ln x - 1$ | 2) $f(x) = (\ln(3x) - 5)(x+3)$ |
| 3) $f(x) = 2x - x \ln x$ | 4) $f(x) = e^x - 1$ |
| 5) $f(x) = (x+1)(e^{x-2} - 5)$ | 6) $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^3}$ |

Rép.

1.
$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \sqrt[3]{e} & \\ \hline f(x) & - & 0 & + \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \frac{1}{3}e^5 & \\ \hline f(x) & - & 0 & + \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & e^2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & \\ \hline f(x) & - & 0 & + \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -1 & 2+\ln 5 & & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -3 & -2 & 0 & & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

48. Dériver :

1) $\frac{e^{3x}}{e^x + 1}$

2) $\frac{e^x - 1}{e^{2x}}$

Rép. 1) $\frac{e^{3x}(2e^x + 3)}{(e^x + 1)^2}$ 2) $\frac{2 - e^x}{e^{2x}}$

49. Etudier la croissance des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x \ln x$

b) $f(x) = 1 - e^x$

c) $f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$

d) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

Rép.

a) $f'(x) = \ln x + 1$

x	0	$1/e$
$f'(x)$	///	
$f(x)$	-	0
		+

↘ m ↗

b) $f'(x) = -e^x$

x	
$f'(x)$	-
$f(x)$	↘

c) $f'(x) = \frac{x^2(3 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$

x	0	1	$\sqrt[3]{e}$
$f'(x)$	///		-
$f(x)$	-	0	+

↘ m ↗

d) $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$

x	1
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗ M ↘

50. Calculer :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^x}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{e^{2x} - 7}$

7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3}{e^{2x} - 7}$

8) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-2}{\ln x}$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + e^x}{2e^x}$

Rép. 1) 0 2) $+\infty$ 3) $+\infty$ 4) $+\infty$ 5) $-\infty$
 6) 0 7) $-\frac{3}{7}$ 8) 0 9) $-\infty$ 10) $+\infty$

LG

51. Un corps radioactif de masse initiale m_0 se désintègre. Sa masse après le temps t est donnée par :

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t} \quad (\alpha = \text{constante} > 0)$$

- Calculer la période T de ce corps, c'est-à-dire le temps au bout duquel la masse est réduite à la moitié de sa valeur initiale.
- Montrer que, pour tout t , $m(t+T) = \frac{1}{2} m(t)$.
- Etudier la fonction $m(t)$.

Rép. a) $T = \frac{1}{\alpha} \ln 2$

52. Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 e^x$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^5 \ln(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)}$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\ln(x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} x^5 e^x$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{17} + x^2 - 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{20} e^{-x}$

Rép. a) 0 b) 0 c) 0 d) $+\infty$
 e) 0 f) 0 g) $+\infty$ h) 0

53. Calculer :

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1}$

5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x \ln x}{x - 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(1/x)}}{(1/x) \ln x}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{17} + 3x^2 + 2}{(0,0001) e^x}$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} - 1 \right)$

Rép. 1) 0 2) -1 3) 0 4) 0 5) 0 6) $+\infty$ 7) 0 8) -1

LG

54. Trouver les asymptotes horizontales des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{e^x}$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 2}{2x^2 + 1}\right)$

c) $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 5}$

d) $f(x) = \frac{1}{\ln(1/x)}$

Rép. a) $y = 0$ (à droite)

b) $y = -\ln 2$ (à gauche et à droite)

c) $y = 2$ (à droite), $y = -\frac{3}{5}$ (à gauche)

d) $y = 0$ (à droite)

55. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f , puis chercher les asymptotes verticales (elles ne peuvent se trouver qu'au "bord" de l'ensemble de définition) :

a) $f(x) = \ln(x-1)$

b) $f(x) = \frac{e^x}{|e^x - 1|}$

c) $f(x) = \ln(9 - x^2)$

d) $f(x) = \frac{1}{x e^{|1/x|}}$

Rép. a) $]1; +\infty[$; $x = 1$

b) $\mathbb{R}^*$; $x = 0$

c) $] -3; 3[$; $x = -3$; $x = 3$

d) $\mathbb{R}^*$; pas d'asymptote verticale

56. Déterminer les asymptotes de la fonction $f(x) = \frac{\ln|x|}{e^x - 1}$.

Rép. $x = 0$; $y = 0$ (à droite)

57. Déterminer les asymptotes horizontales et verticales de la fonction f :

a) $f(x) = \frac{2}{\ln x}$

b) $f(x) = \frac{e^x - 5}{e^{2x} - 5}$

Rép. a) $x = 1$; $y = 0$ (à droite)

b) $x = \frac{1}{2} \ln 5$; $y = 0$ (à droite) ; $y = 1$ (à gauche)

58. Dériver :

1) 2^x

2) 2^{7x+3}

3) 5^{ax^2+b}

4) $3^{\ln x}$

Rép. 1) $2^x \ln 2$

2) $(7 \ln 2) 2^{7x+3}$

3) $(2ax \ln 5) 5^{ax^2+b}$

4) $\frac{\ln 3}{x} 3^{\ln x}$

65. Etudier la fonction f : (cf. plan d'étude § 90 C)

- 1) $f(x) = x^2 e^x$
- 2) $\frac{1}{e^x - 1}$
- 3) $f(x) = x \ln x$
- 4) $f(x) = \ln(x^2 + x)$
- 5) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$
- 6) $f(x) = x - \ln x$

Rép.

1) $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline + & 0 + \end{array} ; f'(x) = x e^x (2+x) ; \frac{x}{f'(x)} \begin{array}{c|c} -2 & 0 \\ \hline + & 0 - 0 + \end{array}$
 $\max: (-2; 4e^{-2}) ; \min: (0; 0)$
 $AH: y = 0 \text{ (a.g.)}$

2) $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline - & || + \end{array} ; f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} ; \frac{x}{f'(x)} \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline - & || - \end{array}$
 $AV: x = 0 ; AH: y = -1 \text{ (a.g.)} ; y = 0 \text{ (a.d.)}$

3) $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline // & - 0 + \end{array} ; f'(x) = \ln x + 1$
 $\frac{x}{f'(x)} \begin{array}{c|c} 0 & e^{-1} \\ \hline // & - 0 + \end{array} ; \min: (e^{-1}; -e^{-1})$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$

4) $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|c} -1,618 & -1 & 0 & 0,618 \\ \hline + & 0 & - & // & - & 0 & + \end{array}$
 $f'(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} ; AV: x = -1 ; x = 0$
 $\frac{x}{f'(x)} \begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline - & // & + \end{array}$

5) $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|c} -1,618 & 0 & 0,618 & 1 \\ \hline + & 0 & - & // & - & 0 & + & // & // & // \end{array} ; f'(x) = \frac{2-x}{x(1-x)}$
 $\frac{x}{f'(x)} \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline - & // & + & // & // & // \end{array} ; AV: x = 0 ; x = 1$

6) $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline // & + \end{array} ; f'(x) = \frac{x-1}{x} ; AV: x = 0$
 $\frac{x}{f'(x)} \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline // & - 0 + \end{array} ; \min: (1; 1)$

66. Etudier la fonction $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$.

Rép. $f'(x) = \frac{2 - e^x}{e^{2x}}$ / max : $(\ln 2 ; \frac{1}{4})$ / asymptote horizontale à droite : $y = 0$

67. Etudier la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Montrer en particulier que son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy .

Rép. $f(x) > 0$ / $f'(x) = -x e^{-\frac{1}{2}x^2}$ / max : $(0 ; 1)$ / AH : $y = 0$ (à droite et à gauche)

69. Etudier la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 12x + 36)$.

Montrer de plus que le graphe est symétrique par rapport à la verticale d'équation $x = 6$.

Rép. $D = \mathbb{R} - \{6\}$ / zéros de f : 5 ; 7 / asymptotes : $x = 6$ / $f'(x) = \frac{2}{x-6}$

70. On considère la fonction f donnée par $f(x) = e^{-x}$.

- Dessiner le graphe de cette fonction.
- Entre le graphe de f et les axes Ox et Oy , on inscrit un rectangle $OABC$ de manière que A soit sur l'axe Ox positif, B sur le graphe de f et C sur l'axe Oy positif. Déterminer l'abscisse x de A afin que l'aire du rectangle $OABC$ soit maximale.

71. Un parachutiste tombe en chute libre à une vitesse de 55 mètres par seconde. Dès l'ouverture de son parachute, sa vitesse diminue brusquement, et peut se calculer approximativement par la formule suivante :

$$v(t) = 5 \cdot \frac{6 + 5 \cdot e^{-4t}}{6 - 5 \cdot e^{-4t}}$$

où t désigne le temps écoulé, en secondes, depuis l'ouverture du parachute.

- Quelle est la vitesse de chute 0,15 seconde après l'ouverture du parachute ?
Et 2 secondes après l'ouverture ?
- Déterminer à quel instant t la vitesse est de 8 m/s.
- Que vaut $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$?

Rép. a) 13,43 m/s ; 5,003 m/s b) 0,32 s c) 5 m/s = 18 km/h

72. Une substance solide de 30 grammes se dissout progressivement dans 100 grammes d'eau. On ne le sait pas — c'est pourtant simple —, la vitesse de dissolution est proportionnelle d'une part à la masse de la substance non encore dissoute, et d'autre part à la différence entre la concentration d'une solution saturée et celle de la concentration actuelle de la substance...

Einstein en déduirait presque immédiatement qu'alors, pour une substance dont la concentration de saturation est évaluée à 50%, on a :

$$\log_{10}(m) - \log_{10}(m + 20) = At + B ,$$

étant bien entendu que :

- t désigne le temps écoulé (en heures) depuis le début de la dissolution;
 - m est la masse (en grammes) de la substance non encore dissoute au temps t ;
 - A et B sont des constantes relatives à la substance considérées.
- a) En supposant qu'Einstein a raison, déterminer les nombres A et B sachant que $m = 30$ quand $t = 0$ et que $m = 20$ quand $t = 2$.
- b) Si $t = 5$, $A = -0,04$ et $B = -0,2$, que vaut m ?

Rép. a) $A = -0,0396$; $B = -0,222$ b) $m = 13,23$

73.—

- a) Etudier la fonction $f(x) = \frac{(1 + \ln x)^2}{x}$. (Signe, asymptotes, croissance, extremums, graphe.)
- b) Déterminer les équations des tangentes au graphe de f qui passent par l'origine.
- c) Déterminer le réel $a > 0$ tel que $\int_{1/e}^a f(x) dx = \frac{8}{3}$.

Rép. b) $y = x$, $y = 0$ c) $a = e$

LG

80. Calculer l'aire sous e^x entre $-\infty$ et 0. [*Rép.* 1]

81. Primitiver :

- | | | | |
|-----------------------------|--|---------------------------|---------------------------|
| a) $\frac{1}{x}$ | b) $\frac{2}{2x+3}$ | c) $\frac{1}{2x-5}$ | d) $\frac{x-1}{x^2-2x+4}$ |
| e) $\frac{(x+1)^2}{x}$ | f) $\frac{3x}{x^2+1}$ | g) $\frac{2x-1}{x^2-x-2}$ | h) $\frac{x}{x^2-4}$ |
| i) $\frac{-\sin x}{\cos x}$ | j) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ | | |

Rép. a) $\ln|x|$ b) $\ln|2x+3|$ c) $\frac{1}{2}\ln|2x-5|$ d) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4|$
 e) $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x|$ f) $\frac{3}{2}\ln(x^2+1)$ g) $\ln|x^2-x-2|$
 h) $\frac{1}{2}\ln|x^2-4|$ i) $\ln|\cos x|$ j) $-\ln|\sin x + \cos x|$

82. Primitiver :

- | | | |
|--------------------|----------------------|-----------------------|
| 1) e^{2x} | 2) $2xe^{(x^2)}$ | 3) $x + e^{x+1}$ |
| 4) $x^2 e^{(x^3)}$ | 5) $(e^x + 1)^3 e^x$ | 6) $\frac{1}{e^{7x}}$ |

Rép. 1) $\frac{1}{2}e^{2x}$ 2) $e^{(x^2)}$ 3) $\frac{1}{2}x^2 + e^{x+1}$ 4) $\frac{1}{3}e^{(x^3)}$ 5) $\frac{1}{4}(e^x + 1)^4$ 6) $-\frac{1}{7}e^{-7x}$

LG

83. Trouver une primitive de la fraction rationnelle donnée.

Indication : au moyen d'une division euclidienne, mettre la fraction $f(x)$ sous la forme $Q + \frac{R}{D}$.

$$1) \quad f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 1}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x - 1}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 2}{x^2 + x}$$

Rép. 1) $x^2 + x - 2 \ln|x + 1|$

2) $\frac{1}{3}x^3 + \ln|x - 1|$

3) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x^2 + 1|$

4) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 \ln|x^2 + x|$

84. Primitiver :

$$1) \quad f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 1}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{-4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{4x^2 - 4x + 1}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2x + 1}{x^2 + x}$$

Rép. 1) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \ln(2x^2 + 1)$

2) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x - 1}$

3) $-\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{2}{2x - 1}$

4) $\frac{1}{3}x^3 + \ln|x^2 + x|$

85. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_2^7 \frac{1}{x} dx$

b) $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^3 - 7} dx$

c) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$

d) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx$

e) $\int_0^2 x e^{(x^2)} dx$

f) $\int_0^2 \frac{6x^2 - 4x + 2}{3x + 4} dx$

Rép. a) $\ln 7 - \ln 2$

b) $\frac{4}{3} \ln 20$

c) $\ln 2$

d) $\ln 2$

e) $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$

f) $6 \ln 10 - 6 \ln 4 - 4$

86.—

a) Montrer que la courbe $f : y = e^x$ et la droite $g : y = (e - 1)x + 1$ se coupent aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

b) Déterminer l'aire de la région bornée délimitée par f et g .

Rép. $\frac{1}{2}(3 - e) \cong 0,141$

LG

87. Trouver une primitive de f :

1) $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$

2) $f(x) = \sin^2 x \cos x$

3) $f(x) = \frac{\ln^4 x}{x}$

4) $f(x) = \cos^2 x \sin x$

5) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

6) $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$

7) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

8) $f(x) = \frac{(a \ln x + b)^n}{x} \quad [a \neq 0]$

Rép. 1) $\frac{1}{4} \ln^4 x$

2) $\frac{1}{3} \sin^3 x$

3) $\frac{1}{5} \ln^5 x$

4) $-\frac{1}{3} \cos^3 x$

5) $\frac{1}{2} \ln^2 x$

6) $\frac{-1}{\ln x}$

7) $\ln(|\ln x|)$

8) $\frac{1}{a(n+1)} (a \ln x + b)^{n+1}$

90.—

- a) Pour x compris entre 0 et 1, tracer dans un même repère les graphes des fonctions $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = x + 1$.
- b) Le graphe de f partage le domaine compris entre les graphes de g et de h en deux parties. Calculer les aires de celles-ci. [Rép. 0,057 et 0,109]

91. Dans les premières semaines qui suivent sa naissance, le poids d'un bébé obéit approximativement à la loi

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = k \quad (k = \text{constante})$$

où $p(t)$ désigne le poids (en kg) t jours après la naissance.

- a) En primitivant les deux membres de l'équation ci-dessus, montrer que

$$p(t) = a e^{kt} \quad (a = \text{constante})$$

- b) Un bébé qui pesait 4 kg à sa naissance pèse 4,4 kg deux semaines plus tard. Quel était son poids 5 jours après la naissance ?

Rép. b) 4,1385 kg (soyons précis !)

92. Déterminer $a > 0$ de sorte que : $\int_0^a \frac{2}{x+3} dx = 6$. Rép. $a = 3(e^3 - 1)$

93. Primitiver la fonction $f(x) = \frac{\cos x \sin x}{(\cos x)^2 + 1}$.

LH

10. Calculer les limites suivantes au moyen de la règle de L'Hospital :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x + \cos x - 1}{3x + \sin(2x)}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^7 - 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cot^2(x)}$

Rép. 1) 5 2) $\frac{2}{5}$ 3) 0 4) 3 5) $\frac{5}{7}$ 6) $\frac{1}{2}$

11. Calculer les limites suivantes au moyen de la règle de L'Hospital :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{x^3 - 3x + 2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - \sin(bx)}{\sin(ax) + \sin(bx)} \quad (a \neq -b)$

Rép. 1) 4 2) 1 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{2}{\pi}$ 5) $\frac{a-b}{a+b}$

12. Calculer les limites suivantes au moyen de la règle de L'Hospital :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{a}{x}\right)}{\tan\left(\frac{a+b}{x}\right)}$

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2(2x)}$

4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

5) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^2 + x}$

7) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

Rép. 1) $\frac{a}{a+b}$ 2) $+\infty$ 3) $\frac{1}{8}$ 4) $\cos a$ 5) 0 6) 1 7) $\frac{1}{2}$ 8) 1