

3MS

ANALYSE



THÉORIE

2015

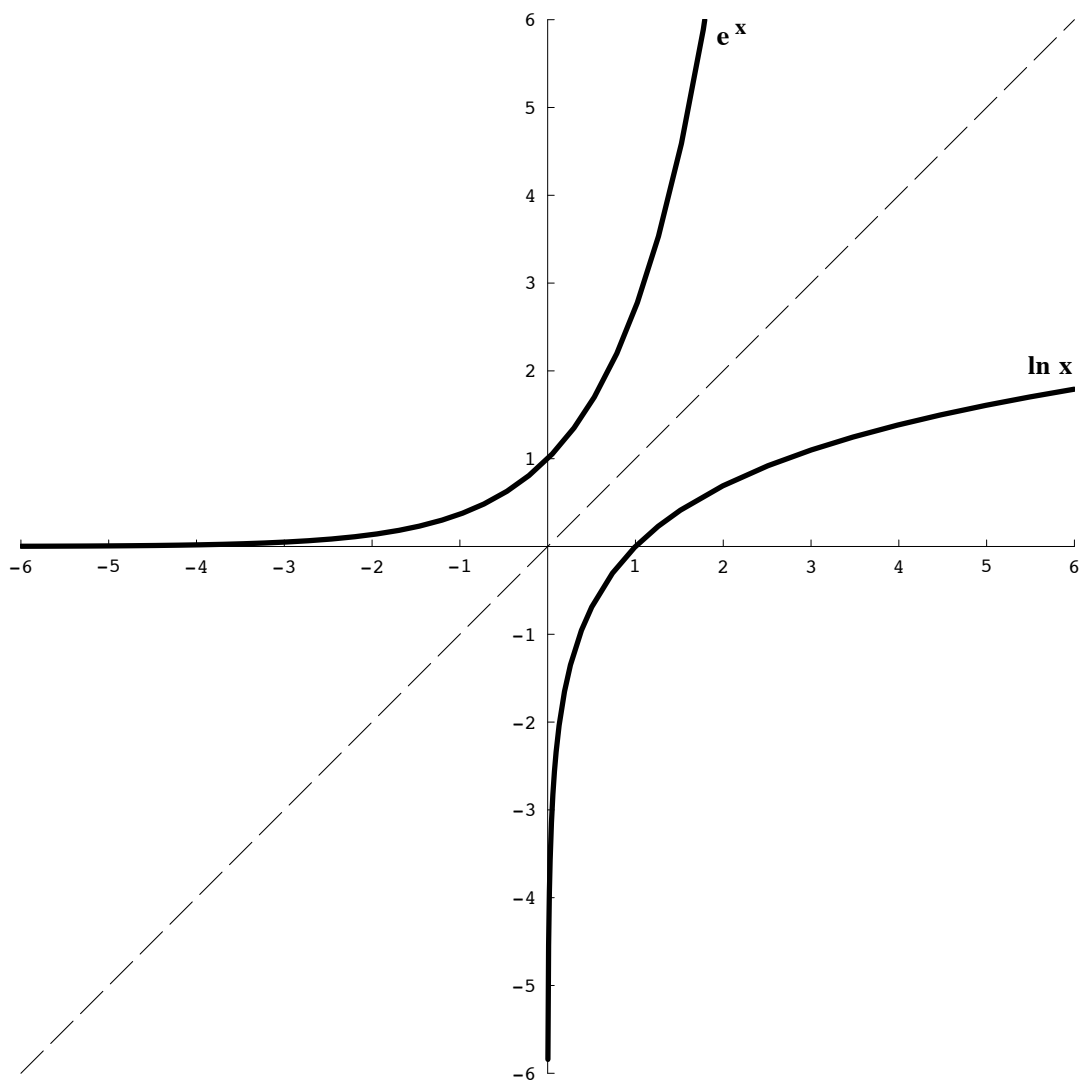


TABLE DES MATIÈRES

Rappels sur les dérivées.....	10
Vitesse	11
Asymptotes verticales et horizontales	20
Position du graphe relativement à l'asymptote horizontale	21
$N/D = Q + R/D$	22
Asymptotes obliques	23
Position du graphe relativement à l'asymptote oblique	24
Critère du degré	25
Parité d'une fonction	30
Périodicité.....	31
Primitives.....	40
Primitive de $g^n \cdot g'$	41
Primitive d'une fonction composée.....	42
Résumé sur les primitives.....	43
Le signe de sommation Σ	44
Intégrale d'une fonction	45
Théorème fondamental du calcul intégral	46
Quelques propriétés des intégrales	47
Régions bornées	48
Aire d'une région située entre deux courbes	49
Volume d'un solide	50
Logarithme – Définition	60
Calcul d'un logarithme à la machine	61
Réciprocité de $\exp_a(x)$ et $\log_a(x)$	62
Logarithme d'un produit	63
Intérêts composés	64
Fonction exponentielle de base e	70
Dérivée de la fonction e^x	71
Logarithme naturel	72
Réciprocité de $\exp$ et $\ln$	73
Graphe des fonctions $\exp$ et $\ln$	74
Dérivée de la fonction $\ln$	75
Primitive de $1/x$	76
Limite de $(1/x) \ln x$ en $+\infty$	77
Croissances comparées de e^x , x^n et $\ln x$	78
Théorèmes de Rolle et de Cauchy	80
Règle de L'Hospital	81
Plans d'étude de fonctions	90

§ 10. RAPPELS SUR LES DÉRIVÉES

Définition

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \text{pente du graphe de } f \text{ à l'abscisse } a$$

La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est la *dérivée* de f

Autres notations pour $f'(x)$: y' ; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d}{dx} f(x)$

Dérivée de quelques fonctions

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)^*$
c (constante)	0	$\sin x$	$\cos x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$
x^n ($n \in \mathbb{R}$)	$n x^{n-1}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		

* $\sin x$ désigne ici le sinus d'un angle de x *radians*. Idem pour les autres fonctions trigonométriques.

Règles de dérivation

$(f + g)' = f' + g'$	$(fg)' = f'g + fg'$	$(g^n)' = n g^{n-1} \cdot g'$
$(cf)' = c(f')$ [$c = \text{constante}$]	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

§ 11. VITESSE

Soit $A(t)$ une grandeur variant avec le temps t .

Le quotient $\frac{A(t+h)-A(t)}{h}$ mesure la *vitesse moyenne* du "changement" A entre les temps t et $t+h$. La *vitesse (instantanée)* de ce changement au temps t sera donc égale à

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h)-A(t)}{h}$$

c'est-à-dire à la dérivée de A en t , pour autant que la limite existe. D'où :

$$A'(t) = \textbf{Vitesse} \text{ du changement } A \text{ au temps } t$$

L'accélération du changement A est la vitesse du changement A' . Ainsi :

$$A''(t) = \textbf{Accélération} \text{ du changement } A \text{ au temps } t$$

(A'' désigne la dérivée de A')

Petite remarque

La vitesse est donc une « incarnation » physique de la notion de dérivée. On connaît déjà l'incarnation géométrique, comme pente locale du graphe...

§ 20. ASYMPTOTES VERTICALES ET HORIZONTALES

1. Introduction

Soit par exemple $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$.

Cette fonction n'est pas définie en $x = 4$. Que se passe-t-il au voisinage de $x = 4$?

Pour répondre à cette question, calculons les limites de $f(x)$ quand x approche 4 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{x+3}{x-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{x+3}{x-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

Graphiquement, cela signifie que lorsque x tend vers 4 par la gauche ($x < 4$), le graphe de f plonge vertigineusement, puisque $f(x)$ tend vers $-\infty$ (cf. figure).

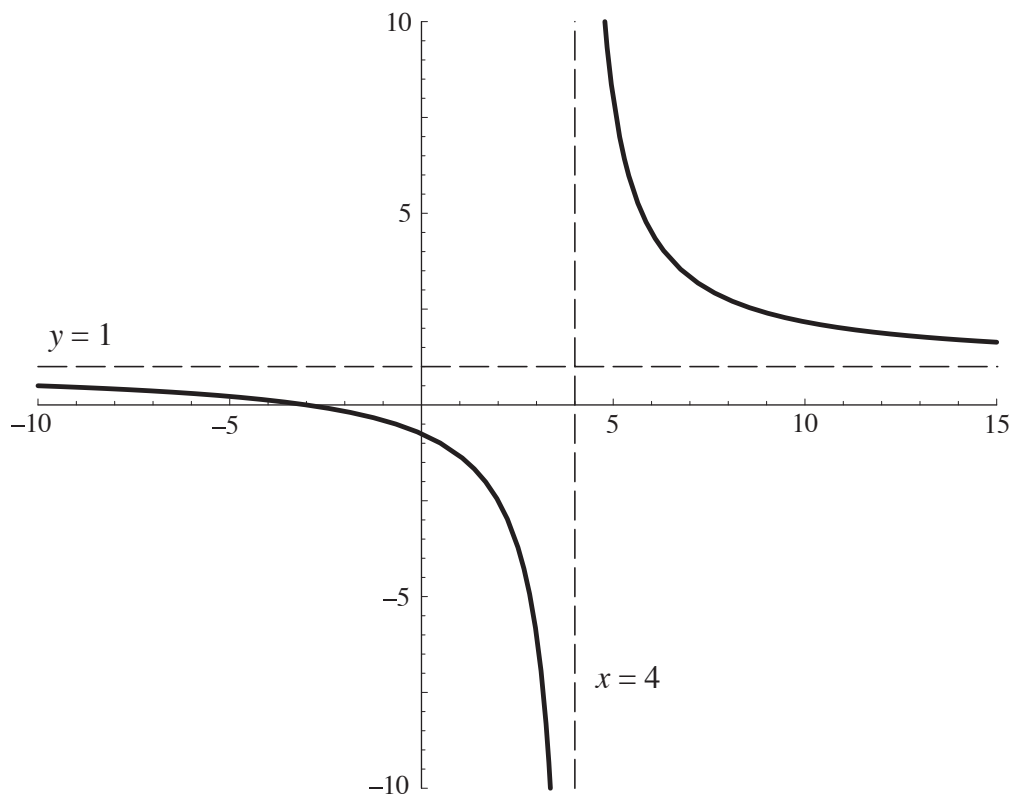
Lorsque x tend vers 4 par la droite ($x > 4$), le graphe de f s'envole infiniment, puisque $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Dans une telle situation, on dit que la droite d'équation $x = 4$ est une *asymptote verticale* de f .

Examinons maintenant le comportement de f quand x tend vers $\pm \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x+3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x} = 1$$

Ainsi, lorsque x devient très grand (en valeur absolue), le graphe de f se confond pratiquement avec la droite horizontale d'équation $y = 1$. On appelle alors cette droite une *asymptote horizontale* de la fonction f .



2. Définition des asymptotes verticales

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction.

La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale de f si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm \infty$$

Si de plus $f(x)$ est une fraction rationnelle $\frac{N(x)}{D(x)}$ **irréductible**, on a le critère suivant :

$$\left(\begin{array}{l} \text{La droite d'équation } x = a \\ \text{est asymptote verticale de } f \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} a \text{ est un zéro du} \\ \text{dénominateur } D(x) \end{array} \right)$$

Exemple

Les asymptotes verticales de $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$ sont les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

3. Définition des asymptotes horizontales

Soit $h \in \mathbb{R}$ et f une fonction.

La droite d'équation $y = h$ est asymptote horizontale à droite de f si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = h$$

De même à gauche ($x \rightarrow -\infty$).

Exemple

$f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$. D'où : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale de f (à droite et à gauche).

§ 21. POSITION DU GRAPHE RELATIVEMENT À L'ASYMPTOTE HORIZONTALE

Soit f une fonction admettant la droite d'équation $y = h$ comme asymptote horizontale.

Définissons la fonction δ ("delta") par :

$$\delta(x) = f(x) - h$$

$\delta(x)$ mesure la *différence d'altitude* entre le graphe de f et son asymptote horizontale.

Si $\delta(x) > 0$, le graphe est **au-dessus** de l'asymptote à l'abscisse x

Si $\delta(x) = 0$, le graphe et l'asymptote ont un **point commun** à l'abscisse x

Si $\delta(x) < 0$, le graphe est **au-dessous** de l'asymptote à l'abscisse x

Le signe de δ va nous permettre d'esquisser rapidement le graphe de f , au moyen d'un hachurage préalable des régions du plan qui, vu le signe de δ , ne peuvent abriter des points du graphe de f .

Exemple

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-5}.$$

Asymptote verticale : $x = 5$.

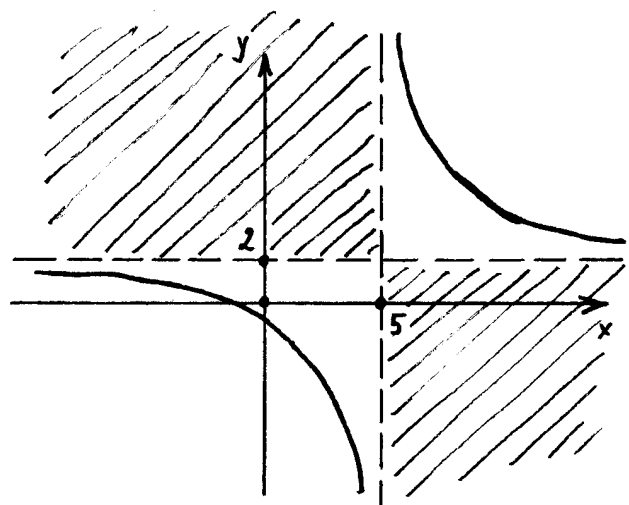
Asymptote horizontale : $y = 2$.

$$\delta(x) = \frac{2x+3}{x-5} - 2 = \dots = \frac{13}{x-5}.$$

Signe de δ :

x	5
$\delta(x)$	- +

On en conclut que le graphe de f doit se situer hors de la région hachurée ci-contre ; on peut ainsi tracer un graphe plausible.



§22. $N/D = Q + R/D$

Soit $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes, avec $D \neq 0$. La division euclidienne de N par D nous donne deux autres polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$N = DQ + R \quad \text{et} \quad \text{degré}(R) < \text{degré}(D)$$

En divisant la relation $N = DQ + R$ par D on arrive à :

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

Toute fraction rationnelle (N/D) peut donc s'exprimer comme somme d'un polynôme (Q) et d'une fraction rationnelle (R/D) dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.

Exemple

Considérons $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 12x + 4}{x^2 - 3x + 1}$.

La division du numérateur $2x^3 - x^2 - 12x + 4$ par le dénominateur $x^2 - 3x + 1$ fournit le quotient $Q(x) = 2x + 5$ et le reste $R(x) = x - 1$. Ainsi :

$$f(x) = (2x + 5) + \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 1}$$

Remarque

On observe que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{R(x)}{D(x)} = 0$, puisque le degré de R est inférieur à celui de D . La fraction

$\frac{N}{D}$ se comporte donc comme le quotient Q lorsque x tend vers $\pm\infty$.

§ 23. ASYMPTOTES OBLIQUES

Définition

La droite d'équation $y = mx + h$ ($m \neq 0$) est asymptote oblique à droite d'une fonction f si

$$f(x) = (mx + h) + \delta(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0$$

De même à gauche ($x \rightarrow -\infty$).

Dans un tel cas, $\delta(x)$ est pratiquement nul quand x est "proche" de $+\infty$ (resp. $-\infty$), et l'on a

$$f(x) \cong mx + h$$

La courbe représentative de f s'approche donc de la droite $y = mx + h$ sur le côté droit du graphique (resp. sur le côté gauche).

Exemple

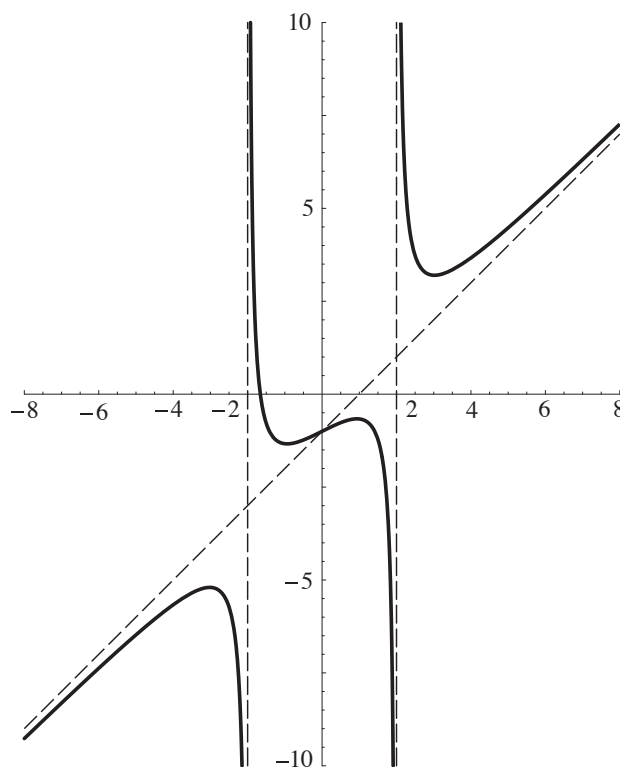
Soit $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$.

Au moyen d'une division euclidienne, on obtient :

$$f(x) = (x - 1) + \frac{2x}{x^2 - 4}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 4} = 0$, la droite

$y = x - 1$ est asymptote oblique de f (à droite et à gauche).



§ 24. POSITION DU GRAPHE RELATIVEMENT À L'ASYMPTOTE OBLIQUE

Soit f une fonction admettant la droite $y = mx + h$ comme asymptote.
Définissons la fonction δ ("delta") par :

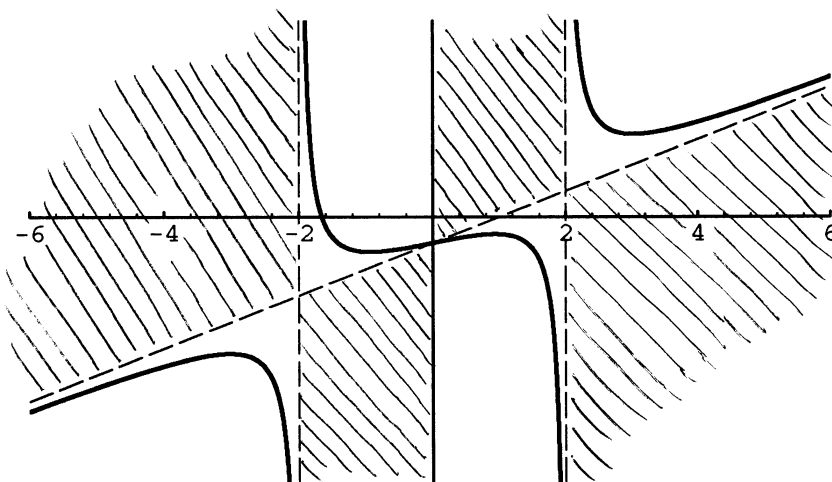
$$\delta(x) = f(x) - (mx + h)$$

Cette fonction mesure la *différence d'altitude* entre le graphe de f et son asymptote.

Si $\delta(x) > 0$, le graphe est **au-dessus** de l'asymptote à l'abscisse x

Si $\delta(x) = 0$, le graphe et l'asymptote ont un **point commun** à l'abscisse x

Si $\delta(x) < 0$, le graphe est **au-dessous** de l'asymptote à l'abscisse x



x	-2	0	2
$\delta(x)$	-	+ 0	- +

Cas d'un fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle telle que $d^\circ(N) - d^\circ(D) = 1$.

Par division euclidienne, on trouve $f(x) = (mx + h) + \frac{R(x)}{D(x)}$, et la droite d'équation $y = mx + h$ est asymptote oblique de f . De plus :

$$\delta(x) = \frac{R(x)}{D(x)}$$

La division donne donc la fonction δ en même temps que l'asymptote.

§ 25. CRITÈRE DU DEGRÉ

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle.

- f possède une **asymptote horizontale** si et seulement si

$$d^{\circ}(N) \leq d^{\circ}(D)$$

[$d^{\circ}(P)$ désigne le *degré* du polynôme P .]

- L'asymptote horizontale est confondue avec l'axe Ox si et seulement si

$$d^{\circ}(N) < d^{\circ}(D)$$

- f possède une **asymptote oblique** si et seulement si

$$d^{\circ}(N) - d^{\circ}(D) = 1$$

Exemples

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x + 3}.$

$d^{\circ}(N) = 2, d^{\circ}(D) = 3 ; \Rightarrow d^{\circ}(N) < d^{\circ}(D) ; \Rightarrow$ l'axe Ox est asymptote horizontale de f .

Equation de l'asymptote horizontale : $y = 0$.

2) $f(x) = \frac{4x - 1}{2x + 5}.$

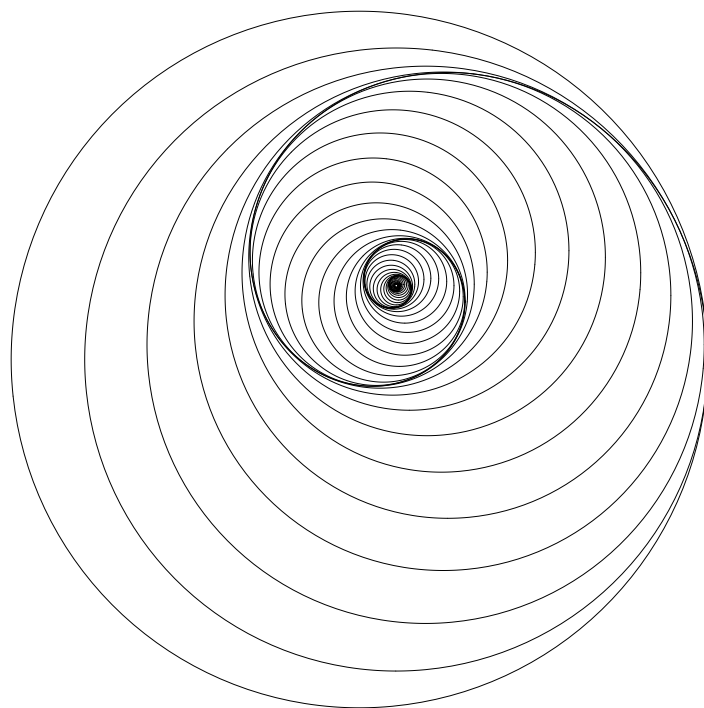
$d^{\circ}(N) = 1, d^{\circ}(D) = 1 ; \Rightarrow d^{\circ}(N) = d^{\circ}(D) ; \Rightarrow f$ possède une asymptote horizontale.

Equation de l'asymptote horizontale : $y = 2$.

3) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 3}.$

$d^{\circ}(N) = 2, d^{\circ}(D) = 1 ; \Rightarrow d^{\circ}(N) - d^{\circ}(D) = 1 ; \Rightarrow f$ possède une asymptote oblique.

Equation de l'asymptote oblique : $y = x + 1$.



Que des cercles...

§ 30. PARITÉ D'UNE FONCTION

Définition

- Une fonction réelle f définie sur D est dite **paire** si son graphe est symétrique relativement à l'axe Oy , autrement dit si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = f(x)$$

- Une fonction réelle f définie sur D est dite **impaire** si son graphe est symétrique relativement à l'origine O , autrement dit si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = -f(x)$$

Exemples

Les fonctions x^2 , $\cos(x)$ et $\sqrt{x^4 - x^2}$ sont paires.

Les fonctions x^3 , $\sin(x)$ et $\frac{x}{x^2 + 4}$ sont impaires.

N.B. Il y a beaucoup de fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires...

§ 31. PÉRIODICITÉ

Définition

Soit f une fonction et D son ensemble de définition. f est dite **périodique** s'il existe $p > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, $x + p \in D$ et

$$f(x + p) = f(x)$$

Le nombre p est, par définition, une **période** de f .

La plus petite période de f — si elle existe — s'appelle **la** période de f .

Exemples

Les fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ et $\cot(x)$ sont périodiques.

La période de $\sin(x)$ et celle de $\cos(x)$ est 2π .

La période de $\tan(x)$ et celle de $\cot(x)$ est π .

Théorèmes

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si p est une période de f , kp en est également une.

Si p est **la** période de f , toute période de f est du type kp , avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Il en résulte que si q est une période de f , alors $p \in \left\{ q ; \frac{1}{2}q ; \frac{1}{3}q ; \frac{1}{4}q ; \dots \right\}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Si p est une période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est une période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.

Si p est **la** période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est **la** période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.

§ 40. PRIMITIVES

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F de I vers $\mathbb{R}$ dont la dérivée est f .

$$F' = f$$

Exemples

- $x+1$ admet la primitive $\frac{1}{2}x^2 + x$, car la dérivée de $\frac{1}{2}x^2 + x$ est $x+1$.
- x^3 admet la primitive $\frac{1}{4}x^4$, car la dérivée de $\frac{1}{4}x^4$ est x^3 .

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{R} - \{1\}$,

$$x^n \text{ admet la primitive } \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

Preuve : $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(x^{n+1})' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = x^n.$

Théorème

Soit $c \in \mathbb{R}$, F une primitive de f , G une primitive de g .

$$cf \text{ admet la primitive } cF$$

$$f+g \text{ admet la primitive } F+G$$

Preuve : $(cF)' = c(F)' = cf$; $(F+G)' = F' + G' = f+g.$

Application

$$2x^2 - 9x + 3 \text{ a pour primitive } 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 9 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 3 \cdot x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x.$$

$$\text{Autre primitive possible : } \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1954.$$

Notation

On écrira $P(f) = F$ pour signifier que F est **une** primitive de f . Par exemple : $P(2x) = x^2$ ou $P(2x) = x^2 + 17$.

Le théorème précédent s'exprime alors ainsi :

$$P(c \cdot f) = c \cdot P(f)$$

$$P(f + g) = P(f) + P(g)$$

(Il y a tout de même abus de langage, puisqu'une fonction admet plusieurs primitives.)

Théorème

1. Soit F une primitive de f , et c une constante. Alors $F + c$ est aussi une primitive de f .
2. Réciproquement, toute primitive de f est de la forme $F + c$, où c désigne une constante.

Preuve

1. $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$; $\Rightarrow F + c$ est une primitive de f .
2. Soit G une primitive de f .

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0 ;$$

$$\Rightarrow G - F \text{ est une constante ;}$$

$$\Rightarrow \text{il existe un réel } c \text{ tel que } G - F = c ;$$

$$\Rightarrow G = F + c .$$

§ 41. PRIMITIVE DE $g^n \cdot g'$

Théorème

Soit g une fonction dérivable et n un réel différent de -1 .

$g^n \cdot g'$ admet la primitive $\frac{1}{n+1} \cdot g^{n+1}$

Preuve

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n+1} \cdot g^{n+1} \right)' &= \frac{1}{n+1} \cdot (g^{n+1})' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot g^n \cdot g' \\ &= g^n \cdot g'. \end{aligned}$$

Exemples

- $\bullet \quad P \left(\underbrace{(x^3+1)}_g \cdot \underbrace{3x^2}_{g'} \right) = \frac{1}{6} (x^3+1)^6$
- $\bullet \quad P \left(\sqrt{x^2+x} \cdot (2x+1) \right) = P \left(\underbrace{(x^2+x)}_g^{1/2} \cdot \underbrace{(2x+1)}_{g'} \right)$
 $= \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (x^2+x)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+x)^3}$
- $\bullet \quad P \left((3x^2+1)^{11} \cdot 2x \right) = P \left(\frac{1}{3} \cdot \underbrace{(3x^2+1)}_g^{11} \cdot \underbrace{6x}_{g'} \right)$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} (3x^2+1)^{12} = \frac{1}{36} (3x^2+1)^{12}$

Corollaire

$(ax+b)^n$ admet la primitive $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} (ax+b)^{n+1}$

§ 42. PRIMITIVE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Théorème

Soit f et g deux fonctions, g étant dérivable, et soit F une primitive de f . Alors :

$$f(g(x)) \cdot g'(x) \text{ admet la primitive } F(g(x))$$

Preuve

$$\begin{array}{c} \text{dérivée intérieure} \\ \downarrow \\ \left(F(g(x)) \right)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \text{dérivation} \qquad \qquad F' = f \\ \text{d'une fonction} \\ \text{composée} \end{array}$$

Applications

$$a) \quad P \left(\underbrace{(x^3+1)^7}_g \cdot \underbrace{3x^2}_{g'} \right) = \frac{1}{8} (x^3+1)^8$$

$$b) \quad P \left(\underbrace{(2x+1)}_{g'} \cdot \cos \left(\underbrace{x^2+x}_g \right) \right) = \sin(x^2+x)$$

$$c) \quad P \left(\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}} \right) = P \left(\underbrace{3x^2}_{g'} \cdot \underbrace{(x^3)^{-\frac{1}{2}}}_g \right) = 2(x^3)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^3}$$

Corollaire

$$f(ax+b) \text{ admet la primitive } \frac{1}{a} F(ax+b)$$

§ 43. RÉSUMÉ SUR LES PRIMITIVES

Définition

On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Les autres primitives de f sur I sont toutes du type $F + c$, où c est une constante quelconque.

Propriétés

$$P(f + g) = P(f) + P(g) \quad P(cf) = c P(f) \quad P\left(f(g(x)) \cdot g'(x)\right) = F(g(x))$$

Primitives de quelques fonctions

Fonction	Primitive
c (constante)	cx
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$[g(x)]^n \cdot g'(x)$ ($n \neq -1$)	$\frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln g(x) $
e^x	e^x
$e^{g(x)} \cdot g'(x)$	$e^{g(x)}$
a^x	$a^x \cdot \frac{1}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a} F(ax+b)$

§ 44. LE SIGNE DE SOMMATION Σ

Définition

Soit $p \leq n$ deux entiers et $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_n$ une suite de nombres. Pour abréger l'écriture de la somme $a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$, on se sert de la lettre grecque Σ ("sigma") :

$$\sum_{i=p}^n a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$$

("somme de $i = p$ à n des a_i ")

Exemples

1. $\sum_{i=4}^9 i^2 = 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 =$ somme des carrés des entiers de 4 à 9.
2. $\sum_{i=0}^{50} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50 =$ somme des 51 premiers entiers.
3. $\sum_{k=0}^{50} 2k = 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 98 + 100 =$ somme des nombres pairs de 0 à 100.
4. $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} =$ somme des inverses des entiers entre 1 et n .
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = 0,33333\dots = \frac{1}{3}.$

Propriétés

1. $\sum_{i=p}^n \alpha a_i = \alpha \sum_{i=p}^n a_i$
2. $\sum_{i=p}^n (a_i + b_i) = \left(\sum_{i=p}^n a_i \right) + \left(\sum_{i=p}^n b_i \right)$
3. $\sum_{i=p}^n \left(\sum_{j=q}^m a_{ij} \right) = \sum_{j=q}^m \left(\sum_{i=p}^n a_{ij} \right)$

§ 45. INTÉGRALE D'UNE FONCTION

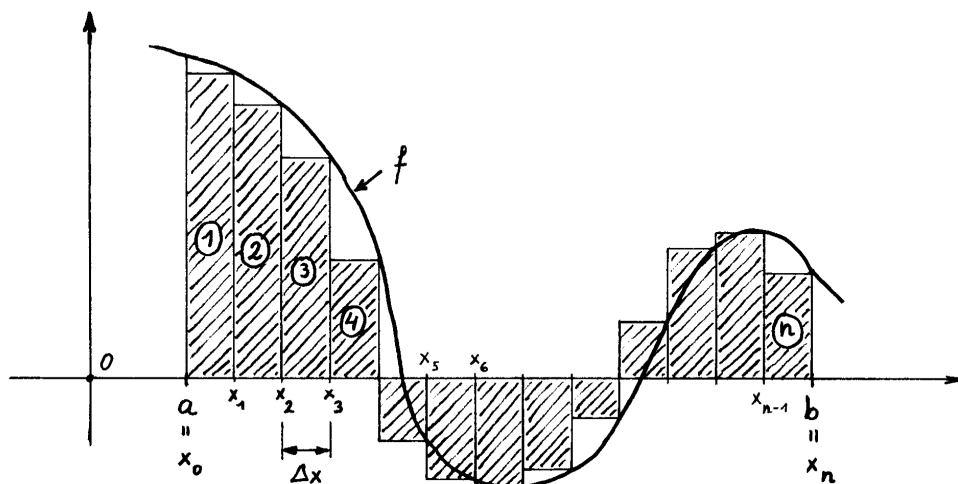
On considère un intervalle $[a, b]$ que l'on partage en n intervalles de même longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ et d'extrémités $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ telles que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On pose :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Le réel $\int_a^b f(x) dx$ ainsi défini s'appelle **intégrale de f , de a à b** .

Les nombres a et b sont les *bornes d'intégration*.



Graphiquement, on voit que le nombre $\int_a^b f(x) dx$ mesure l'aire de la région du plan comprise entre le graphe de f , l'axe Ox et les verticales d'abscisses a et b , les zones situées sous l'axe Ox étant toutefois comptabilisées négativement. D'où la définition :

$$\text{Aire algébrique sous } f, \text{ de } a \text{ à } b = \int_a^b f(x) dx$$

On étend la définition de l'intégrale aux cas $a = b$ et $b < a$ en écrivant :

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \qquad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

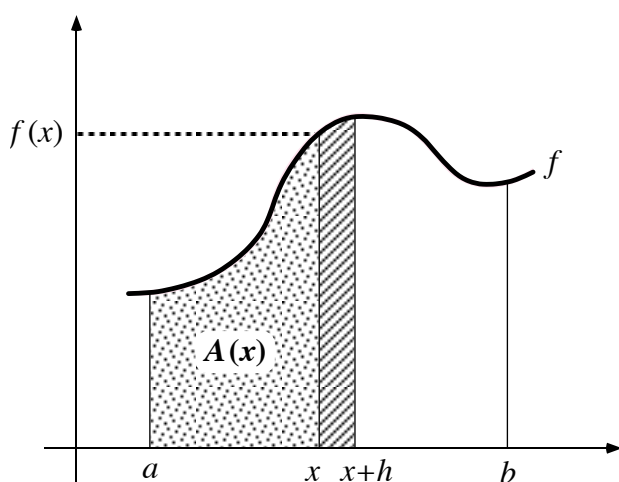
§ 46. THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL

Théorème

Soit F une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Preuve (idée)



aire  = $A(x+h) - A(x)$

Posons $A(x) = \int_a^x f(x) dx$ pour tout $x \in [a, b]$, et évaluons la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}.$$

Lorsque h est suffisamment petit, le nombre $A(x+h) - A(x)$ est à peu près l'aire algébrique d'un rectangle de dimensions h et $f(x)$.

Ainsi : $A(x+h) - A(x) \cong h \cdot f(x)$ et $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \cong f(x)$. On en déduit que

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$, ce qui signifie que la fonction A est dérivable et que sa dérivée est f .

A est donc une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Comme deux primitives de f diffèrent d'une constante, il existe un réel c tel que $F(x) = A(x) + c$, quel que soit $x \in [a, b]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (A(b) + c) - (A(a) + c) = A(b) - A(a) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = \\ &= \int_a^b f(x) dx - 0 = \int_a^b f(x) dx. \text{ D'où : } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Notation

$F(b) - F(a)$ s'écrit aussi $F(x) \Big|_a^b$ ou $\left[F(x) \right]_a^b$.

§ 47. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b, u des réels de cet intervalle. Soit encore F et G des primitives de f et g sur I .

Propriété 1

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Preuve

$$\begin{aligned} \int_a^b f + g &= [F + G]_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g. \end{aligned}$$

Propriété 2

$$\int_a^b c f = c \int_a^b f \quad (c = \text{constante})$$

Preuve

$$\int_a^b c f = [cF]_a^b = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c \int_a^b f.$$

Propriété 3

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

Preuve

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f.$$

Propriété 4

$$\int_a^u f + \int_u^b f = \int_a^b f$$

Preuve

$$\int_a^u f + \int_u^b f = (F(u) - F(a)) + (F(b) - F(u)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f.$$

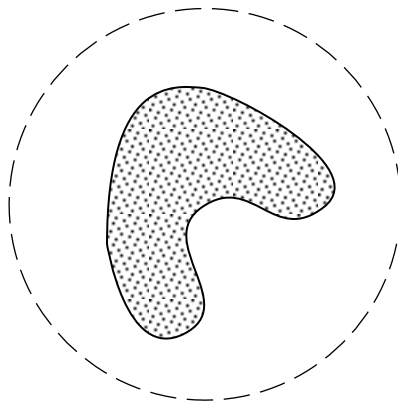
§ 48. RÉGIONS BORNÉES

Définition

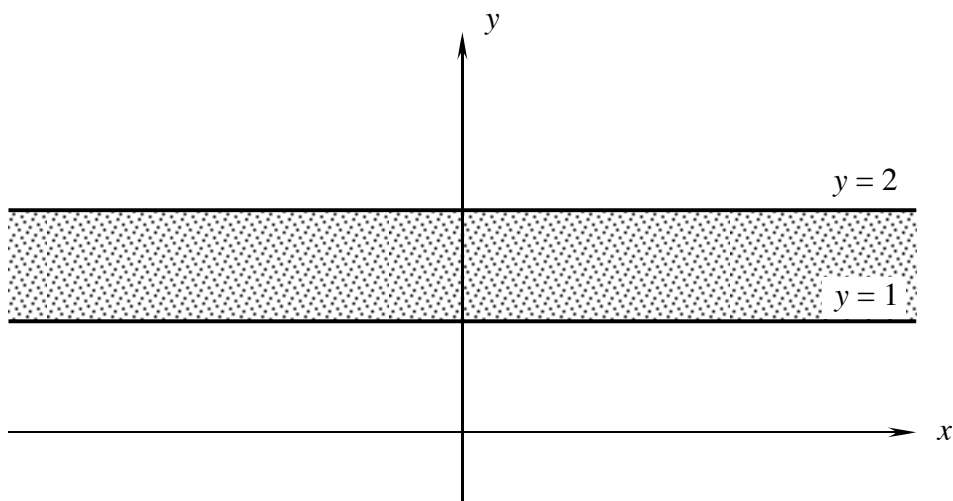
Une région du plan (resp. de l'espace) est dite *bornée* si elle est entièrement inscriptible dans un cercle (resp. une sphère).

Exemples

a) La zone grisée ci-dessous est une région bornée du plan :



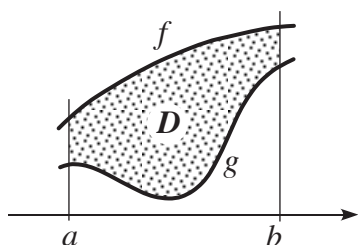
b) Les points $P(x, y)$ du plan dont l'ordonnée est comprise entre 1 et 2 ($1 \leq y \leq 2$) forment une région **non** bornée du plan :



c) Un cube est une figure bornée de l'espace.

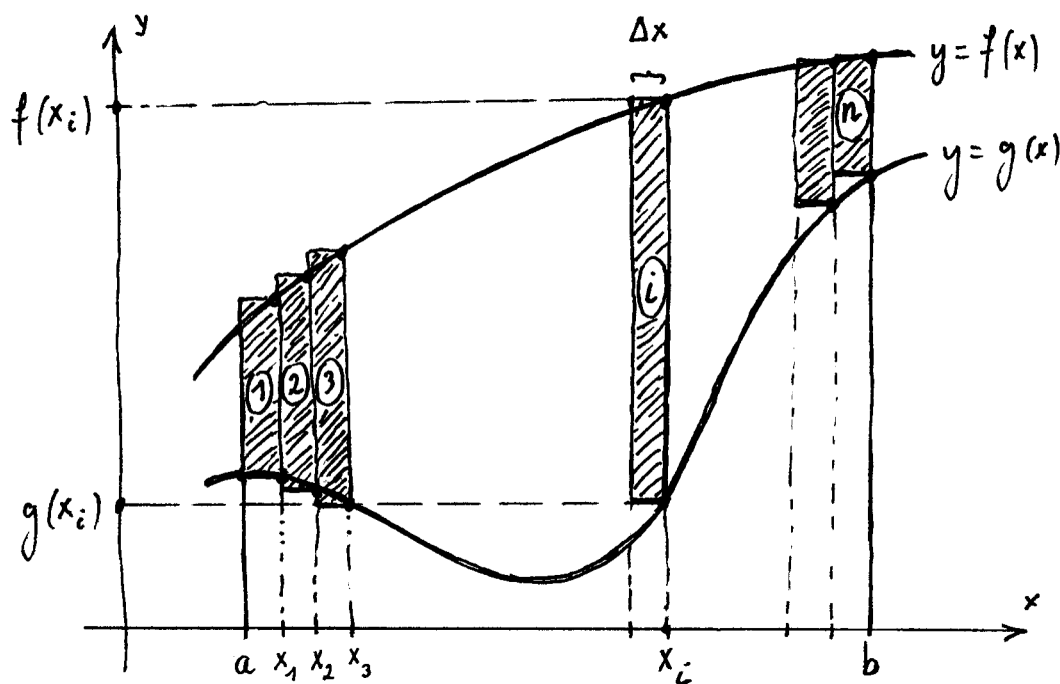
§ 49. AIRE D'UNE RÉGION SITUÉE ENTRE DEUX COURBES

On considère deux fonctions f et g continues sur un intervalle $[a, b]$ et telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit D le domaine borné limité par les graphes de f et g et par les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. Nous allons montrer que :



$$\text{aire}(D) = \int_a^b f - g$$

Pour ce faire, divisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, d'extrémités $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, et introduisons n rectangles de hauteurs $f(x_i) - g(x_i)$ et de largeur Δx :

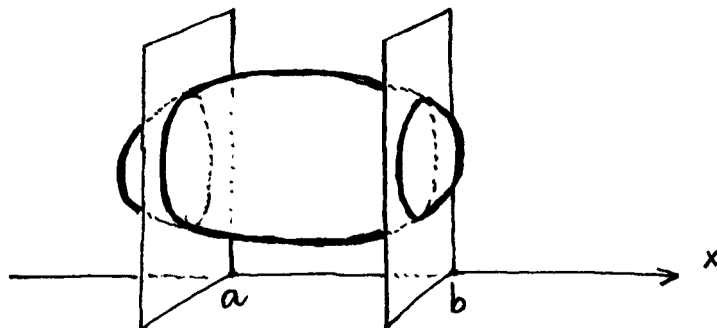


L'aire du domaine D est alors égale à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x$, puisque l'aire du i -ème rectangle est $(f(x_i) - g(x_i)) \Delta x$. Ainsi :

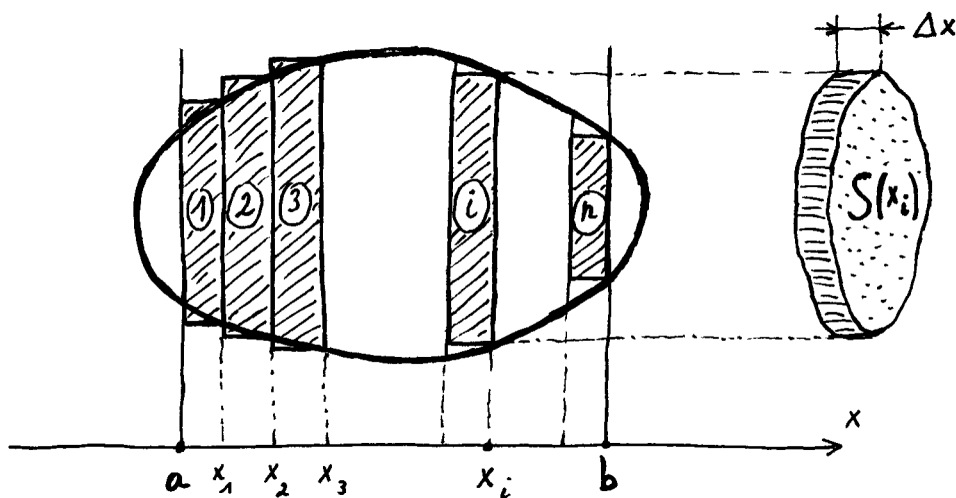
$$\text{aire}(D) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x = \int_a^b f - g$$

§ 50. VOLUME D'UN SOLIDE

On cherche à déterminer le volume V de la partie d'un solide comprise entre les plans perpendiculaires à Ox d'abscisses a et b :



Définissons n "*cylindres élémentaires*" (cylindres *droits*) en divisant comme d'habitude l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ de largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, et en prenant pour base du i -ème cylindre la section du solide par le plan perpendiculaire à Ox à l'abscisse x_i :



En désignant par $S(x)$ l'aire de la section d'abscisse x (section par un plan perpendiculaire à l'axe Ox), le volume du i -ème cylindre est alors égal à $V_i = S(x_i)\Delta x$ ("base · hauteur").

Ainsi :

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n S(x_i) \Delta x.$$

D'où :

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

§ 60. LOGARITHME – DÉFINITION

Soient a et x deux réels > 0 , avec $a \neq 1$.

On appelle *logarithme de x en base a* — et l'on note $\log_a(x)$ — le nombre u tel que $x = a^u$.

$$u = \log_a(x) \iff x = a^u$$

Autrement dit, $\log_a(x)$ est *l'exposant de la puissance de base a qui est égale à x* .

Exemples

- $\log_{10}(1000) = 3$, car $1000 = 10^3$;
- $\log_{10}(0,01) = -2$, car $0,01 = 10^{-2}$;
- $\log_2(16) = 4$, car $16 = 2^4$.

§ 61. CALCUL D'UN LOGARITHME À LA MACHINE

La calculatrice donne le logarithme en base 10 (touche LOG). Pour calculer un logarithme de base différente, on utilise la formule suivante :

$$\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)}$$

Exemple

$$\log_{15}(1291) = \frac{\log_{10}(1291)}{\log_{10}(15)} = 2,645140178\dots$$

Preuve de la formule

Posons : $m = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^m$ (1)

$$u = \log_{10}(x) \Leftrightarrow x = 10^u \quad (2)$$

$$v = \log_{10}(a) \Leftrightarrow a = 10^v \quad (3)$$

Il faut montrer que $m = \frac{u}{v}$, qui équivaut à $mv = u$.

$$10^{mv} = \left(10^v\right)^m \stackrel{(3)}{=} a^m \stackrel{(1)}{=} x \stackrel{(2)}{=} 10^u. \quad \text{D'où } 10^{mv} = 10^u \quad \text{et donc } mv = u.$$

De manière analogue, on obtient la formule plus générale de **changement de base** :

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

§ 62. RÉCIPROCITÉ DE $\exp_a$ ET $\log_a$

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. On appelle *fonction exponentielle* de base a la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $\exp_a(x) = a^x$. On appelle *fonction logarithmique* de base a la fonction $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ envoyant x sur $\log_a(x)$.

Théorème

Les fonctions $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ sont **réciroques** l'une de l'autre. Autrement dit :

1. $\exp_a(\log_a(x)) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
2. $\log_a(\exp_a(x)) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Preuve

1. Posons $u = \log_a(x)$, qui équivaut à $x = a^u$.
Alors : $\exp_a(\log_a(x)) = \exp_a(u) = a^u = x$.
2. $\log_a(\exp_a(x)) = \log_a(a^x) = x$.

Corollaire

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

1. $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$
2. $\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve

1. $a^x = a^y \Rightarrow \log_a(a^x) = \log_a(a^y) \Rightarrow x = y$. La réciproque est banale.
2. $\log_a(x) = \log_a(y) \Rightarrow \exp_a(\log_a(x)) = \exp_a(\log_a(y)) \Rightarrow x = y$.

La réciproque est banale.

§ 63. LOGARITHME D'UN PRODUIT

Théorème

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

"Le logarithme transforme les multiplications en additions"

Preuve

Posons : $u = \log_a(xy) \Leftrightarrow a^u = xy$ (1)

$$v = \log_a(x) \Leftrightarrow a^v = x$$
 (2)

$$w = \log_a(y) \Leftrightarrow a^w = y$$
 (3)

Il faut établir que $u = v + w$.

$$a^{v+w} = a^v \cdot a^w \stackrel{(2)(3)}{=} xy \stackrel{(1)}{=} a^u. \text{ D'où } a^{v+w} = a^u \text{ et donc } u = v + w.$$

De manière analogue, on obtient :

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

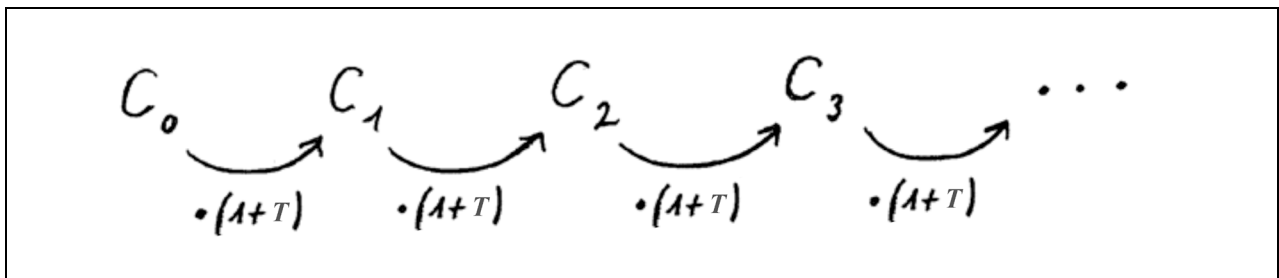
$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x), \text{ pour tout } n \in \mathbb{R}$$

§ 64. INTÉRÊTS COMPOSÉS

Comment évolue au cours des années un capital C_0 (capital initial) placé à un taux fixe T ?

Posons : C_1 = capital après 1 an de placement (= C_0 plus l'intérêt produit par C_0 la 1^{re} année) ;
 C_2 = capital après 2 ans de placement (= C_1 plus l'intérêt produit par C_1 la 2^e année) ;
 C_3 = capital après 3 ans de placement (= C_2 plus l'intérêt produit par C_2 la 3^e année) ;
etc.

On a :



En effet :

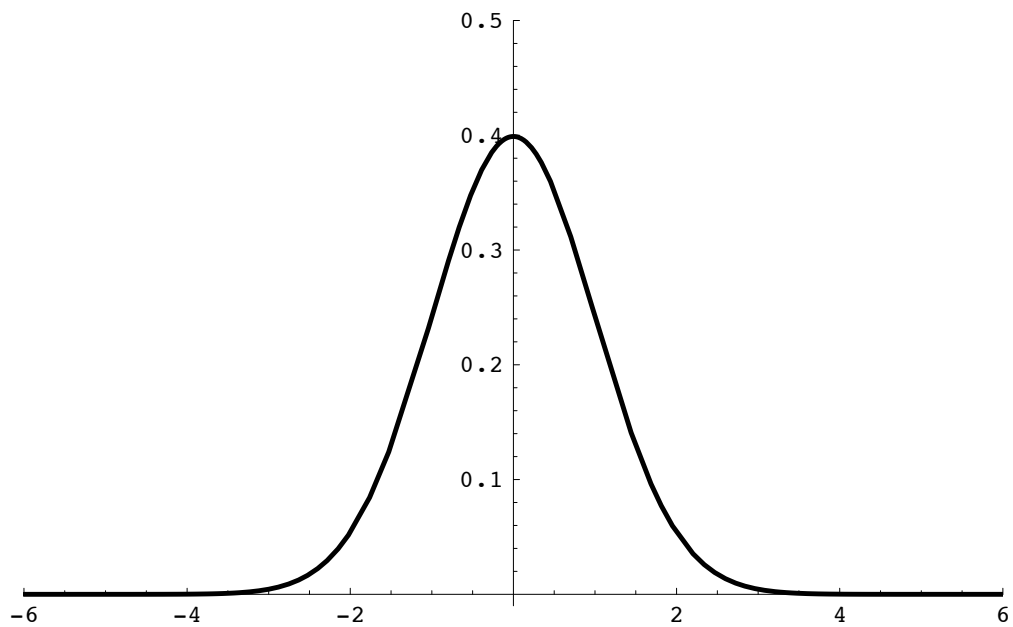
$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 + T \cdot C_0 = C_0(1+T) ; \\ C_2 &= C_1 + T \cdot C_1 = C_1(1+T) ; \\ C_3 &= C_2 + T \cdot C_2 = C_2(1+T) ; \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Tout cela se résume ainsi :

$$C_n = C_0(1+T)^n$$

[T = taux du placement ; C_0 = capital initial ; C_n = capital après n années]

Courbe de Gauss : $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$



*L'aire délimitée par la courbe et l'axe Ox
est exactement égale à 1*

§ 70. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons :

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Plus précisément : $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$, où $S_n(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. Il faut bien sûr montrer que cette limite existe et est finie (pour tout x), ce que nous ne ferons pas ici...

Définition

Notons e l'image de 1 par la fonction $\exp$:

$$e = \exp(1) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \cong 2,718$$

Théorème 1

Pour tous réels x, y :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Idée de la preuve

Multiplions les sommes définissant $\exp(x)$ et $\exp(y)$ comme de simples polynômes, en groupant les termes de même degré (on peut montrer que cette façon de faire est légitime) :

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \right) \\ &= 1 + (x+y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!} \right) + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^2y}{2!} + \frac{y^3}{3!} \right) + \dots \\ &= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots = \exp(x+y). \end{aligned}$$

Théorème 2

Pour tout réel x :

$$\exp(x) = e^x$$

Idée de la preuve

- $x \in \mathbb{N}$ $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \dots = 1 = e^0$

$$\exp(1) = e = e^1 \text{ (par définition de } e)$$

$$\exp(2) = \exp(1+1) \stackrel{*}{=} \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$$

$$\exp(3) = \exp(2+1) \stackrel{*}{=} \exp(2) \cdot \exp(1) = e^2 \cdot e = e^3$$

etc.

- $x \in \mathbb{Q}_+$ Prenons par exemple $x = \frac{3}{5}$. Il s'agit de montrer que $\exp\left(\frac{3}{5}\right) = e^{3/5} = \sqrt[5]{e^3}$.

$$\left(\exp\left(\frac{3}{5}\right)\right)^5 \stackrel{*}{=} \exp\left(5 \cdot \frac{3}{5}\right) = \exp(3) = e^3 ; \quad \Rightarrow \quad \exp\left(\frac{3}{5}\right) = \sqrt[5]{e^3}.$$

- $x \in \mathbb{Q}_-$ Ecrivons $x = -y$, avec $y \in \mathbb{Q}_+$. Alors :

$$\exp(y) \cdot \exp(-y) \stackrel{*}{=} \exp(y-y) = \exp(0) = 1 ;$$

$$\Rightarrow \exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{e^y} = e^{-y} \quad (y \in \mathbb{Q}_+) ; \quad \Rightarrow \quad \exp(x) = e^x.$$

- $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ C'est une question de "continuité"...

* En vertu du théorème 1

§ 71. DÉRIVÉE DE LA FONCTION e^x

Théorème

La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est sa propre dérivée :

$$(e^x)' = e^x$$

Preuve (idée)

On sait que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$. Il est possible de démontrer qu'en dérivant cette série terme à terme on obtient bien la dérivée de sa somme. Dérivons donc allégrement :

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x.\end{aligned}$$

D'où la formule annoncée.

La formule de dérivation d'une fonction composée donne alors :

Corollaire

La dérivée de $e^{g(x)}$ est égale à $e^{g(x)} \cdot g'(x)$:

$$(e^g)' = e^g \cdot g'$$

Exemples

- $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$
- $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

§ 72. LOGARITHME NATUREL

Le logarithme naturel ("ln") est le logarithme en base $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \cong 2,718$:

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$$(x > 0)$$

On a donc :

$$u = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^u$$

L'ensemble de définition de la fonction $\ln : x \mapsto \ln(x)$ est $\mathbb{R}_+^*$, comme pour les autres logarithmes.

Formules diverses

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\text{Formules de passage : } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} ; \quad a^x = e^{(\ln a)x}$$

§ 73. RÉCIPROCITÉ DE $\exp$ ET $\ln$

Théorème

Les fonctions $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ sont **réciproques** l'une de l'autre :

$$1. \quad \exp(\ln(x)) = x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$2. \quad \ln(\exp(x)) = x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(On rappelle que $\exp(x) = e^x$)

Preuve

1. Posons $u = \ln x$, qui équivaut à $e^u = x$.

$$\text{Alors : } \exp(\ln(x)) = \exp(u) = e^u = x .$$

2. Posons $v = e^x$, qui équivaut à $x = \ln(v)$.

$$\text{Alors : } \ln(\exp(x)) = \ln(e^x) = \ln(v) = x .$$

Remarque

Le théorème ci-dessus peut s'exprimer également ainsi :

$$1. \quad e^{\ln x} = x$$

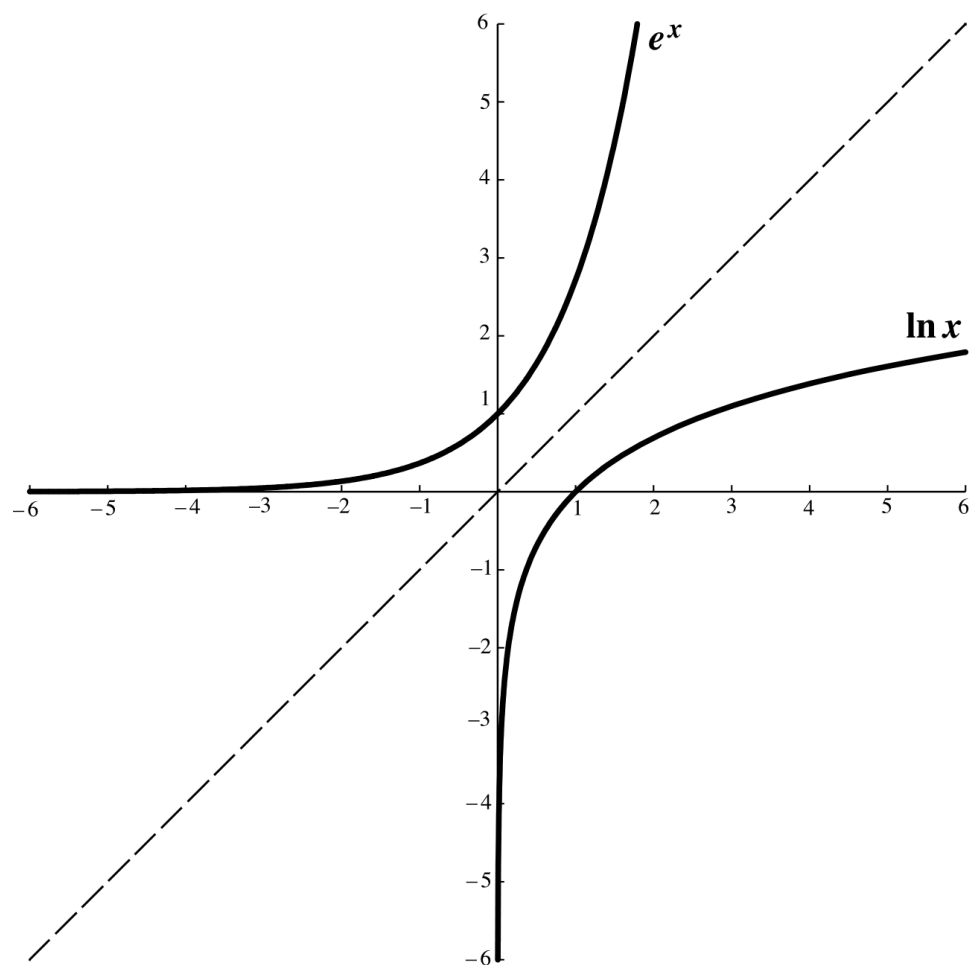
$$2. \quad \ln(e^x) = x$$

Corollaire

$$1. \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y, \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y, \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

§ 74. GRAPHES DES FONCTIONS $\exp$ ET $\ln$



Les deux fonctions étant réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant (droite d'équation $y = x$).

Observons au passage que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$"e^{-\infty} = 0"$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$"e^{+\infty} = +\infty"$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

$$"\ln(0) = -\infty"$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$"\ln(+\infty) = +\infty"$$

§ 75. DÉRIVÉE DE LA FONCTION $\ln x$

Théorème

$$\left(\ln x \right)' = \frac{1}{x} \quad \left(\text{sur } \mathbb{R}_+^* \right)$$

Preuve

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il suffit de montrer que la limite de $\frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ lorsque x tend vers a existe et vaut $\frac{1}{a}$.

Posons $y = \ln x$ (qui équivaut à $x = \exp y$) et $b = \ln a$ (qui équivaut à $a = \exp b$). Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{\exp y - \exp b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\left(\frac{\exp y - \exp b}{y - b} \right)} = \frac{1}{\exp'(b)} = \frac{1}{\exp b} = \frac{1}{a}.$$

Corollaire 1

$$\text{La dérivée de } \ln(g(x)) \text{ est } \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Corollaire 2

$$\left(\ln |x| \right)' = \frac{1}{x} \quad \left(\text{sur } \mathbb{R}^* \right)$$

Preuve

Si $x > 0$, $|x| = x$, et $\left(\ln |x| \right)' = \left(\ln x \right)' = \frac{1}{x}$.

Si $x < 0$, $|x| = -x$, et $\left(\ln |x| \right)' = \left(\ln(-x) \right)' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Corollaire 3

$$\text{La dérivée de } \ln |g(x)| \text{ est } \frac{g'(x)}{g(x)}$$

§ 76. PRIMITIVE DE $1/x$

On sait que $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

$\ln|x|$ est donc une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$:

$$\boxed{P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln|x|}$$

Et je dirais même plus :

Comme la dérivée de $\ln|g(x)|$ est $\frac{g'(x)}{g(x)}$ [⊗],

on peut écrire :

$$\boxed{P\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right) = \ln|g(x)|}$$

Applications

$$1. \int_2^3 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| \right]_2^3 = \ln 3 - \ln 2 \approx 0,4055$$

$$2. \int_1^2 \frac{\overset{g'}{\underset{g}{3x^2}}}{x^3+1} dx = \left[\ln|\underbrace{x^3+1}_g| \right]_1^2 = \ln 9 - \ln 2 \approx 1,504$$

[⊗] Si g est une "bonne" fonction.

§ 77. LIMITE DE $\frac{\ln x}{x}$ EN $+\infty$

Théorème

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

"La fonction $x \mapsto x$ l'emporte sur la fonction $x \mapsto \ln x$ en $+\infty$ "

Preuve

Soit $x > 1$. On a : $\int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$.

Mais $\frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$ pour tout $t > 1$. Ainsi :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt < \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}.$$

Nous avons donc, pour tout $x > 1$:

$$\underline{\underline{0 < \ln x < 2\sqrt{x}}}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, en vertu du "*théorème des deux gendarmes*"...

Corollaire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

§ 78. CROISSANCES COMPARÉES DE e^x , x^n et $\ln x$

Théorème

Pour tout $n > 0$, on a :

$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ $2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$ $3. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$	"la puissance l'emporte sur le log."
$4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$	"l'exponentielle l'emporte sur la puissance"

Preuves

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} \stackrel{x = z}{=} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\ln(z^{1/n})}{z} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln z}{z} = 0.$$

2. équivalent à 1.

$$3. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x \stackrel{x = 1/t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1/t)}{t^n} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln t}{t^n} \stackrel{\text{par 1.}}{=} 0.$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} \stackrel{\substack{x = \ln z \\ z = e^x}}{=} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z}{(\ln z)^n} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z^{1/n}}{\ln z} \right)^n \stackrel{\text{par 2.}}{=} +\infty$$

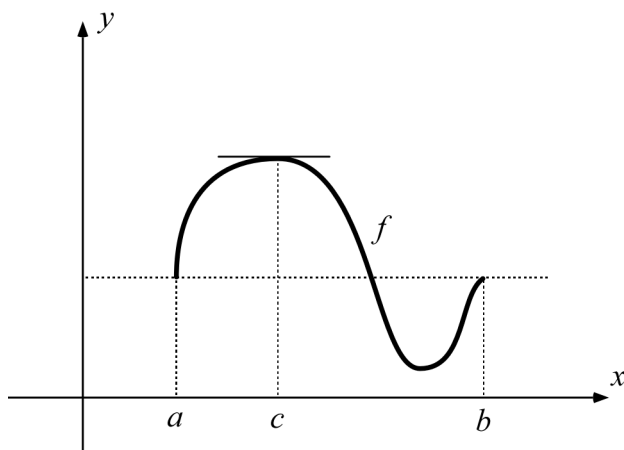
5. équivalent à 4.

Corollaire. Si n est un entier, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

§ 80. THÉORÈMES DE ROLLE ET DE CAUCHY

1. Le théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Ce théorème confirme l'évidence suivante : il existe au moins un point de la courbe $y = f(x)$ ($a < x < b$) en lequel la tangente est horizontale.

2. Le théorème de Cauchy

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Remarque. Le théorème de Rolle assure que $g(a) \neq g(b)$.

Preuve

Considérons la fonction h définie par $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$.

Cette fonction est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, sa dérivée étant $h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]$. De plus, on vérifie que $h(a) = h(b)$. Il existe donc, en vertu du théorème de Rolle, un réel $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, ce qui équivaut à $f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$. Ainsi, puisque $g(a) \neq g(b)$ et $g'(c) \neq 0$,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

§ 81. RÈGLE DE L'HOSPITAL*

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I contenant a . On suppose que :

1. $f(a) = g(a) = 0$;
2. g et g' ne s'annulent pas sur $I - \{a\}$;
3. la limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ lorsque x tend vers a existe.

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Remarque. Ce résultat permet le calcul de nombreuses limites du type $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Preuve

Soit $x \in I - \{a\}$. Les fonctions f et g satisfont les hypothèses du théorème de Cauchy sur l'intervalle $[a, x]$. Il existe donc $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Comme c_x tend vers a lorsque x tend vers a , on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A noter :

Le théorème est encore vrai lorsque la limite est du type $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, ou lorsque $a = \pm \infty$.

* Guillaume de L'Hospital, mathématicien français, 1661-1704

§ 90. PLANS D'ÉTUDE DE FONCTIONS

A) Fonctions rationnelles

Exemples : $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$; $f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1}$

1. Ensemble de définition, parité
2. Zéros et signe de la fonction
3. Asymptotes (verticales, horizontale ou oblique)
4. Position du graphe relativement à l'asymptote horizontale ou oblique
5. Croissance (= variation), extremums et paliers
6. Courbure (= convexité) et points d'inflexion
7. Graphe

B) Fonctions trigonométriques

Exemples : $f(x) = 2 \sin x \cos x$; $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$

1. Ensemble de définition, parité, périodicité (choix d'un intervalle d'étude)
2. Zéros et signe de la fonction
3. Croissance (= variation), extremums et paliers
4. Courbure (= convexité) et points d'inflexion
5. Asymptotes
6. Graphe

C) Fonctions « exponentielles ou logarithmiques »

Exemples : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$; $f(x) = \frac{\ln(3x)}{x-1}$

1. Ensemble de définition, parité
2. Zéros et signe de la fonction
3. Croissance (= variation), extremums et paliers
4. Courbure (= convexité) et points d'inflexion
5. Asymptotes horizontales et/ou obliques
6. Comportement au "bord" de l'ensemble de définition (asymptote verticale ? pente de la tangente ?)
7. Graphe