

B-construction et limites topologiques

Dominique Hoyoïs

Travail réalisé sous la
direction du professeur Serge Maumary
en vue de l'obtention du diplôme de mathématicien

Université de Lausanne
Octobre 1977

CONTENU

Introduction	1
I. LIMITES TOPOLOGIQUES	
1. Catégories topologiques	2
2. Diagrammes topologiques	3
3. Limite inverse topologique	6
4. Limite directe topologique	7
II. ESPACES SIMPLICIAUX	
1. La catégorie $\underline{\Delta}$	12
2. Espaces simpliciaux	13
3. Limites topologiques dans Top_Δ	17
4. Le théorème	19
III. B-CONSTRUCTION	
1. Le foncteur B	23
2. Unicité du foncteur B	26
3. Existence du foncteur B	27
4. Commutation de B avec le produit	34
Références	39

INTRODUCTION

La "réalisation géométrique" de Milnor associant à tout complexe semi-simplicial X un CW-complexe $|X|$ s'exprimant comme un certain quotient de $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n$ (cf. [1]) peut être étendue formellement aux espaces simpliciaux, c'est-à-dire à des complexes semi-simpliciaux munis d'une topologie ; le foncteur ainsi obtenu sera appelé "B-construction".

Le but de ce travail est de donner une caractérisation axiomatique de la B-construction, de la définir par un nombre restreint de propriétés intéressantes.

Dans le chapitre I, on généralise les notions de limite directe et inverse dans une catégorie d'espaces topologiques structurés ; on y définit et étudie la "limite topologique" directe ou inverse d'un "diagramme topologique" sur une "catégorie topologique" d'indices.

Le chapitre II prouve que tout espace simplicial est limite directe topologique de n -simplexes simpliciaux.

Quant au chapitre III, il montre principalement que la B-construction est déterminée par la donnée de sa valeur sur les n -simplexes simpliciaux, et par des propriétés de commutation avec la limite directe topologique et le produit fibré.

I. LIMITES TOPOLOGIQUES

1. Catégories topologiques.

Une catégorie topologique $\underline{\underline{C}}$ est la donnée d'une paire topologique $\text{Hom}\underline{\underline{C}} \supset \text{Ob}\underline{\underline{C}}$, de deux rétractions s, t de $\text{Hom}\underline{\underline{C}}$ sur $\text{Ob}\underline{\underline{C}}$, et d'une loi de composition (ou multiplication) continue, associative.

$$\text{Hom}\underline{\underline{C}} \underset{s,t}{\times} \text{Hom}\underline{\underline{C}} \longrightarrow \text{Hom}\underline{\underline{C}}$$

$$(x,y) \longmapsto xy,$$

$\text{Hom}\underline{\underline{C}} \underset{s,t}{\times} \text{Hom}\underline{\underline{C}}$ étant le sous-espace de $\text{Hom}\underline{\underline{C}} \times \text{Hom}\underline{\underline{C}}$ formé des couples (x,y) tels que $s(x)=t(y)$; on exige de plus que, quels que soient $x,y \in \text{Hom}\underline{\underline{C}}$,

$$s(xy)=s(y), \quad t(xy)=t(x) \quad \text{et}$$

$$x = xs(x) = t(x)x$$

Les éléments de $\text{Hom}\underline{\underline{C}}$ sont les "morphismes" de $\underline{\underline{C}}$, ceux de $\text{Ob}\underline{\underline{C}}$ les "objets" de $\underline{\underline{C}}$.

Si l'espace $\text{Hom}\underline{\underline{C}}$ est discret, on dit que $\underline{\underline{C}}$ est discrète.
On appelle source l'application s et but l'application t .

Un foncteur (continu) $\underline{\underline{F}} : \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{D}}$ entre catégories topologiques est une application (de paires) topologiques $\text{Hom}\underline{\underline{C}}(\supset \text{Ob}\underline{\underline{C}}) \longrightarrow \text{Hom}\underline{\underline{D}}(\supset \text{Ob}\underline{\underline{D}})$ telle que $s\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}s$, $t\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}t$ et $\underline{\underline{F}}(xy) = \underline{\underline{F}}(x)\underline{\underline{F}}(y)$ pour tout $(x,y) \in \text{Hom}\underline{\underline{C}} \underset{s,t}{\times} \text{Hom}\underline{\underline{C}}$.

Notations.

a) on désignera par Cat la catégorie dont les objets sont les catégories topologiques, et dont les morphismes sont les foncteurs continus.

b) pour tout $a,b \in \text{Ob}\underline{\underline{C}}$, on écrira $\text{Hom}\underline{\underline{C}}(a,b)$ le sous-espace de $\text{Hom}\underline{\underline{C}}$ composé des x tels que $s(x) = a$, $t(x) = b$.

c) $a \in \text{Ob}\underline{C}$ sera parfois noté id_a (identité de a), pour une raison non obscure.

Exemples.

- a) toute catégorie au sens habituel dont les morphismes forment un ensemble est une catégorie topologique (topologie discrète).
- b) tout groupe topologique est une catégorie topologique ayant pour seul objet l'élément neutre.
- c) à tout espace topologique X est associée la catégorie topologique $\underline{\text{Id}}X$ donnée par la paire $X \triangleright X$. La catégorie des espaces topologiques et applications continues, qu'on notera Top , peut ainsi être vue comme une sous-catégorie pleine de Cat .
- d) à tout ensemble E préordonné par une relation $R \subset E \times E$ est attachée une catégorie topologique discrète $\underline{E}$: $\text{Hom}\underline{E} = R$, $\text{Ob}\underline{E} = \text{diag}(E \times E) = E$, $s(aRb) = b$, $t(aRb) = a$, $(aRb)(bRc) = (aRc)$. On utilisera plus loin la catégorie $\underline{N}$ ainsi construite.
- e) à une famille $(\underline{C}_i)$ de catégories topologiques correspond la catégorie produit $\underline{C} = \prod_i \underline{C}_i$ telle que $\text{Hom}\underline{C} = \prod_i \text{Hom}\underline{C}_i$, $\text{Ob}\underline{C} = \prod_i \text{Ob}\underline{C}_i$, avec la multiplication évidente.

2. Diagrammes topologiques

Habituellement, lorsqu'on veut parler de limite directe ou inverse dans une catégorie $\underline{C}$, on part d'un "diagramme" (X_i, α_{ij}) , c'est-à-dire de la donnée d'une famille (X_i) d'objets de $\underline{C}$, ainsi que de "liens" $\alpha_{ij} \in \text{Hom}_{\underline{C}}(X_i, X_j)$ vérifiant certaines conditions de commutation. Un tel diagramme peut s'interpréter comme une sous-catégorie de $\underline{C}$, ou comme

un foncteur d'une catégorie $\underline{I}$ dans $\mathcal{C}$ envoyant $i \in \text{Ob}\underline{I}$ sur X_i et $\alpha \in \text{Hom}_{\underline{I}}(i, j)$ sur α_{ij} . Si les objets de $\mathcal{C}$ sont munis d'une topologie, un tel foncteur équivaut à une application continue $p : X = \bigsqcup_i X_i \longrightarrow \text{Ob}\underline{I}$ ($\underline{I}$ étant considérée comme une catégorie topologique discrète), dont les fibres $p^{-1}(i)$ sont les X_i , ces fibres étant "liées" par les α_{ij} . On est alors irrésistiblement tenté de mettre sur X une topologie non nécessairement égale à celle de somme des fibres, et donc sur $\underline{I}$ une topologie non discrète. D'où la notion de "diagramme topologique", qu'on va préciser maintenant.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie dont les objets sont des espaces topologiques structurés (par exemple des groupes topologiques, catégories topologiques, EVT, etc.) et dont les morphismes sont des applications continues compatibles avec cette structure (dans ce qui suit, $\mathcal{C}$ désignera toujours une telle catégorie).

Soient X un espace topologique et $\underline{I}$ une catégorie topologique ("catégorie des indices"). Appelons diagramme topologique sur $\underline{I}$ dans $\mathcal{C}$ une application continue $p : X \rightarrow \text{Ob}\underline{I}$ dont les fibres $X(i)$ au-dessus de chaque $i \in \text{Ob}\underline{I}$ sont — en tant que sous-espaces de X — des objets de $\mathcal{C}$, et munie pour tout $\alpha \in \text{Hom}_{\underline{I}}(i, j)$ d'un morphisme $\tilde{\alpha}$ de $\mathcal{C}$, $\tilde{\alpha} : X(i) \rightarrow X(j)$, de manière que $\tilde{\alpha\beta} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ et $\tilde{\text{id}}_i = \text{id}_{X(i)}$.

Un tel diagramme sera noté $(X, p, \underline{I})$, ou $(X, \underline{I})$, ou (X, p) , ou simplement X , selon les circonstances.

On dit que $\tilde{\alpha}$ est le lien au-dessus de α .

Un diagramme topologique trivial est un diagramme de la forme

$(\text{Ob}\underline{I} \times Z, \text{pr}_1, \underline{I})$, $\tilde{\alpha} = \text{id}_Z$, Z étant un objet de $\mathcal{C}$. Il est à nouveau noté Z .

Un morphisme de diagrammes topologiques dans $\mathcal{C}$ de $(X, p, \underline{I})$

vers $(Y, q, \underline{J})$ est un couple $(f, \underline{F})$ formé d'une application continue $f : X \rightarrow Y$ et d'un foncteur $\underline{F} : \underline{I} \rightarrow \underline{J}$, tel que

- 1) $\underline{F}p = qf$
- 2) la restriction de f à $X(i)$, notée f_i , est dans $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X(i), Y(j))$, où $j = \underline{F}(i)$.
- 3) pour tout $\alpha \in \text{Hom}_{\underline{I}}(i, j)$, on a $\widetilde{\underline{F}(\alpha)} f_i = f_j \widetilde{\alpha}$.

On dit que $(f, \underline{F})$ est un $(\underline{I}, \underline{J})$ -morphisme. Si $\underline{I} = \underline{J}$ et $\underline{F} = \text{id}$ on parle de $\underline{I}$ -morphisme.

Remarques.

- a) un $\underline{I}$ -morphisme de diagrammes triviaux est simplement un morphisme de $\mathcal{C}$.
- b) un $\underline{I}$ -morphisme de $(X, \underline{I})$ vers un diagramme trivial Y est une application continue $f : X \rightarrow Y$ dont les restrictions f_i aux $X(i)$ sont des morphismes de $\mathcal{C}$ vérifiant $f_j \widetilde{\alpha} = f_i$ pour tout $\alpha \in \text{Hom}(i, j)$.
- c) un $\underline{I}$ -morphisme d'un diagramme trivial X vers $(Y, \underline{I})$ est une application continue $f : \text{Ob} \underline{I} \times X \rightarrow Y$ dont les restrictions f_i aux $\{i\} \times X$ sont dans $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y(i))$ et vérifient $\widetilde{\alpha} f_i = f_j$ pour tout $\alpha \in \text{Hom}_{\underline{I}}(i, j)$.
- d) soient $\underline{F} : \underline{I} \rightarrow \underline{J}$ un foncteur entre catégories topologiques et Y un diagramme sur $\underline{J}$. $\text{Ob} \underline{I} \times_{\text{Ob} \underline{J}} Y$ est canoniquement un diagramme sur $\underline{I}$, ayant mêmes fibres et liens que Y , appelé diagramme pull-back de $(Y, \underline{J})$ par $\underline{F}$. Un $(\underline{I}, \underline{J})$ -morphisme de X dans Y n'est alors autre qu'un $\underline{I}$ -morphisme de X dans le pull-back de Y par $\underline{F}$.
- e) on a la notion de produit de deux diagrammes :

$$(X, p, \underline{I}) \times (Y, q, \underline{J}) = (X \times Y, p \times q, \underline{I} \times \underline{J}), \quad (\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\alpha} \times \beta.$$

Si Y est trivial, $X \times Y$ est un diagramme sur $\underline{I}$.

3.. Limite inverse topologique.

Soit $(X, \underline{I})$ un diagramme topologique dans $\mathcal{C}$. On appelle limite inverse topologique de $(X, \underline{I})$ un objet L de $\mathcal{C}$ muni d'un $\underline{I}$ -morphisme $\varepsilon : L \rightarrow X$ (L trivial), tel que tout $\underline{I}$ -morphisme g d'un diagramme trivial Z vers X se factorise de manière unique en

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \varepsilon \swarrow & & \uparrow h \\ X & & Z \\ & \searrow g & \end{array}$$

où h est un morphisme de $\mathcal{C}$. On voit qu'une telle limite est unique à isomorphisme près dans $\mathcal{C}$.

Si $(Y, \underline{I})$ est un second diagramme admettant une limite L' et si $f : X \rightarrow Y$ est un $\underline{I}$ -morphisme, on appelle limite inverse topologique de f l'application $f' : L \rightarrow L'$ induite par f ;

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f'} & L' \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Proposition. (existence de la limite inverse dans Top)

Soit $(X, p, \underline{I})$ un diagramme topologique dans Top avec $\text{Ob } \underline{I}$ localement compact et p surjective. Le sous-espace de $C^0(\text{Ob } \underline{I}, X)_{c-o}$ (= ensemble des applications continues $\text{Ob } \underline{I} \rightarrow X$ muni de la topologie compacte-ouverte) formé des sections continues S de p telles que $\widetilde{\alpha}(S(i)) = S(j)$, pour tout $\alpha \in \text{Hom}_{\underline{I}}(i, j)$, est une limite inverse du diagramme $(X, \underline{I})$; on le note $\varprojlim_{\underline{I}} X$.

preuve. Définissons l'application $\varepsilon : \text{Ob}\underline{I} \times \varprojlim_{\underline{I}} X \longrightarrow X$ par $\varepsilon(i, S) = S(i)$. La compacité locale de $\text{Ob}\underline{I}$ assure la continuité de ε ; ε est un $\underline{I}$ -morphisme car, si $\alpha \in \text{Hom}_{\underline{I}}(i, j)$, on a $\varepsilon(j, S) = S(j) = \widetilde{\alpha}(S(i)) = \widetilde{\alpha}\varepsilon(i, S)$. Soit $g : Z \longrightarrow X$ un $\underline{I}$ -morphisme (Z trivial). Il faut trouver une application continue $h : Z \longrightarrow \varprojlim_{\underline{I}} X$ telle que $\varepsilon(i, h(z)) = g(i, z)$ pour tout $i \in \text{Ob}\underline{I}$ et $z \in Z$. On doit donc poser $h(z)(i) = g(i, z)$; vérifions que $h(z) \in \varprojlim_{\underline{I}} X$:

- $ph(z)(i) = pg(i, z) = i$, donc $ph(z) = \text{id}$.
- soit $\alpha \in \text{Hom}_{\underline{I}}(i, j)$; $\widetilde{\alpha}(h(z)(i)) = \widetilde{\alpha}g(i, z) = g(j, z) = h(z)(j)$.
- $h(z)$ est continue puisque $h(z) = g(\cdot, z)$.

La continuité de h est équivalente à la continuité de g .

Corollaire. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un $\underline{I}$ -morphisme, l'application $\varprojlim_{\underline{I}} X \longrightarrow \varprojlim_{\underline{I}} Y$, $S \mapsto fS$ est une limite inverse topologique de f ; on la note $\varprojlim_{\underline{I}} f$.

4. Limite directe topologique.

4.1 Soit $(X, \underline{I})$ un diagramme topologique dans $\mathcal{C}$. On appelle limite directe topologique de $(X, \underline{I})$ un objet L de $\mathcal{C}$ muni d'un $\underline{I}$ -morphisme $\varepsilon : X \longrightarrow L$ (L trivial), tel que tout $\underline{I}$ -morphisme g de X dans un diagramme trivial Z se factorise de manière unique en

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & \nearrow \varepsilon & \downarrow h \\ X & & Z \\ & \searrow g & \end{array}$$

h étant un morphisme de $\mathcal{C}$. Une telle limite est unique à isomorphisme près.

Soit maintenant $(f, \underline{F})$ un morphisme de $(X, \underline{I})$ vers un second diagramme $(Y, \underline{J})$ admettant une limite directe L' . L'application

$\varepsilon f : X \rightarrow L'$ est un $\underline{I}$ -morphisme, donc induit une application continue $g : L \rightarrow L'$. On dit que g est une limite directe topologique de $(f, \underline{F})$.

4.2 Existence de la limite directe topologique dans Top.

Proposition. Soit $(X, \underline{I})$ un diagramme dans Top et $\sim$ l'équivalence sur X engendrée par les relations $x \sim \tilde{\alpha}(x)$, $\alpha \in \text{Hom} \underline{I}$. $X/\sim$ est une limite directe topologique du diagramme $(X, \underline{I})$, notée $\varinjlim_{\underline{I}} X$.

preuve. ε = application quotient. Soit g un $\underline{I}$ -morphisme de X dans un diagramme trivial Z . Pour tout x de X , on pose $h(\varepsilon(x)) = g(x)$, ce qui définit une unique application continue h de $X/\sim$ dans Z factorisant g .

Corollaire. Si $(f, \underline{F})$ est un morphisme de $(X, \underline{I})$ vers $(Y, \underline{J})$, l'application $\varinjlim_{\underline{I}} X \rightarrow \varinjlim_{\underline{J}} Y$ obtenue par passage au quotient de f est une limite directe topologique de $(f, \underline{F})$; on la note $\varinjlim_{\underline{I}} f$.

4.3 Commutation de la limite directe avec le produit dans Top.

Rappel. Soit X un espace topologique. On désigne par $k(X)$ l'espace obtenu en munissant X de la topologie finale pour les applications continues $K \rightarrow X$, K parcourant les compacts de Top (la correspondance $X \rightarrow k(X)$ est fonctorielle). On dit que X est un k-espace lorsque $k(X) = X$. Si X et Y sont deux k-espaces, on écrit $k(X \times Y) = X \times_k Y$ (k-produit).

Le quotient d'un k-espace est encore un k-espace, ainsi que

son produit par un espace localement compact (cf. [5]).

Remarquons que si X est de Hausdorff, $k(X)$ est l'espace de Kelley attaché à X .

Proposition. Soient $(X, \underline{I})$ et $(Y, \underline{J})$ deux diagrammes dans Top .

a) si Y et $\varinjlim_{\underline{I} \times \underline{J}} X$ sont localement compacts, l'application canonique $\varinjlim_{\underline{I} \times \underline{J}} (X \times Y) \longrightarrow (\varinjlim_{\underline{I}} X) \times (\varinjlim_{\underline{J}} Y)$ est un homéomorphisme.

b) si X et Y sont des k -espaces, l'application canonique $\varinjlim_{\underline{I} \times \underline{J}} (X \times_k Y) \longrightarrow (\varinjlim_{\underline{I}} X) \times_k (\varinjlim_{\underline{J}} Y)$ est un homéomorphisme.

preuve. Il suffit de considérer le carré commutatif ci-dessous, tout en se remémorant que

- a) le produit d'une identification par l'identité d'un espace localement compact est une identification ;
- b) le k -produit de deux identifications de k -espaces est encore une identification (cf. [5]).

$$\begin{array}{ccc}
 X \times Y & \xrightarrow{\quad} & \varinjlim_{\underline{I} \times \underline{J}} (X \times Y) \\
 \varepsilon \times \text{id} \downarrow & & \uparrow \downarrow \\
 (\varinjlim_{\underline{I}} X) \times Y & \xrightarrow{\text{id} \times \varepsilon} & (\varinjlim_{\underline{I}} X) \times (\varinjlim_{\underline{J}} Y)
 \end{array}$$

Corollaire. Soient $(X, \underline{I})$ un diagramme dans Top et Y un espace topologique localement compact. L'application canonique $\varinjlim_{\underline{I}} (X \times Y) \longrightarrow (\varinjlim_{\underline{I}} X) \times Y$ est un homéomorphisme.

4.4 Transitivité de la limite directe dans Top.

Proposition. Soient $\underline{I}$ et $\underline{J}$ deux catégories topologiques, p_1 et p_2 les projections de $\text{Ob}\underline{I} \times \text{Ob}\underline{J}$ sur $\text{Ob}\underline{I}$ et $\text{Ob}\underline{J}$, et $(X, p, \underline{I} \times \underline{J})$ un diagramme dans Top. Supposons que, pour tout $\alpha \in \text{Hom}\underline{I}$ et tout $\beta \in \text{Hom}\underline{J}$, les applications $\tilde{\alpha} = \bigcup_{j \in \text{Ob}\underline{J}} (\alpha, j)$ et $\tilde{\beta} = \bigcup_{i \in \text{Ob}\underline{I}} (i, \beta)$ (induites par les liens du diagramme X) sont continues. On a alors successivement :

- $p_1 p : X \rightarrow \text{Ob}\underline{I}$ (resp. $p_2 p : X \rightarrow \text{Ob}\underline{J}$) est un diagramme dans Top, dont les liens sont les $\tilde{\alpha}$ (resp. $\tilde{\beta}$).
- $\varinjlim_{\underline{I}} X$ (resp. $\varinjlim_{\underline{J}} X$) est un diagramme sur $\underline{J}$ (resp. $\underline{I}$) dont les fibres et liens sont les $\varinjlim_{\underline{I}} X(j)$ et $\varinjlim_{\underline{I}} \tilde{\beta}$ (resp. $\varinjlim_{\underline{J}} X(i)$ et $\varinjlim_{\underline{J}} \tilde{\alpha}$).

$$\text{— } \boxed{\varinjlim_{\underline{I}} \varinjlim_{\underline{J}} X \cong \varinjlim_{\underline{I} \times \underline{J}} X \cong \varinjlim_{\underline{J}} \varinjlim_{\underline{I}} X} .$$

preuve. On contemple le très bel octogone très commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \varinjlim_{\underline{I}} \varinjlim_{\underline{J}} X & \longleftrightarrow & \varinjlim_{\underline{I} \times \underline{J}} X & \longleftrightarrow & \varinjlim_{\underline{J}} \varinjlim_{\underline{I}} X \\
 \uparrow & \nearrow \text{---} & \uparrow & \nwarrow \text{---} & \uparrow \\
 \varinjlim_{\underline{J}} X & \longleftarrow & X & \longrightarrow & \varinjlim_{\underline{I}} X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Ob}\underline{I} & \xleftarrow{p_1} & \text{Ob}\underline{I} \times \text{Ob}\underline{J} & \xrightarrow{p_2} & \text{Ob}\underline{J}
 \end{array}$$

dans lequel toutes les flèches sont canoniques.

Remarque. Les conditions imposées ci-dessus au diagramme $(X, \underline{I} \times \underline{J})$ sont remplies lorsque, par exemple, $\underline{I}$ et $\underline{J}$ sont

discrètes, ou lorsque $(X, \underline{I} \times \underline{J})$ est pull-back par un foncteur $\underline{F} \times \underline{G}$ d'un diagramme $(Y, \underline{K} \times \underline{L})$ remplissant déjà ces conditions.

II. ESPACES SIMPLICIAUX

1. La catégorie $\underline{\Delta}$.

Pour tout entier n non négatif, notons (n) l'ensemble ordonné $\{0 < 1 < \dots < n\}$. Appelons $\underline{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les entiers ≥ 0 , et telle que $\text{Hom}_{\underline{\Delta}}(m, n)$ est l'ensemble des applications croissantes de (m) dans (n) . $\underline{\Delta}$ est une catégorie topologique discrète ; $\text{Hom}_{\underline{\Delta}} = \bigsqcup_{m, n=0}^{\infty} \text{Hom}_{\underline{\Delta}}(m, n)$.

On définit pour tout entier $n \geq 0$ des applications croissantes $\delta_i : (n-1) \rightarrow (n)$ injectives et $\sigma_i : (n+1) \rightarrow (n)$ surjectives, $0 \leq i \leq n$, par :

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Les applications δ_i et σ_i sont appelées faces et dégénérescences (respectivement).

Les relations suivantes, dites simpliciales, sont vérifiées :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} && \text{si } i < j \\ 2) \quad & \sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1} && \text{si } i \leq j \\ 3) \quad & \sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & \text{si } i < j \\ \text{identité} & \text{si } i = j, j+1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & \text{si } i > j+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Rappelons le résultat bien connu (cf. [2]) :

Lemme. Tout $\mu \in \text{Hom}_{\underline{\Delta}}(m, n)$ se décompose dans $\underline{\Delta}$ en $\mu = \delta \sigma$ où δ est injectif et σ surjectif. Plus précisément :

$$\mu = \delta_{i_p} \dots \delta_{i_2} \delta_{i_1} \sigma_{j_1} \sigma_{j_2} \dots \sigma_{j_q}$$

avec $0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, $0 \leq j_1 < \dots < j_q \leq m$, $m-q+p = n$.

Cette décomposition est unique (on notera $\mu \stackrel{!}{=} \delta\sigma$).

Remarques.

a) tout δ injectif de $\text{Hom}_{\underline{\Delta}}$ a une rétraction, et tout σ surjectif une section.

b) pour tout $m \geq 0$, on a une sous-catégorie pleine de $\underline{\Delta}$, notée $\underline{\Delta}|_m$, dont les objets sont $0, 1, \dots, m$. On convient que $\underline{\Delta}|_{\infty} = \underline{\Delta}$.

2. Espaces simpliciaux.

Un espace simplicial X_{Δ} est un foncteur contravariant de $\underline{\Delta}$ dans Top : $n \rightarrow X_n$, $\mu \rightarrow \mu_X$. On peut l'interpréter comme un diagramme sur $\underline{\Delta}^*$ dans Top : $(X_{\Delta}, \underline{\Delta}^*)$ ($\underline{\Delta}^*$ désigne la catégorie opposée à $\underline{\Delta}$; $\text{Ob } \underline{\Delta}^* = \text{Ob } \underline{\Delta}$). Dans ce diagramme, la fibre au dessus de n est X_n ($X_{\Delta} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n$) et les liens sont les μ_X , $\mu \in \text{Hom}_{\underline{\Delta}}$.

Une application simpliciale $f_{\Delta} : X_{\Delta} \rightarrow Y_{\Delta}$ est une transformation naturelle (ou un $\underline{\Delta}^*$ -morphisme), c'est-à-dire une famille d'applications continues $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ telle que $f_m \mu_X = \mu_Y f_n$ pour tout $\mu \in \text{Hom}_{\underline{\Delta}}(m, n)$. Si, pour tout i , f_i est un plongement, on dit que f_{Δ} en est un, et que X_{Δ} est un sous-espace simplicial de Y_{Δ} .

Considérons maintenant les faces et dégénérescences δ_i, σ_i de $\underline{\Delta}$. Si X_{Δ} est un espace simplicial, elles induisent des applications continues δ_{iX}, σ_{iX} que l'on notera d_i, s_i et qu'on nommera encore "faces" et "dégénérescences". On a

à nouveau les "relations simpliciales" (duales de celles de la page 12) :

$$\begin{aligned}
 1) \quad d_i d_j &= d_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\
 2) \quad s_i s_j &= s_{j+1} s_i & \text{si } i \leq j \\
 3) \quad d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ \text{identité} & \text{si } i = j, j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{si } i > j+1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Remarque. Les faces d_i sont surjectives (avec section) et les dégénérescences s_i sont injectives (avec rétraction).

Le lemme page 12 montre que l'espace simplicial X_Δ est complètement déterminé par la donnée des espaces $X_0, X_1, \dots$ et des applications s_i, d_i satisfaisant les relations simpliciales.

Notation. La catégorie dont les objets sont les espaces simpliciaux et dont les morphismes sont les applications simpliciales sera notée Top_Δ .

Lemme. Soit X_Δ un espace simplicial. Tout x de X_Δ s'écrit de manière unique

$$x \stackrel{!}{=} \sigma_X(y)$$

avec $y \in X_\Delta$ non dégénéré (i.e. non dans l'image d'une dégénérescence) et $\sigma \in \text{Hom}_\Delta$ surjectif.

preuve. cf. [2].

Exemples d'espaces simpliciaux.

1) A toute catégorie topologique $\underline{C}$ est associé un espace simplicial, noté $N_{\Delta}\underline{C}$ (nerf de $\underline{C}$), défini par :

- $N_0\underline{C} = \text{Ob}\underline{C}$, $N_1\underline{C} = \text{Hom}\underline{C}$.
- pour tout $n > 1$, $N_n\underline{C}$ est le sous-espace de $(\text{Hom}\underline{C})^n$ formé des suites $(x_1, \dots, x_n)$ telles que $s(x_i) = t(x_{i+1})$.
- $d_0 = s$, $d_1 = t$, $s_0 =$ inclusion de $\text{Ob}\underline{C}$ dans $\text{Hom}\underline{C}$.
- pour tout $n > 1$,

$$d_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) & \text{si } 0 < i < n \\ (x_2, \dots, x_n) & \text{si } i = 0 \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) & \text{si } i = n \end{cases}$$

- pour tout $n \geq 1$,

$$s_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i, \text{id}, x_{i+1}, \dots, x_n) , \quad 0 \leq i \leq n .$$

De même, à un foncteur continu $\underline{F}$ est associée l'application simpliciale $N_{\Delta}\underline{F}$ envoyant $(x_1, \dots, x_n)$ sur $(\underline{F}(x_1), \dots, \underline{F}(x_n))$; le nerf détermine ainsi un plongement plein de Cat dans Top_{Δ} .

2) Espaces simpliciaux constants ou triviaux.

A tout espace topologique X correspond un espace simplicial dit "constant" ou "trivial", encore noté X , donné par le diagramme trivial $\text{Ob}\Delta \times X \longrightarrow \text{Ob}\Delta$. De ce fait, on a $\text{Top} \subset \text{Top}_{\Delta}$.

3) Le m-squelette simplicial $X_{\Delta}^{(m)}$ de X_{Δ} .

Il est obtenu à partir d'un espace simplicial X_{Δ} en posant

$$X_n^{(m)} = X_n \quad \text{si } n \leq m , \quad \text{et, si } p=n-m > 0 ,$$

$$X_n^{(m)} = \bigcup_{i_1 < \dots < i_p} s_{i_p} \dots s_{i_2} s_{i_1} X_m$$

avec la topologie fine pour les inclusions de chaque $s_{i_p} \dots s_{i_1} X_m$.

Comme faces et dégénérescences, on garde celles de X_Δ ou leurs restrictions ; ceci est possible, les relations simpliciales montrant que $s_i X_n^{(m)} \subset X_{n+1}^{(m)}$ et $d_i X_{n+1}^{(m)} \subset X_n^{(m)}$. Vérifions que les nouveaux d_i et s_i sont bien continus pour la topologie fine :

a) continuité de $d_i : X_{n+1}^{(m)} \rightarrow X_n^{(m)}$.

$n \leq m$: clair.

$n > m$: on doit montrer que $d_i : s_{i_{p+1}} \dots s_{i_1} X_m \rightarrow X_n^{(m)}$ est continue ($p = n-m$). la décomposition canonique de $d_i s_{i_{p+1}} \dots s_{i_1}$ étant de la forme $s_{j_p} \dots s_{j_1}$ ou $s_{j_p} \dots s_{j_1} s_{j_0} d_{j_0}$, on a $d_i s_{i_{p+1}} \dots s_{i_1} X_m \subset s_{j_p} \dots s_{j_1} X_m$, donc d_i est continue.

b) continuité de $s_i : X_{n-1}^{(m)} \rightarrow X_n^{(m)}$.

$n \leq m+1$: clair.

$n > m+1$: il suffit de voir que $s_i : s_{i_{p-1}} \dots s_{i_1} X_m \rightarrow X_n^{(m)}$ est continue ($p = n-m$) ; c'est vrai puisque $s_i s_{i_{p-1}} \dots s_{i_1} X_m = s_{j_p} \dots s_{j_1} X_m$ pour certains $j_1 < \dots < j_p$.

On dit qu'un espace simplicial X_Δ est de dimension finie lorsque $X_\Delta^{(m)} = X_\Delta$ pour un $m \geq 0$. La dimension de X_Δ est alors le plus petit m tel que cette condition est remplie.

Remarques.

a) les inclusions $X_\Delta^{(m)} \hookrightarrow X_\Delta^{(m+1)}$ sont continues.

b) si f_Δ est une application simpliciale de X_Δ dans Y_Δ , elle induit, pour tout m , une application simpliciale $f_\Delta^{(m)}$ de $X_\Delta^{(m)}$ dans $Y_\Delta^{(m)}$.

Convention : $X_\Delta^{(\infty)} = X_\Delta$, $f_\Delta^{(\infty)} = f_\Delta$.

c) si X_Δ est de Hausdorff, $X_n^{(m)}$ a la topologie de sous-espace de X_n ; Cela résulte (pour $n > m$) de ce que $s_i X_{n-1}$ est un rétract de $X_n^{(m)}$ et du fait que tout rétract d'un Hausdorff X est un

sous-espace fermé de X .

4) Le n -simplexe simplicial n_Δ .

Soit n un entier ≥ 0 . Pour tout $m \geq 0$ posons $n_m = \text{Hom}_{\underline{\Delta}}(m, n)$; cela définit un espace simplicial discret $n_\Delta = \bigsqcup_{m=0}^{\infty} n_m$, car à tout $\mu \in \text{Hom}_{\underline{\Delta}}(p, q)$ est associée une application $\mu_n : n_q \rightarrow n_p$, $\mu_n(\check{\nu}) = \check{\nu}\mu$ ($\check{\nu} \in n_q$). Notons que n_Δ est de dimension finie n .

Rappelons encore les notions de "somme", "produit" et "produit fibré" dans Top_Δ :

$$(X_\Delta \sqcup Y_\Delta)_n = X_n \sqcup Y_n, \quad \mu_{X \sqcup Y} = \mu_X \sqcup \mu_Y$$

$$(X_\Delta \times Y_\Delta)_n = X_n \times Y_n, \quad \mu_{X \times Y} = \mu_X \times \mu_Y$$

(idem pour des sommes et produits infinis)

$$(X_\Delta \times_{Z_\Delta} Y_\Delta)_n = X_n \times_{Z_n} Y_n, \quad \mu_{X \times_Z Y} = \mu_X \times_{\mu_Z} \mu_Y.$$

3. Limites topologiques dans Top_Δ .

Un espace simplicial peut être vu comme un espace topologique structuré ; on sait donc déjà définir un diagramme $(X, p, \underline{I})$ dans Top_Δ . Introduisons néanmoins la notion plus particulière de diagramme topologique simplicial, en exigeant que, dans le diagramme ci-dessus, X soit lui-même un espace simplicial X_Δ , et que les fibres $X_\Delta(i)$ soient des sous-espaces simpliciaux de X_Δ (p est alors simpliciale). Cela permettra d'assurer dans presque tous les cas l'existence des limites inverse et directe (celles-ci sont définies comme avant).

Remarque.

Un diagramme simplicial $(X_\Delta, p_\Delta, \underline{I})$ détermine une famille

de diagrammes dans Top : $(X_n, p_n, \underline{\underline{I}})$; les μ_X sont alors des $\underline{\underline{I}}$ -morphisms entre ces diagrammes. Notons que p_n est surjective lorsque p l'est.

Proposition. (existence des limites directe et inverse dans Top_Δ)

Soit $(X_\Delta, p_\Delta, \underline{\underline{I}})$ un diagramme topologique simplicial.

a) définissons un espace simplicial L_Δ en posant $L_n = \varinjlim_{\underline{\underline{I}}} X_n$ pour tout $n \geq 0$, et $\mu_L = \varinjlim_{\underline{\underline{I}}} \mu_X$ pour $\mu \in \text{Hom}_\Delta$.

L_Δ est une limite directe du diagramme X_Δ . Notant $L_\Delta = \varinjlim_{\underline{\underline{I}}} X_\Delta$, on a

$$(\varinjlim_{\underline{\underline{I}}} X_\Delta)_n = \varinjlim_{\underline{\underline{I}}} X_n.$$

b) même assertion pour la limite inverse, en supposant $\text{Ob } \underline{\underline{I}}$ localement compact et p_Δ surjective.

preuve.

a) cas de la limite directe.

Soient Y_Δ un diagramme simplicial trivial et $f_\Delta : X_\Delta \rightarrow Y_\Delta$ un $\underline{\underline{I}}$ -morphisme. Comme $L_\Delta = \varinjlim_{\underline{\underline{I}}} X_\Delta$, il existe, pour tout n , une appli-

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\epsilon_n} & L_n \\ X_n & \xrightarrow{(1)} & \downarrow g_n \\ & \xrightarrow{f_n} & Y_n \end{array}$$

cation continue $g_n : L_n \rightarrow Y_n$ telle que le triangle (1) commute (f_n est un $\underline{\underline{I}}$ -morphisme).

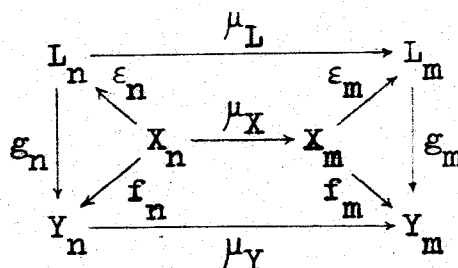
Posons $\epsilon_\Delta = \varinjlim_{n=0}^\infty \epsilon_n$ et $g_\Delta = \varinjlim_{n=0}^\infty g_n$; g_Δ est

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\epsilon_\Delta} & L_\Delta \\ X_\Delta & \xrightarrow{(2)} & \downarrow g_\Delta \\ & \xrightarrow{f_\Delta} & Y_\Delta \end{array}$$

l'unique application continue qui fait com-

muter le triangle (2), et ϵ_Δ est un $\underline{\underline{I}}$ -morphisme, ϵ_n en étant un pour tout n (la simplicialité de ϵ_Δ est automatique).

Reste à voir que g_Δ est simpliciale ; cela découle du diagramme suivant, entièrement commutatif ($\mu \in \text{Hom}_\Delta(m, n)$) :



b) cas de la limite inverse : "idem".

Corollaire. Soit $(f_\Delta, \underline{F})$ un morphisme de diagrammes de $(X_\Delta, p_\Delta, \underline{I})$ vers $(Y_\Delta, p_\Delta, \underline{J})$.

a) l'application simpliciale $g_\Delta : \varinjlim_{\underline{I}} X_\Delta \longrightarrow \varinjlim_{\underline{J}} Y_\Delta$ telle que $g_n = \varinjlim_{\underline{F}} f_n$ est une limite directe de f_Δ , notée $\varinjlim_{\underline{F}} f_\Delta$.

b) idem pour la limite inverse, en supposant $\underline{I} = \underline{J}$, $\text{Ob } \underline{I}$ localement compact, p_Δ et q_Δ surjectives.

Cas particulier de limite inverse : soient X_Δ et Y_Δ deux espaces simpliciaux non vides. Considérons le diagramme $(X_\Delta \sqcup Y_\Delta, p, \underline{\text{Id}}\{0,1\})$, $p^{-1}(0) = X_\Delta$, $p^{-1}(1) = Y_\Delta$; la proposition ci-dessus montre que sa limite inverse est le produit simplicial $X_\Delta \times Y_\Delta$.

4. Le théorème.

4.1 Soit G un foncteur covariant de $\underline{\Delta}$ dans Top . Un point v de $G(n)$ est dit intérieur s'il n'est pas de la forme $v = G(\delta)(u)$ avec $\delta \in \text{Hom } \underline{\Delta}$ injectif, $\delta \neq \text{id}$. On a un lemme analogue à celui de la page 14 : tout $u \in G(n)$ s'écrit de manière unique $u \doteq G(\delta)(v)$ avec v intérieur et δ injectif.

Soit X_Δ un espace simplicial. Sur $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times G(n)$ on considère l'équivalence $\sim$ engendrée par les relations

$$(\mu_X(x), u) \sim (x, G(\mu)(u)), \mu \in \text{Hom } \underline{\Delta}.$$

La classe d'équivalence de (x,u) sera notée $|x,u|$. On dit que (x,u) est non dégénéré si x l'est et si u est intérieur.

Lemme. Toute classe $|x,u|$ de $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times G(n) / \sim$ a un unique représentant (y,v) non dégénéré.

preuve. cf. [2]. (y,v) est obtenu de la manière suivante : on a $u \stackrel{!}{=} G(\delta)(w)$ et $\delta_X(x) \stackrel{!}{=} \sigma_X(y)$ avec δ injectif, σ surjectif, w intérieur et y non dégénéré ; alors :

$$(x,u) \sim (\delta_X(x), w) \sim (y, G(\sigma)(w)) = (y,v) .$$

Remarquons que, si $(x,u) \in X_n \times G(n)$, alors $(y,v) \in X_k \times G(k)$ pour un $k \leq n$.

Corollaire. Quel que soit $0 \leq m \leq \infty$, la relation d'équivalence "tronquée" $\sim^m$ sur le sous-espace $\bigsqcup_{n=0}^m X_n \times G(n)$ de $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times G(n)$, définie comme $\sim$, coïncide avec la relation induite par $\sim$.

4.2 Soit X_Δ un espace simplicial ; associons lui une catégorie topologique $\underline{X}$: $Ob \underline{X} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n$, $Hom \underline{X} = \bigsqcup_{p,n=0}^{\infty} X_n \times n_p$, $s(x,\mu) = \mu_X(x)$, $t(x,\mu) = x$, et $(x,\mu)(y,\nu) = (x,\mu\nu)$ si $\mu_X(x) = y$ ($Ob \underline{X}$ est identifié au sous-espace $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \{id_n\}$ de $Hom \underline{X}$). De même, si $f_\Delta : X_\Delta \rightarrow Y_\Delta$ est simpliciale, il lui correspond un foncteur continu $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ donné par $\underline{f}(x,\mu) = (f_\Delta(x), \mu)$ ($\underline{f}(x) = x$ si $x \in Ob \underline{X}$).

On définit pareillement, pour tout $m \geq 0$, la catégorie topologique $\underline{X}|_m$ telle que $Ob \underline{X}|_m = \bigsqcup_{n=0}^m X_n$ et $Hom \underline{X}|_m = \bigsqcup_{p,n=0}^m X_n \times n_p$. L'application simpliciale f_Δ induit alors un foncteur $\underline{f}|_m$ de $\underline{X}|_m$ dans $\underline{Y}|_m$. On convient que $\underline{X}|_\infty = \underline{X}$ et $\underline{f}|_\infty = \underline{f}$.

Envisageons maintenant, pour tout $0 \leq m \leq \infty$, le foncteur de $\underline{\Delta}|_m$ dans Top_Δ envoyant n sur n_Δ et μ sur l'application simpliciale μ_Δ , $\mu_\Delta(\check{\nu}) = \mu\check{\nu}$; il définit un diagramme simplicial $(\bigsqcup_{n=0}^m n_\Delta, \underline{\Delta}|_m)$, dont le pull-back par le foncteur continu $\underline{F}|_m : \underline{X}|_m \longrightarrow \underline{\Delta}|_m$, $\underline{F}|_m(x, \mu) = \mu$ ($\underline{F}|_m(x) = \frac{x}{n}$ si $x \in X_n$), est fort intéressant :

Théorème. Soit X_Δ un espace simplicial. Pour tout $0 \leq m \leq \infty$,

on a

$$X_\Delta^{(m)} \cong \varinjlim_{\underline{X}|_m} (\text{Ob } \underline{X}|_m \times \bigsqcup_{n=0}^m n_\Delta)$$

preuve. Appelant K_Δ l'espace simplicial de droite dans l'égalité ci-dessus, on a, quel que soit $k \geq 0$,

$$K_k = \bigsqcup_{n=0}^m X_n \times n_k / \sim$$

où $\sim$ est l'équivalence engendrée par les relations

$$(\mu_X(x), \check{\nu}) \sim (x, \mu\check{\nu}), \quad \mu \in \text{Hom } \underline{\Delta}.$$

On note $|x, \check{\nu}|$ la classe d'un élément $(x, \check{\nu})$ dans ce quotient.

Remarque : les résultats du § 4.1 s'appliquent ici ($G(n) = n_k$, $G(\mu) = \mu_k$).

Soit h_Δ l'application continue canonique de K_Δ dans $X_\Delta^{(m)}$: $h_\Delta |x, \check{\nu}| = \check{\nu}_X(x)$. Elle est bien définie et simpliciale car, si $\mu \in \text{Hom } \underline{\Delta}$, $h_\Delta |\mu_X(x), \check{\nu}| = (\mu\check{\nu})_X(x) = h_\Delta |x, \mu\check{\nu}|$ et $\mu_X h_\Delta |x, \check{\nu}| = (\check{\nu}\mu)_X(x) = h_\Delta |x, \check{\nu}\mu| = h_\Delta \mu_K |x, \check{\nu}|$. Il s'agit de construire un inverse g_Δ de h_Δ : soit $x \in X_K^{(m)}$. x peut s'écrire $x = \mu_X(y)$, où $y \in X_n$, $n \leq m$, et $\mu \in \text{Hom } \underline{\Delta}$. On pose $g_\Delta(x) = |y, \mu|$, ce qui a un sens car, si $x = \mu'_X(y')$, $|y', \mu'| = |\mu'_X(y'), \text{id}| = |x, \text{id}| = |y, \mu|$ (voir corollaire p.20 : $\sim^m$ coïncide avec $\sim$).

$$h_\Delta g_\Delta = \text{id} : \quad h_\Delta g_\Delta(x) = h_\Delta |y, \mu| = \mu_X(y) = x.$$

$$g_\Delta h_\Delta = \text{id} : g_\Delta h_\Delta |x, \vee| = g_\Delta(\vee_X(x)) = g_\Delta((\mu\vee)_X(y)) = \\ = |y, \mu\vee| = |x, \vee| .$$

Continuité de g_k : pour $k \leq m$ c'est évident, puisque $g_k(x) = |x, \text{id}_k|$. Si $k > m$, il suffit de montrer, par définition de la topologie de $X_k^{(m)}$, que g_k est continue sur chaque sous-espace de la forme $s_{i_p} \dots s_{i_1} X_m$ ($p=k-m$, $i_1 < \dots < i_p$). C'est bien le cas, car $g_k(x) = g_k(s_{i_p} \dots s_{i_1} y) = |y, \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p}| = |d_{i_1} \dots d_{i_p} x, \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p}|$.

$$g_\Delta \text{ est simpliciale} : g_\Delta \vee_X(x) = g_\Delta \vee_X(\mu_X(y)) = |y, \mu\vee| = \\ = \vee_K |y, \mu| = \vee_K g_\Delta(x) . \quad \text{q.e.d.}$$

La version de ce théorème pour les applications simpliciales est la suivante : soit f_Δ de X_Δ dans Y_Δ simpliciale. On a un morphisme de diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob}X|_m \quad \text{Ob}\Delta|_m \quad \begin{array}{c} \boxed{m} \\ n=0 \end{array} n_\Delta & \xrightarrow{\underline{f}|_m \times \text{id}_\Delta} & \text{Ob}Y|_m \quad \text{Ob}\Delta|_m \quad \begin{array}{c} \boxed{m} \\ n=0 \end{array} n_\Delta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ob}X|_m & \xrightarrow{\underline{f}|_m} & \text{Ob}Y|_m \end{array}$$

Alors, quel que soit $0 \leq m \leq \infty$,

$$\boxed{f_\Delta^{(m)} \cong \varinjlim_{\underline{f}|_m} (\underline{f}|_m \times \text{id}_\Delta)}$$

En d'autres termes, $f_\Delta^{(m)} |x, \mu| \cong |f_\Delta(x), \mu|$ (" $\cong$ " signifiant une égalité modulo l'isomorphisme de la page précédente).

III. B-CONSTRUCTION

1. Le foncteur B.

Dans ce qui suit, Δ^n désignera le n-simplexe géométrique, c'est-à-dire le sous-espace de $[0,1]^{n+2}$ formé des $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n+1})$ tels que $0 = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} = 1$.

Si $\mu \stackrel{!}{=} \delta_{i_p} \dots \delta_{i_1} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_q} \in \text{Hom}_{\underline{\Delta}}(m, n)$, $\Delta\mu$ sera l'application continue $\Delta\delta_{i_p} \dots \Delta\delta_{i_1} \Delta\sigma_{j_1} \dots \Delta\sigma_{j_q} : \Delta^m \rightarrow \Delta^n$, les $\Delta\delta_i : \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$ et $\Delta\sigma_i : \Delta^{k+1} \rightarrow \Delta^k$ étant définis, pour tout $0 \leq i \leq k$, par

$$\Delta\delta_i(u_0, \dots, u_k) = (u_0, \dots, u_i, u_i, \dots, u_k)$$

$$\Delta\sigma_i(u_0, \dots, u_{k+2}) = (u_0, \dots, u_i, u_{i+2}, \dots, u_{k+2}).$$

On a ainsi un foncteur covariant de $\underline{\Delta}$ dans Top.

* Les $\Delta\delta_i$ et $\Delta\sigma_i$ seront abrégés δ_i et σ_i *

D'autre part, quand on dira qu'un espace simplicial X_Δ a une certaine propriété topologique, c'est que chaque X_n l'aura.

Théorème. Il existe un foncteur covariant $B : \text{Top}_\Delta \rightarrow \text{Top}$, unique à isomorphisme naturel près, satisfaisant les trois "axiomes" suivants :

$$(B1) \quad B\eta_\Delta \cong \Delta^n \quad (B\mu_\Delta \cong \Delta\mu)$$

$$(B2) \quad B(X \times_Z Y_\Delta) \cong X \times_Z BY_\Delta \quad (B(f \times_h g_\Delta) \cong f \times_h Bg_\Delta)$$

où Z est de Hausdorff, et soit X est localement compact, soit Y_Δ est compact de dimension finie (X et Z sont des espaces simpliciaux constants).

$$(B3) \quad B(\varinjlim_{\underline{I}} X_\Delta) \cong \varinjlim_{\underline{I}} BX_\Delta \quad (B(\varinjlim_{\underline{F}} f_\Delta) \cong \varinjlim_{\underline{F}} Bf_\Delta)$$

où soit $\underline{I}$ est de Hausdorff, soit le diagramme $(X_\Delta, \underline{I})$ est pull-

back d'un diagramme $(Y_\Delta, \underline{J})$ avec $\underline{J}$ de Hausdorff et Y_Δ compact de dimension finie.

Précisions sur le sens des axiomes.

a) Le symbole " $\cong$ " désigne un isomorphisme naturel de foncteurs ; on pourrait formuler les trois axiomes de la manière suivante :

$$(B1) \quad B \circ G \cong G'$$

$$(B2) \quad B \circ H \cong H' \circ (\text{id} \times \text{id} \times B)$$

$$(B3) \quad B \circ \underline{\lim} \cong \underline{\lim} \circ B$$

G, G', H, H' étant les foncteurs définis par

$$- G : \underline{\Delta} \rightarrow \text{Top}_\Delta ; \quad G(n) = n_\Delta, \quad G(\mu) = \mu_\Delta$$

$$G' : \underline{\Delta} \rightarrow \text{Top} ; \quad G'(n) = \Delta^n, \quad G'(\mu) = \Delta\mu$$

$$- H(X, Z, Y_\Delta) = X \times_Z Y_\Delta, \quad H(f, h, g_\Delta) = f \times_h g_\Delta$$

$$H'(X, Z, Y) = X \times_Z Y, \quad H'(f, h, g) = f \times_h g$$

(les domaines de définition de H, H' et $\underline{\lim}$ dépendent des hypothèses accompagnant chaque axiome).

b) Pour que l'axiome (B2) ait un sens, il faut que, étant donnée une application simpliciale $q_\Delta : Y_\Delta \rightarrow Z$, l'on puisse lui faire correspondre canoniquement une application continue $BY_\Delta \rightarrow Z$. Si $Z = \Delta^0$, ce n'est pas un grand problème ; si de plus $Y_\Delta = o_\Delta$, (B1) et (B2) donnent $B(X \times o_\Delta) \cong X \times \Delta^0$, donc $BX \cong X$ pour tout espace simplicial constant X (de même $Bf \cong f$ pour toute application continue f). Ainsi q_Δ induit $Bq_\Delta : BY_\Delta \rightarrow Z \cong BZ$, ce qui donne un sens à (B2) dans tous les cas.

c) Pour que (B3) ait un sens, il faut montrer que si $(X_\Delta, p_\Delta, \underline{I})$ est un diagramme avec $\underline{I}$ de Hausdorff, ou si c'est un pull-back de $(Y_\Delta, q_\Delta, \underline{J})$, avec $\underline{J}$ de Hausdorff et Y_Δ compact de dimension finie, alors $Bp_\Delta : BX_\Delta \rightarrow BOb\underline{I} \cong Ob\underline{I}$ est encore un diagramme.

Dans le premier cas ($\underline{I}$ de Hausdorff), $X_\Delta(i)$ étant le produit fibré $\{i\} \hookrightarrow Ob\underline{I} \leftarrow X_\Delta$, on a, par (B2) - $\{i\}$ localement compact - que $BX_\Delta(i)$ est le produit fibré $\{i\} \hookrightarrow Ob\underline{I} \leftarrow BX_\Delta$, c'est-à-dire que $Bp_\Delta^{-1}(i) \cong BX_\Delta(i)$, ou $(BX_\Delta)(i) \cong BX_\Delta(i)$. On obtient alors un diagramme $(BX_\Delta, Bp_\Delta, \underline{I})$ en prenant pour liens les $B\tilde{\alpha}_\Delta$, $\tilde{\alpha}_\Delta$ étant un lien du diagramme initial.

Remarque : on a prouvé au passage que

B commute avec la somme $\square$

(car une somme d'espaces simpliciaux est un diagramme sur une catégorie discrète).

Dans le second cas, on sait, par (B2), que $BX_\Delta \cong Ob\underline{I} \times_{Ob\underline{J}} BY_\Delta$; de plus Bp_Δ est la projection sur le facteur $Ob\underline{I}$ (prendre dans (B2) $f=id$, $Z=\Delta^0$ et $q_\Delta: Y_\Delta \rightarrow \Delta^0$). Ainsi $(BX_\Delta, Bp_\Delta, \underline{I})$ est bien un diagramme : c'est un pull-back de $(BY_\Delta, Bq_\Delta, \underline{J})$, celui-ci étant un diagramme en vertu du premier cas.

Commentaire. Le théorème ci-dessus, dont la preuve est l'objet ^{fait} des deux paragraphes suivants, permet de définir (à isomorphisme naturel près) la "B-construction" en donnant sa valeur sur les n-simplexes simpliciaux et en lui imposant certaines propriétés de commutation avec le produit fibré et la limite directe topologique.

2. Unicité du foncteur B.

Soit X_Δ un espace simplicial et m un entier ≥ 0 .

Appliquant le théorème de la page 21 ainsi que les trois axiomes (l'espace simplicial $\bigsqcup_{n=0}^m n_\Delta$ est compact de dimension finie), on obtient successivement

$$\begin{aligned} BX_\Delta^{(m)} &\cong B \varinjlim_{\underline{X}|_m} (Ob \underline{X}|_m \times_{Ob \underline{\Delta}|_m} \bigsqcup_{n=0}^m n_\Delta) \cong \varinjlim_{\underline{X}|_m} B(Ob \underline{X}|_m \times_{Ob \underline{\Delta}|_m} \bigsqcup_{n=0}^m n_\Delta) \\ &\cong \varinjlim_{\underline{X}|_m} (Ob \underline{X}|_m \times_{Ob \underline{\Delta}|_m} B \bigsqcup_{n=0}^m n_\Delta) \cong \varinjlim_{\underline{X}|_m} (Ob \underline{X}|_m \times_{Ob \underline{\Delta}|_m} \bigsqcup_{n=0}^m \Delta^n). \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$BX_\Delta^{(m)} \cong \bigsqcup_{n=0}^m X_n \times \Delta^n / \sim \quad (*)$$

où $\sim$ est l'équivalence engendrée par les relations

$$(\mu_X(x), u) \sim (x, \Delta \mu(u)), \quad \mu \in \text{Hom} \underline{\Delta}.$$

De même, si f_Δ est une application simpliciale de X_Δ dans Y_Δ ,

$$Bf_\Delta^{(m)} \cong B \varinjlim_{\underline{f}|_m} (f|_m \times id_\Delta) \cong \varinjlim_{\underline{f}|_m} B(f|_m \times id_\Delta) \cong \varinjlim_{\underline{f}|_m} (f|_m \times id),$$

c'est-à-dire, notant $|x, u|$ la classe de (x, u) dans le quotient $\bigsqcup_{n=0}^m X_n \times \Delta^n / \sim$,

$$Bf_\Delta^{(m)} |x, u| \cong |f_\Delta(x), u| \quad (**)$$

Soit maintenant $(\bigsqcup_{m=0}^\infty X_\Delta^{(m)}, \underline{\mathbb{N}})$ le diagramme canonique dont les liens sont les inclusions continues $i_\Delta : X_\Delta^{(p)} \hookrightarrow X_\Delta^{(q)}$, $p \leq q$. On a évidemment $X_\Delta \cong \varinjlim_{\underline{\mathbb{N}}} \bigsqcup_{m=0}^\infty X_\Delta^{(m)}$. Réutilisant (B3) - et (B2) - on trouve $BX_\Delta \cong \varinjlim_{\underline{\mathbb{N}}} \bigsqcup_{m=0}^\infty BX_\Delta^{(m)}$, ce qui donne explicitement BX_Δ si l'on sait calculer les liens Bi_Δ du diagramme $(\bigsqcup_{m=0}^\infty BX_\Delta^{(m)}, \underline{\mathbb{N}})$; la relation (**) et le fait que $(X_\Delta^{(p)})^{(q)} = X_\Delta^{(p)}$ pour $p \leq q$ impliquent $Bi_\Delta |x, u| \cong |x, u|$.

Ainsi BX_Δ est bien déterminé par les trois axiomes :

d'après (*), et en se rappelant du corollaire page 20, on a

$$BX_{\Delta} \cong \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n / \sim$$

où $\sim$ est l'équivalence engendrée par les relations

$$(\mu_X(x), u) \sim (x, \Delta\mu(u)) \quad , \quad \mu \in \text{Hom}_{\underline{\Delta}}$$

Trouvons encore l'expression de Bf_{Δ} : $Bf_{\Delta} \cong B \varinjlim_{\mathbb{N}} \bigsqcup_{m=0}^{\infty} f_{\Delta}^{(m)} \cong \varinjlim_{\mathbb{N}} Bf_{\Delta}^{(m)}$. D'où, par (**),

$$Bf_{\Delta}|x, u| \cong |f_{\Delta}(x), u| \quad .$$

Remarque. Si, dans l'énoncé du théorème, on remplace "de Hausdorff" par "discret" (ou "discrète"), on a encore l'unicité.

3. Existence du foncteur B.

Posons, pour tout espace simplicial X_{Δ} et toute application simpliciale f_{Δ}

$$BX_{\Delta} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n / \sim \quad Bf_{\Delta}|x, u| = |f_{\Delta}(x), u|$$

(notations du paragraphe précédent), et montrons qu'on définit ainsi un foncteur covariant $B : \text{Top}_{\Delta} \longrightarrow \text{Top}$ satisfaisant (B1), (B2) et (B3) .

a) Fonctorialité : clair.

b) $Bn_{\Delta} \cong \Delta^n$.

Soit f l'application canonique de $Bn_{\Delta} = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} n_k \times \Delta^k / \sim$ dans Δ^n envoyant $|\mu, u|$ sur $\Delta\mu(u)$. Elle est bien définie, car $f|\sqrt{n}(\mu), u| = \Delta(\sqrt{\mu})(u) = f|\mu, \Delta\sqrt{(u)}|$, et évidemment continue. Elle est bijective : on obtient un inverse g en posant $g(u) = |\text{id}_n, u|$. Il suffit maintenant de montrer que $\bigsqcup_{k=0}^{\infty} n_k \times \Delta^k / \sim$ est compact pour que f soit un homéomorphisme ; c'est le corollaire du lemme suivant, qu'on réutilisera d'ailleurs plus tard.

Lemme. Soit X_Δ un espace simplicial. Pour tout $m \geq 0$, on a

$$BX_\Delta^{(m)} \cong \bigsqcup_{n=0}^m X_n \times \Delta^n / \sim$$

preuve. Construisons un inverse g pour l'application continue canonique $f : \bigsqcup_{n=0}^m X_n \times \Delta^n / \sim \longrightarrow \bigsqcup_{n=0}^\infty X_n^{(m)} \times \Delta^n / \sim$. Tout $x \in X_n^{(m)}$ peut s'écrire $x = \mu_X(y)$ où $y \in X_k$, $k \leq m$, et $\mu \in \text{Hom} \Delta$. On pose $g|x, u| = |y, \Delta\mu(u)|$, ce qui a un sens puisque $g|\nu_X(x), u| = g|(\mu\nu)_X(y), u| = |y, \Delta(\mu\nu)(u)| = g|x, \Delta\nu(u)|$, et, si $x = \mu'_X(y')$, $(y', \Delta\mu'(u)) \sim (x, u) \sim (y, \Delta\mu(u))$ (on se sert ici du corollaire p.20). On voit que $fg = \text{id}$ et $gf = \text{id}$. La continuité de g se démontre comme au théorème de la page 21.

Corollaire.

Si X_Δ est compact de dimension finie, alors BX_Δ est compact.

preuve. $BX_\Delta \cong \bigsqcup_{n=0}^m X_n \times \Delta^n / \sim$ pour un entier m ; c'est donc le quotient d'un compact. Reste à voir que ce quotient est de Hausdorff. Pour cela, il suffit de montrer que le saturé par $\sim$ d'un compact de $\bigsqcup_{n=0}^m X_n \times \Delta^n$ est encore compact (cf. [4]).

Soit K un compact contenu dans $X_n \times \Delta^n$. Posons

$$A_i = (d_i \times \sigma_i)^{-1}(K) \cap (s_i X_n \times \Delta^{n+1})$$

$$B_i = (d_i \times \delta_i^{-1})^{-1}(K) \cap (X_{n+1} \times \delta_i \Delta^n)$$

$$C_i = d_i \times \sigma_i(K \cap (s_i X_{n-1} \times \Delta^n))$$

$$D_i = d_i \times \delta_i^{-1}(K \cap (X_n \times \delta_i \Delta^{n-1}))$$

et $A = \bigcup_{i=0}^n A_i$, $B = \bigcup_{i=0}^{n+1} B_i$, $C = \bigcup_{i=0}^{n-1} C_i$, $D = \bigcup_{i=0}^n D_i$. On constate

que $A \cup B$ (resp. $C \cup D$) est l'ensemble des points de $X_{n+1} \times \Delta^{n+1}$ (resp. $X_{n-1} \times \Delta^{n+1}$) élémentairement équivalents à des points

de K (les équivalences de la forme $(s_i(x), u) \sim (x, \sigma_i(u))$ et $(x, \delta_i(u)) \sim (d_i(x), u)$ sont dites "élémentaires"). Dès lors la conclusion s'impose, si l'on remarque que deux points de $\bigsqcup_{n=0}^m X_n \times \Delta^n$ sont équivalents ssi ils sont reliés par une suite finie d'équivalences élémentaires, et que ces suites sont ici en nombre fini.

$$c) \quad Bn_\Delta \cong \Delta^\mu .$$

Modulo l'homéomorphisme $Bn_\Delta \cong \Delta^n$ on a, pour $u \in \Delta^n$,
 $B\mu_\Delta(u) = B\mu_\Delta |id_n, u| = |\mu, u| = \Delta\mu(u) .$

d) $B(X \times_Z Y_\Delta) \cong X \times_Z BY_\Delta$, où Z est de Hausdorff, et soit X est localement compact, soit Y_Δ est compact de dimension finie.

Montrons tout d'abord que, dans ces conditions, la bijection continue canonique de $B(X \times Y_\Delta) = (X \times \bigsqcup_{n=0}^\infty Y_n \times \Delta^n) / id \times \sim$ dans $X \times BY_\Delta = X \times (\bigsqcup_{n=0}^\infty Y_n \times \Delta^n / \sim)$ est un homéomorphisme. Si X est localement compact, cela résulte de ce que le produit d'une identification par l'identité d'un espace localement est encore une identification. Lorsque Y_Δ est compact de dimension finie, l'inverse de cette bijection est induit par l'application continue canonique $X \times \bigsqcup_{n=0}^m Y_n \times \Delta^n \longrightarrow B(X \times Y_\Delta)$ (cf. lemme p.28) ; il est donc continu, car, $\bigsqcup_{n=0}^m Y_n \times \Delta^n$ et BX_Δ étant compacts, l'application quotient de $\bigsqcup_{n=0}^\infty Y_n \times \Delta^n$ sur BX_Δ est propre (c'est-à-dire que son produit par toute identité est une application fermée. cf. [4]).

Passons à la commutation avec le produit fibré. Elle va découler des lemmes suivants :

Lemme 1. Si K_Δ est un sous-espace simplicial ouvert ou fermé de X_Δ , et si son complémentaire dans X_Δ est encore un sous-espace simplicial, alors l'injection continue canonique $BK_\Delta \hookrightarrow BX_\Delta$ est un plongement.

preuve. Montrons d'abord que si une partie A de $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} K_n \times \Delta^n$ est saturée pour la relation $\sim_K$, elle l'est encore dans $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n$ pour $\sim_X$. Soient $(x,u) \in \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n$ et (y,v) l'unique point non dégénéré équivalent à (x,u) pour $\sim_X$. Si x est dans K_Δ , on voit facilement que y l'est aussi ; idem si x est dans le complément de K_Δ , puisque c'est aussi un sous-espace simplicial. Cela suffit à prouver que A est saturée pour $\sim_X$. Si maintenant A est un ouvert (resp. fermé) de $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} K_n \times \Delta^n$, et si K_Δ est supposé ouvert (resp. fermé) dans X_Δ , alors A est ouvert (resp. fermé) dans $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n$, puisque $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} K_n \times \Delta^n$ l'est. Ainsi les ouverts (resp. fermés) saturés de $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} K_n \times \Delta^n$ sont des ouverts (resp. fermés) saturés de $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n$; donc $BK_\Delta \hookrightarrow BX_\Delta$ est un plongement.

Lemme 2. Soient $f_\Delta, g_\Delta : X_\Delta \rightarrow Y_\Delta$ deux applications simpliciales, X_Δ et Y_Δ étant quelconques, et K_Δ l'égalisateur de (f_Δ, g_Δ) , c'est-à-dire le sous-espace simplicial de X_Δ formé des x tels que $f_\Delta(x) = g_\Delta(x)$.

Alors, si l'injection canonique $BK_\Delta \hookrightarrow BX_\Delta$ est un plongement, BK_Δ s'identifie à l'égalisateur de (Bf_Δ, Bg_Δ) .

preuve. Appelons E l'égalisateur de (Bf_Δ, Bg_Δ) . Soit $|x,u| \in BK_\Delta$; $Bf_\Delta |x,u| = |f_\Delta(x), u| = |g_\Delta(x), u| = Bg_\Delta |x,u|$, donc $BK_\Delta \subset E$ (modulo

le plongement canonique). Inversement, soit $|x, u| \in E$, u étant supposé intérieur - ce qui n'est pas une restriction. $|f_\Delta(x), u| = |g_\Delta(x), u|$ implique qu'il existe $\sigma, \tau \in \text{Hom} \underline{\Delta}$ surjectives et $y \in Y_\Delta$ non dégénéré tels que $f_\Delta(x) = \sigma_Y(y)$, $g_\Delta(x) = \tau_Y(y)$ et $\Delta\sigma(u) = \Delta\tau(u)$. Il est facile de voir que, si $\Delta\sigma$ et $\Delta\tau$ coïncident sur un point intérieur, alors $\sigma = \tau$. Ainsi $f_\Delta(x) = g_\Delta(x)$, d'où $E \subset BK_\Delta$.

Achevons maintenant la preuve du point d). $X \times_Z Y_\Delta$ est un égalisateur : $X \times_Z Y_\Delta \subset X \times Y_\Delta \rightrightarrows Z$; il est donc fermé dans $X \times Y_\Delta$, puisque Z est supposé de Hausdorff. De plus, le complément de $X \times_Z Y_\Delta$ dans $X \times Y_\Delta$ est un sous-espace simplicial de $X \times Y_\Delta$ (vérification facile). Le lemme 1 est alors applicable : l'injection canonique $B(X \times_Z Y_\Delta) \hookrightarrow B(X \times Y_\Delta)$ est un plongement. A son tour le lemme 2 dit que $B(X \times_Z Y_\Delta)$ s'identifie à l'égalisateur de $B(X \times Y_\Delta) \rightrightarrows BZ$, donc ici à celui de $X \times BY_\Delta \rightrightarrows Z$, qui est $X \times_Z Y_\Delta$. C'est le résultat attendu.

$$e) \quad B(f \times_h g_\Delta) \cong f \times_h Bg_\Delta.$$

$$\begin{aligned} B(f \times_h g_\Delta) |x, y, u| &= |f(x), g_\Delta(y), u| \cong (f(x), |g_\Delta(y), u|) = \\ &= f \times_h Bg_\Delta(x, |y, u|) \cong f \times_h Bg_\Delta |x, y, u|. \end{aligned}$$

f) $B(\varinjlim_{\underline{I}} X_\Delta) \cong \varinjlim_{\underline{I}} BX_\Delta$ si $\underline{I}$ est de Hausdorff, ou si $(X_\Delta, \underline{I})$ est pull-back d'un diagramme $(Y_\Delta, \underline{J})$ avec $\underline{J}$ de Hausdorff et Y_Δ compact de dimension finie.

Rappelons tout d'abord que les hypothèses ci-dessus donnent un sens à l'expression $\varinjlim_{\underline{I}} BX_\Delta$: elles assurent que, si

$\alpha \in \text{Hom}_{\underline{\mathbb{I}}}(i, j)$, l'application $B\tilde{\alpha}_\Delta : BX_\Delta(i) \rightarrow BX_\Delta(j)$ est continue pour les topologies de sous-espace de BX_Δ (cf. p.25); en fait l'assertion f) est vraie dès que cette condition est réalisée (c'est par exemple le cas lorsque les points de $\text{Ob}\underline{\mathbb{I}}$ sont fermés, en vertu du lemme 1 p.30).

Preuve de f) : soient $\varepsilon_\Delta : X_\Delta \rightarrow \varinjlim X_\Delta$ et $\varepsilon : BX_\Delta \rightarrow \varinjlim BX_\Delta$ les $\underline{\mathbb{I}}$ -morphismes canoniques. On contemple le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & BX_\Delta & \xrightarrow{\varepsilon} & \varinjlim BX_\Delta \\
 & \nearrow \varepsilon|, | & & \searrow B\varepsilon_\Delta & \uparrow f \\
 \bigsqcup_{n=0}^\infty X_n \times \Delta^n & & & & \varinjlim BX_\Delta \\
 & \searrow \varepsilon_n \times \text{id} & & \nearrow \omega & \downarrow g \\
 & & \bigsqcup_{n=0}^\infty (\varinjlim X_\Delta)_n \times \Delta^n & \xrightarrow{|, |} & B(\varinjlim X_\Delta)
 \end{array}$$

où ω , f et g sont construites de la manière suivante :

— g est l'unique application continue telle que $g\varepsilon = B\varepsilon_\Delta$.

g existe : soit en effet $\alpha \in \text{Hom}_{\underline{\mathbb{I}}}(i, j)$ et $|x, u| \in BX_\Delta(i)$. alors $B\varepsilon_\Delta(B\tilde{\alpha}_\Delta|x, u|) = B\varepsilon_\Delta|\tilde{\alpha}_\Delta(x), u| = |\varepsilon_\Delta \tilde{\alpha}_\Delta(x), u| = |\varepsilon_\Delta(x), u| = B\varepsilon_\Delta|x, u|$, i.e. $B\varepsilon_\Delta$ est un $\underline{\mathbb{I}}$ -morphisme, d'où g .

— ω est donnée par ses restrictions ω_n aux sous-espaces $(\varinjlim X_\Delta)_n \times \Delta^n$: ω_n est l'unique application continue qui fait commuter le triangle

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\varepsilon|, |} & \varinjlim BX_\Delta \\
 X_n \times \Delta^n & & \uparrow \omega_n \\
 & \xrightarrow{\varepsilon_n \times \text{id}} & (\varinjlim X_\Delta)_n \times \Delta^n
 \end{array}$$

Existence de ω_n : soient $\alpha \in \text{Hom}_{\underline{\mathbb{I}}}(i, j)$ et $(x, u) \in X_n(i) \times \Delta^n$; $\varepsilon|\tilde{\alpha}_\Delta(x), u| = \varepsilon(B\tilde{\alpha}_\Delta|x, u|) = \varepsilon|x, u|$, donc $\varepsilon|, |$ est un

$\underline{\underline{I}}$ -morphisme. De plus $(\varinjlim X_n) \times \Delta^n \cong \varinjlim (X_n \times \Delta^n)$ puisque Δ^n est compact ; d'où ω_n .

— f est obtenue par passage au quotient de $\omega : f|y,u| = \omega(y,u)$.

Cela a bien un sens, car $\omega((\varinjlim \mu_X)(y),v) = \omega(y,\Delta\mu(v))$ pour $\mu \in \text{Hom}_{\underline{\underline{A}}}(\underline{m},\underline{n})$, $y \in \varinjlim X_n$ et $v \in \Delta^m$; soit en effet $x \in X_n$ tel que $y = \varepsilon_n(x)$. Alors $\omega((\varinjlim \mu_X)(y),v) = \omega(\varepsilon_n \mu_X(x),v) = \varepsilon| \mu_X(x),v| = \varepsilon|x,\Delta\mu(v)| = \omega(\varepsilon_n(x),\Delta\mu(v)) = \omega(y,\Delta\mu(v))$.

f et g sont continues et vérifient $fg = \text{id}$, $gf = \text{id}$.

$$g) \quad B(\varinjlim_{\underline{\underline{F}}} f_\Delta) \cong \varinjlim_{\underline{\underline{F}}} Bf_\Delta.$$

$$\begin{aligned} & \text{Avec les notations ci-dessus, } B(\varinjlim_{\underline{\underline{F}}} f_\Delta)(B\varepsilon_\Delta|x,u|) = \\ & = |\varepsilon_\Delta f_\Delta(x),u| = B\varepsilon_\Delta|f_\Delta(x),u| \cong \varepsilon|f_\Delta(x),u| = \varepsilon Bf_\Delta|x,u| = \\ & = \varinjlim_{\underline{\underline{F}}} Bf_\Delta(\varepsilon|x,u|) \cong \varinjlim_{\underline{\underline{F}}} Bf_\Delta(B\varepsilon_\Delta|x,u|). \end{aligned}$$

On a ainsi achevé la preuve de l'existence du foncteur B .

Remarque.

Si Ens_Δ désigne la catégorie des ensembles simpliciaux (espaces simpliciaux discrets), et si l'on reprend la notion classique de limite directe, avec la notation habituelle, on a le

Théorème. Il existe un foncteur covariant $B : \text{Ens}_\Delta \longrightarrow \text{Top}$, unique à isomorphisme naturel près, satisfaisant

$$\begin{aligned} (1) \quad Bn_\Delta &\cong \Delta^n & (B\mu_\Delta &\cong \Delta\mu) \\ (2) \quad B \varinjlim_i X_\Delta(i) &\cong \varinjlim_i BX_\Delta(i) & (B \varinjlim_i f_\Delta(i) &\cong \varinjlim_i Bf_\Delta(i)). \end{aligned}$$

La preuve est beaucoup plus simple que dans le cas topologique:

il suffit de remarquer que le théorème de la page 21 s'écrit ici

$$X_A \cong \varinjlim_X n(x)_A$$

la catégorie (discrète) d'indices étant $\underline{X}$, et $n(x)=m$ si $x \in X_m$.

4. Commutation de B avec le produit.

Proposition. Soient X_A et Y_A deux espaces simpliciaux, l'un au moins étant compact de dimension finie ;

l'application canonique

$$B(X_A \times Y_A) \longrightarrow BX_A \times BY_A$$

est un homéomorphisme.

preuve. Soient u et v des points intérieurs de Δ^n et Δ^m ; on note $u \cup v$ l'élément $w = (w_0=0, w_1, \dots, w_p, w_{p+1}=1)$ de Δ^p tel que $\{w_1, \dots, w_p\} = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}$. Au couple (u, v) est alors associé un couple (σ, τ) d'applications surjectives de $\text{Hom } \underline{\Delta}$: si $i_1 < \dots < i_k$ est l'ensemble des i tels que $w_{i+1} \notin \{u_0, \dots, u_{n+1}\}$, on pose $\sigma = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$; idem pour τ , $i_1 < \dots < i_k$ étant cette fois l'ensemble des i vérifiant $w_{i+1} \notin \{v_0, \dots, v_{m+1}\}$. On a

$$\Delta\sigma(w) = u \quad \text{et} \quad \Delta\tau(w) = v,$$

ce qui fait dire que σ (resp. τ) efface v (resp. u) dans w .

Soient maintenant $f : B(X_A \times Y_A) \longrightarrow BX_A \times BY_A$ l'application continue canonique envoyant $|x, y, w|$ sur $(|x, w|, |y, w|)$, et $\bar{g} : \bigsqcup_{n,m=0}^{\infty} X_n \times Y_m \times \Delta^n \times \Delta^m \longrightarrow B(X_A \times Y_A)$ définie de la manière suivante : pour tout $u, v \in \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Delta^n$, appelons δ_u et δ_v les morphismes injectifs de $\underline{\Delta}$ tels que $u \stackrel{!}{=} \Delta\delta_u(\overset{\circ}{u})$ et $v \stackrel{!}{=} \Delta\delta_v(\overset{\circ}{v})$, $\overset{\circ}{u}$ et $\overset{\circ}{v}$ intérieurs. Notant $d_u = (\delta_u)_X$,

$d_v = (\delta_v)_Y$ et $w = \hat{u} \cup \hat{v}$, on pose

$$\bar{g}(x, y, u, v) = |\sigma_X d_u(x), \tau_Y d_v(y), w|$$

où σ (resp. τ) est l'application effaçant $\hat{v}$ (resp. $\hat{u}$) dans w .

Nous allons montrer que $\bar{g}$ induit un inverse continu g de f . On définit $g : BX_\Delta \times BY_\Delta \longrightarrow B(X_\Delta \times Y_\Delta)$ par $g(|x, u|, |y, v|) = \bar{g}(x, y, u, v)$. Pour voir que cela a un sens, il suffit de prouver que, si $x = \mu_X(x')$ et $u' = \Delta\mu(u)$, l'on a $g(|x, u|, |y, v|) = g(|x', u'|, |y, v|)$ pour $\mu = \delta_i, \sigma_i$. Si $\mu = \delta_i$, alors $\hat{u}' = \hat{u}$ et $\delta_{u'} = \delta_i \delta_u$; si $\mu = \sigma_i$, alors soit $\hat{u}' = \hat{u}$ et $\delta_{u'} = \sigma_i \delta_u$, soit $\hat{u}' = \sigma_j(\hat{u})$ et $\delta_{u'} \sigma_j = \sigma_i \delta_u$ pour un certain j ; dans ce dernier cas, ou bien $w' = w$, alors $\tau = \tau'$ et $\sigma' = \sigma_j \sigma$, ou bien $w' = \sigma_k(w)$ pour un certain k , alors $\sigma' \sigma_k = \sigma_j \sigma$ et $\tau = \tau' \sigma_k$. Tout cela implique $|\sigma_X d_u(x), \tau_Y d_v(y), w| = |\sigma_X d_{u'}(x'), \tau_Y d_v(y), w'|$; g est donc bien définie.

$$\begin{aligned} fg = id : fg(|x, u|, |y, v|) &= f\bar{g}(x, y, u, v) = f|\sigma_X d_u(x), \tau_Y d_v(y), w| \\ &= (|\sigma_X d_u(x), w|, |\tau_Y d_v(y), w|) = (|d_u(x), \hat{u}|, |d_v(y), \hat{v}|) = \\ &= (|x, u|, |y, v|). \end{aligned}$$

$$gf = id : gf|x, y, u| = g(|x, u|, |y, u|) = \bar{g}(x, y, u, u); \text{ sans limiter la généralité, on peut supposer } u \text{ intérieur, d'où } \bar{g}(x, y, u, u) = |x, y, u|.$$

Continuité de g : montrons tout d'abord celle de $\bar{g}$. Soient $a = (x, y, u, v) \in X_n \times Y_m \times \Delta^n \times \Delta^m$, $b = (\sigma_X d_u(x), \tau_Y d_v(y), w) \in X_p \times Y_p \times \Delta^p$ et $W \subset \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times Y_n \times \Delta^n$ un voisinage ouvert de b saturé pour la relation d'équivalence $\sim$ telle que $B(X_\Delta \times Y_\Delta) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times Y_n \times \Delta^n / \sim$.

Notation : pour tout $u \in \Delta^n \subset [0, 1]^{n+2}$ et tout $\varepsilon \geq 0$, on désigne par $I_\varepsilon(u)$ le voisinage fondamental ouvert $\Delta^n \cap \bigcap_{i=0}^{n+1} (u_i - \varepsilon, u_i + \varepsilon)$ de u .

Exhibons un voisinage de a s'envoyant dans W par $\bar{g}$, de la forme $U \times V \times I_\varepsilon(u) \times I_\varepsilon(v)$. Soient successivement

- $\theta = \frac{1}{2} \inf\{|w_i - w_j| : 0 \leq i, j \leq p+1, i \neq j\}$ (θ est > 0 car $w = \overset{\circ}{u} U \overset{\circ}{v}$ est intérieur);
- $u' \in I_\theta(u)$, $v' \in I_\theta(v)$, $w' = \overset{\circ}{u}' U \overset{\circ}{v}' \in \Delta^q$, σ' effaçant $\overset{\circ}{v}'$ dans w' et τ' effaçant $\overset{\circ}{u}'$;
- $i_1 < \dots < i_k$ l'ensemble des i tels que $N_i > 0$, où $N_{i+1} = \text{Card}((w_i - \theta, w_i + \theta) \cap \{w'_0, \dots, w'_{q+1}\})$, $0 \leq i \leq p+1$ (cet ensemble dépend de u' et v');
- $\delta \in \text{Hom}_{\Delta}(p, q)$ défini par $\delta = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_1} \delta_{i_2} \dots \delta_{i_2} \delta_{i_k} \dots \delta_{i_k}$, le facteur δ_{i_i} se répétant N_{i_i} fois.

Alors : $\Delta\delta(w)$ est dans $I_\varepsilon(w')$ dès que $(u', v') \in I_\varepsilon(u) \times I_\varepsilon(v)$.

De plus $\Delta(\delta_u, \sigma'\delta)(w) = \Delta(\delta_u \sigma)(w)$ et $\Delta(\delta_v, \tau'\delta)(w) = \Delta(\delta_v \tau)(w)$.

C'est en effet évident lorsque $w \in \Delta^0$ ou Δ^1 , et on se ramène à ces deux cas en envisageant les intervalles $(w_i - \theta, w_i + \theta)$.

Donc, comme w est intérieur,

$$\delta_u, \sigma'\delta = \delta_u \sigma \quad \text{et} \quad \delta_v, \tau'\delta = \delta_v \tau. \quad (*)$$

Quand (u', v') varie dans $I_\theta(u) \times I_\theta(w)$, les 5-uplets correspondants $(d_u, d_v, \sigma', \tau', \delta)$ sont en nombre fini :

$$(d_u^i, d_v^i, \sigma'^i, \tau'^i, \delta^i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Posons $b_i = (\sigma_X^i d_u^i(x), \tau_Y^i d_v^i(y), \Delta\delta^i(w))$. Les relations (*) impliquent que $b \sim b_i$, donc $b_i \in W$, pour tout $1 \leq i \leq N$.

Il existe alors, puisque W est ouvert, des voisinages ouverts W_1^i et W_2^i de $\sigma_X^i d_u^i(x)$ et $\tau_Y^i d_v^i(y)$ respectivement, ainsi que des $\varepsilon_i > 0$, tels que $W_1^i \times W_2^i \times I_{\varepsilon_i}(\Delta\delta^i(w)) \subset W$, $i = 1, \dots, N$.

Soient $U^i = (\sigma_X^i d_u^i)^{-1}(W_1^i)$, $V^i = (\tau_Y^i d_v^i)^{-1}(W_2^i)$, $U = \bigcap_{i=1}^N U^i$, $V = \bigcap_{i=1}^N V^i$, et $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N, \theta\}$ (ε est > 0).

U^i et V^i sont des voisinages de x et y respectivement, donc aussi U et V .

Finalement, on observe que

$$\bar{g}(U \times V \times I_\varepsilon(u) \times I_\varepsilon(v)) \subset W,$$

d'où la continuité de $\bar{g}$.

Supposons maintenant Y_A compact de dimension finie m . BY_A est alors un quotient compact de $\bigsqcup_{n=0}^m Y_n \times \Delta^n$ (voir p.47). Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n) \times (\bigsqcup_{n=0}^m Y_n \times \Delta^n) & \xrightarrow{\text{Res } \bar{g}} & B(X_A \times Y_A) \\
 \text{id} \downarrow & & \nearrow g \\
 (\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n) \times & & BY_A \\
 \varepsilon_X \downarrow & & \downarrow \text{id} \\
 BX_A \times & & BY_A
 \end{array}$$

$\text{id} \times \varepsilon_Y$ et $\varepsilon_X \times \text{id}$ sont des identifications, car ε_Y est propre et BY_A compact. Donc g est continue, et la proposition est démontrée.

Corollaire 1. Si X_A et Y_A sont des k -espaces simpliciaux (non nécessairement de Hausdorff), l'application continue canonique

$$B(X_A \times Y_A) \longrightarrow BX_A \times BY_A$$

est un k -homéomorphisme.

preuve. $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X_n \times \Delta^n$, $\bigsqcup_{n=0}^m Y_n \times \Delta^n$ sont des k -espaces, ainsi que BX_A et BY_A (cf. rappel p.8). Le k -produit de deux identifications de k -espaces en étant une, l'application g de la proposition est continue.

Corollaire 2. Soient X_Δ , Y_Δ deux espaces simpliciaux, l'un au moins étant compact de dimension finie, et Z un espace simplicial constant de Hausdorff. Alors :

$$B(X_\Delta \times_Z Y_\Delta) \cong BX_\Delta \times_Z BY_\Delta \quad .$$

preuve. Comme dans le cas où X_Δ est constant, page 29 .

(cette preuve ne marche pas si $Z = Z_\Delta$ est un espace simplicial quelconque : le complément de $X_\Delta \times_{Z_\Delta} Y_\Delta$ dans $X_\Delta \times Y_\Delta$ n'est plus forcément un sous-espace simplicial de $X_\Delta \times Y_\Delta$).

Remarque. La restriction du foncteur B aux ensembles simpliciaux commute avec toute limite inverse finie, "à k -topologie près". cf. [2].

*

REFERENCES

- [1] J.W. Milnor. The geometric realisation of a semi-simplicial complex. Ann. of math. 65 (1957).
- [2] P. Gabriel, M. Zisman. Calculus of fractions and homotopy theory. Erg. der math. 35 (1967).
- [3] J.P. May. Simplicial objects in algebraic topology. Van Nostrand (1967).
- [4] N. Bourbaki. Topologie générale, chap. I, § 10.
- [5] R.M. Vogt. Convenient categories of topological spaces for homotopy theory. Arch. math. XXII (1971)