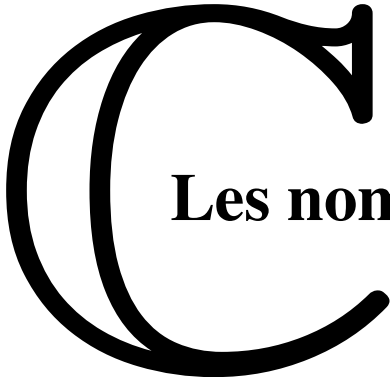




Les nombres complexes

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Définition des nombres complexes	2
Le plan complexe	3
Conjugué	4
Module	5
Distance de deux points et module	6
Racines carrées	7
Équation de deuxième degré	8
Forme polaire	9
Transformations géométriques du plan complexe	10
Interprétation géométrique du produit	11
Racines n -ièmes	12
Le théorème fondamental de l'algèbre	13
Equation générale du troisième degré	14

EXERCICES

§ 1. INTRODUCTION

Introduits à l'origine comme symboles purement formels destinés à rendre compte des propriétés des équations algébriques, les nombres complexes (ou imaginaires) sont d'un usage courant au XVIII^e siècle, mais ce n'est qu'au siècle suivant qu'ils seront définis et utilisés correctement, avec la rigueur qui caractérise les préoccupations des mathématiciens du XIX^e siècle. Et c'est alors le prodigieux essor de la théorie des fonctions d'une variable complexe et l'entrée en force des imaginaires dans presque tous les domaines des mathématiques. De nos jours, les nombres complexes interviennent de manière essentielle, comme un cadre naturel, dans maintes théories mathématiques et physiques.

Alors que de nombreux mathématiciens (dont Viète) hésitaient encore à utiliser les nombres négatifs, les algébristes italiens du XVI^e siècle, Cardan et ses élèves, s'enhardirent à introduire dans les calculs des symboles purement formels $\sqrt{-a}$ ($a > 0$), représentant le résultat de l'extraction "impossible" de la racine carrée du nombre négatif $-a$; ils décrivent en détail des règles de calcul permettant de manipuler ces nouveaux "nombres", appelés par eux *nombres impossibles*.

A l'origine, il s'agissait seulement de donner des racines à *toutes* les équations du second degré ; les résultats obtenus dans l'étude de l'équation du troisième degré allaient familiariser les mathématiciens avec ces symboles et mettre en évidence leur rôle comme intermédiaire commode de calcul dans de nombreux cas. Au moyen de la formule dite de Cardan, Bombelli montre, en 1572, que la racine $x = 4$ de l'équation $x^3 = 15x + 4$ peut s'écrire :

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 4$$

mettant par là en évidence le fait que certaines quantités réelles peuvent être représentées par des expressions en apparence imaginaires. Ainsi, la formule de Cardan permet de représenter des racines réelles par l'intermédiaire d'opérations effectuées sur des nombres impossibles, ou "imaginaires". Les nombres imaginaires fournissent donc des méthodes de calcul, de nature certes mystérieuse, mais qui permettent d'obtenir des résultats "vrais" qu'il serait souvent beaucoup plus long ou beaucoup plus difficile d'obtenir directement.

Pour ces raisons, somme toute empiriques, les mathématiciens utilisèrent avec une confiance croissante les nombres imaginaires depuis le début du XVII^e siècle. Dès 1629, A. Girard soupçonnait que toute équation de degré n a n racines réelles ou imaginaires, ce qui revenait à pressentir que les nombres imaginaires constituent le cadre "naturel" de la théorie des équations. A partir de 1675, Leibniz applique avec succès ses méthodes (de développements en série par exemple) aux nombres imaginaires et obtient ainsi de nombreux résultats, tandis qu'A. de Moivre, au début du XVIII^e siècle, met en évidence, par une utilisation systématique de la trigonométrie, les liens entre la recherche des racines des nombres imaginaires et la division d'un arc de circonférence en parties égales.

La possibilité, admise implicitement, d'étendre aux nombres complexes la plupart des notions relatives aux nombres réels allait se trouver mise en question par la *controverse de logarithmes* des nombres complexes, dont l'intérêt était apparu, par analogie avec le cas des pôles réels, dans l'intégration des fractions rationnelles. Les différentes formules contradictoires obtenues suscitèrent contre les imaginaires un vent de méfiance, qui fut dissipé par L. Euler ; celui-ci comprit qu'il fallait abandonner le caractère univoque du logarithme pour obtenir une théorie satisfaisante et établit d'innombrables formules relatives aux fonctions élémentaires d'une variable complexe.

A la fin du XVIII^e siècle, les imaginaires sont d'usage courant, mais leur "existence mathématique" véritable n'est pas établie ; c'est aux mathématiciens du XIX^e siècle qu'il appartenait de les construire à partir des quantités connues, de leur donner une "réalité mathématique". Avec Cauchy, c'est le prodigieux essor de la théorie des fonctions d'une variable complexe et le début de l'analyse contemporaine. (*Extrait de l'Encyclopaedia Universalis.*)

§ 2. DÉFINITION DES NOMBRES COMPLEXES

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un ensemble contenant $\mathbb{R}$, muni d'une structure algébrique analogue à celle de $\mathbb{R}$ (structure de *corps*), et dans lequel -1 est un carré. En désignant par i un nouvel élément dont le carré vaut -1 , nous définissons $\mathbb{C}$ par :

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Les lois d'addition et de multiplication sont définies (pour $a, b \in \mathbb{R}$) comme suit :

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Si $z = a + bi$ est un nombre complexe ($a, b \in \mathbb{R}$), le nombre a s'appelle **partie réelle** de z et b sa **partie imaginaire**. On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Si la partie réelle de z est nulle ($z = bi$), on dit que z est un nombre **imaginaire pur**.

Proposition

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales :

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \quad \text{et} \quad b = d$$

Preuve

$$\begin{aligned} 1) \quad a + bi = c + di &\Rightarrow a - c = (d - b)i \Rightarrow (a - c)^2 = -(d - b)^2 \\ &\Rightarrow a - c = 0 \quad \text{et} \quad b - d = 0 \Rightarrow a = c \quad \text{et} \quad b = d. \end{aligned}$$

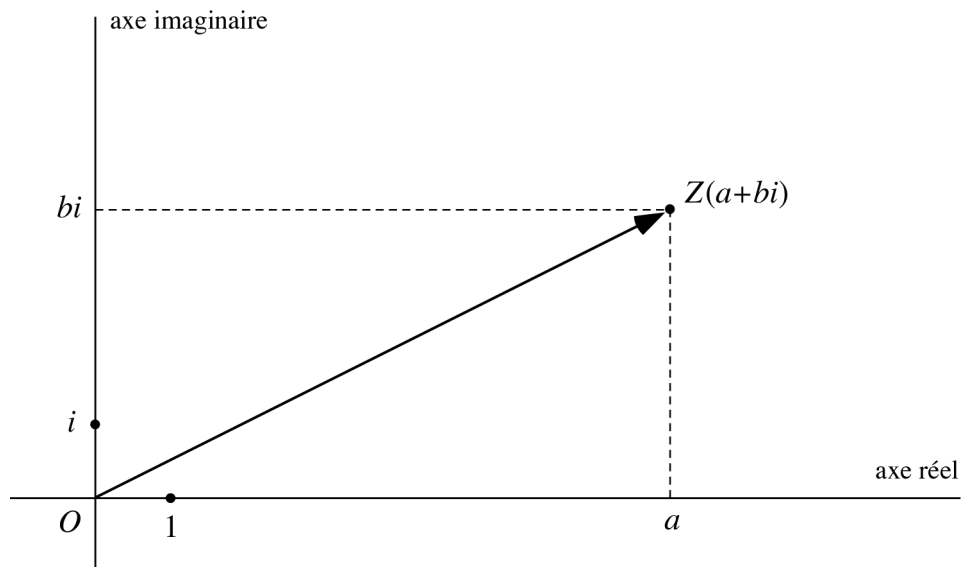
2) La réciproque est évidente.

§ 3. LE PLAN COMPLEXE

On sait déjà qu'un nombre complexe s'exprime de manière unique sous la forme $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Si nous considérons le plan muni d'un repère orthonormé Oxy , il est possible d'associer à tout nombre complexe $z = a + bi$ un point $Z(a, b)$ ou un vecteur $\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du plan. On pourra donc traduire des problèmes relatifs aux nombres complexes en termes géométriques.

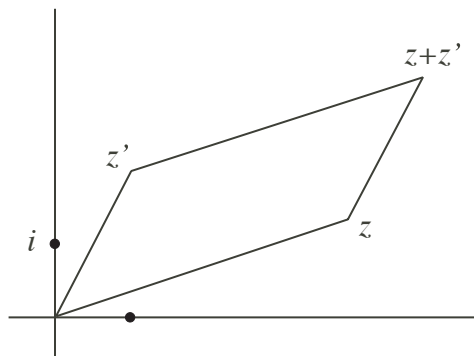
Le plan ainsi défini s'appelle *plan complexe*, ou *plan de Gauss*.

Le premier axe du repère est l'*axe réel*; le second, l'*axe imaginaire*. Le nombre complexe $z = a + bi$ est l'*affiche* du point $Z(a, b)$.



Remarque

L'addition dans $\mathbb{C}$ correspond à l'addition vectorielle :

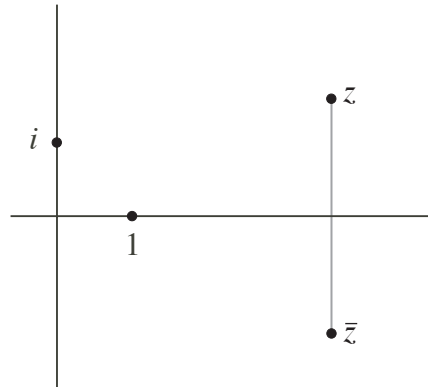


§ 4. CONJUGUÉ

On appelle *conjugué* du nombre complexe $z = a + bi$ le nombre complexe

$$\bar{z} = a - bi$$

Les nombres z et $\bar{z}$ correspondent à deux points symétriques par rapport à l'axe réel :



Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

$$1. \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$2. \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

$$3. \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$4. \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$5. \quad \bar{\bar{z}} = z$$

Règle pour calculer l'inverse d'un nombre complexe

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul. Pour calculer son inverse, on écrit :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

§ 5. MODULE

On appelle **module** du nombre complexe $z = a + bi$ le nombre réel positif ou nul :

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si Z est le point associé à z dans le plan complexe, on a :

$$|z| = \|\overrightarrow{OZ}\| = \text{distance de } Z \text{ à l'origine } O$$

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

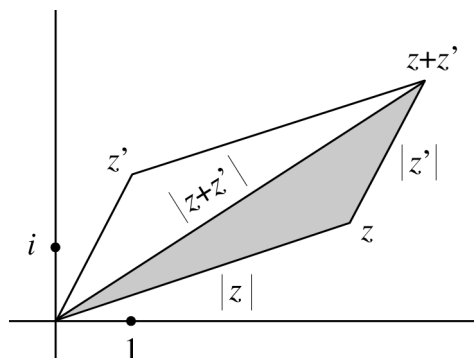
$$1. \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$2. \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$3. \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$4. \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

La propriété 4 est connue sous le nom d'*inégalité triangulaire*, et est illustrée ci-dessous :



A noter :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

§ 6. DISTANCE DE DEUX POINTS ET MODULE

Soient $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ deux points du plan complexe d'affixes respectifs $z_A = a_1 + a_2 i$ et $z_B = b_1 + b_2 i$.

Notons que $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ et que $z_B - z_A = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) i$.

Ans, la distance des points A et B s'écrit :

$$\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = |z_B - z_A|$$

$$\delta(A, B) = |z_B - z_A|$$

Exemple

$A(2; 5), B(3; -1)$.

$$\delta(A, B) = |z_B - z_A| = |(3 - i) - (2 + 5i)| = |1 - 6i| = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}.$$

Remarque : $|z_B - z_A| = |z_A - z_B|$.

§ 7. RACINES CARRÉES

On appelle *racine carrée* de $z \in \mathbb{C}$ tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^2 = z$.

Proposition. *Tout nombre complexe différent de 0 possède deux racines carrées opposées.*

Preuve

Soit $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $z \neq 0$. On cherche $\alpha = x + yi$ tel que $\alpha^2 = z$.

- **Si $b \neq 0$** (et donc $x, y \neq 0$)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 \\ y = b/(2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2} \right) \\ y = b/(2x) \end{cases}$$

Or $\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{a^2} = |a|$; $\Rightarrow \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 + b^2} \right) < 0$ et $\frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} \right) > 0$.

Posant $c = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} \right)$, on a donc :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{c} \quad (c > 0) \\ y = b/(2x) \end{cases}$$

$\Rightarrow z$ admet deux racines carrées opposées : $\sqrt{c} + (b/(2\sqrt{c}))i$ et $-\sqrt{c} - (b/(2\sqrt{c}))i$.

- **Si $b = 0$** (et donc $a \neq 0$)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

Si $a > 0$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{a} \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow z$ admet deux racines carrées opposées (réelles) : $-\sqrt{a}$ et $+\sqrt{a}$.

Si $a < 0$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \sqrt{-a} \end{cases}$$

$\Rightarrow z$ admet deux racines carrées opposées (imaginaires) : $(-\sqrt{-a})i$ et $(\sqrt{-a})i$.

§ 8. ÉQUATION DU 2e DEGRÉ

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

dans laquelle a , b et c sont complexes.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \parallel \cdot 4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \quad \parallel \text{"recherche du carré"}$$

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Comme dans $\mathbb{R}$, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit α et $-\alpha$ les racines carrées de Δ . Alors :

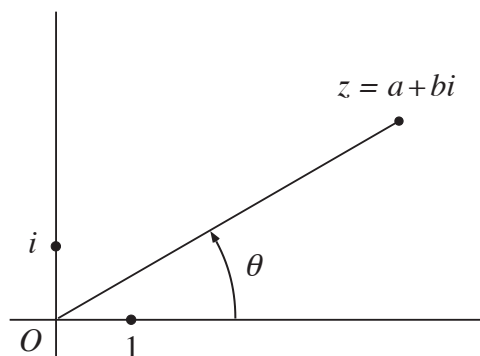
$$2ax + b = \pm \alpha$$

$$2ax = -b \pm \alpha$$

$$x = \frac{-b \pm \alpha}{2a}$$

Ainsi, dans $\mathbb{C}$, toute équation du deuxième degré a deux solutions, confondues uniquement si $\Delta = 0$.

§ 9. FORME POLAIRE



Le nombre complexe non nul $z = a + bi$ est entièrement déterminé par son module $r = |z|$ et par l'angle orienté θ que forme le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cet angle s'appelle **argument** de z et se note $\arg(z)$.

- Remarques.**
1. L'argument du nombre complexe nul n'est pas défini.
 2. L'argument d'un nombre complexe non nul est défini à 2π près.
 3. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

Le couple (r, θ) est, par définition, le couple des **coordonnées polaires** du point (a, b) .

On note $z = [r; \theta]$, ce qui constitue la **forme polaire** du nombre complexe z .

On trouve également les notations $z = r e^{i\theta}$ et $z = r \operatorname{cis}(\theta)$.

Formules de conversion

$$a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Produit de deux nombres complexes donnés sous forme polaire

Considérons deux nombres complexes $z = [r; \theta]$ et $z' = [r'; \theta']$. Alors :

$$\begin{aligned} z z' &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= r r' (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')) \\ &= r r' (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) = [r r'; \theta + \theta'] \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$[r; \theta] \cdot [r'; \theta'] = [r r'; \theta + \theta']$$

$$\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta' \right]$$

$$[r; \theta]^n = [r^n; n\theta]$$

$$\frac{1}{[r; \theta]} = \left[\frac{1}{r}; -\theta \right]$$

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$$

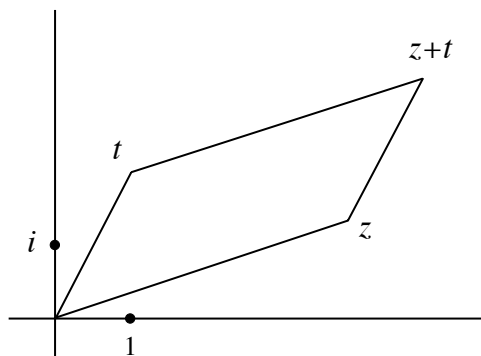
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

§ 10. TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES DU PLAN COMPLEXE

a) Translation

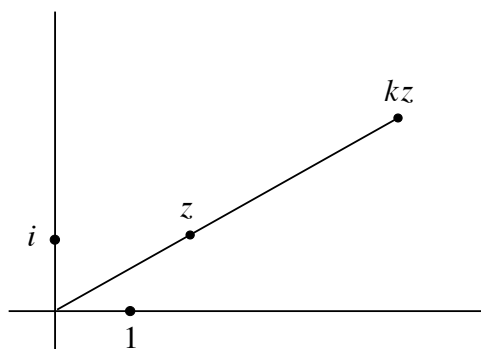


Soit $t = t_1 + t_2 i \in \mathbb{C}$.

L'application $z \mapsto z+t$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ amène le point (x, y) sur le point $(x+t_1, y+t_2)$. C'est donc la translation de vecteur $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$. Nous dirons que l'équation de cette translation est :

$$z' = z + t$$

b) Homothétie de centre 0 et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$

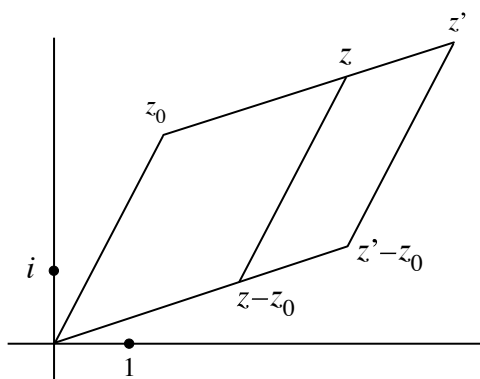


L'application $z \mapsto kz$ amène le point (x, y) sur le point (kx, ky) .

Il s'agit donc d'une homothétie de centre 0 et de rapport k , dont l'équation s'écrit :

$$z' = kz$$

c) Homothétie de centre z_0 et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$

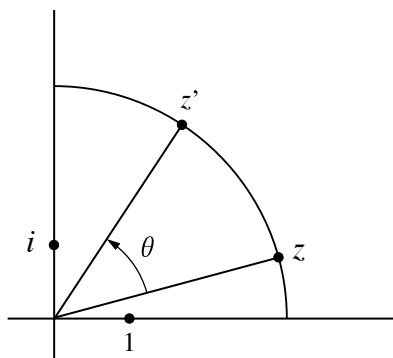


Si z' est l'image de z par cette homothétie, $z' - z_0$ est l'image de $z - z_0$ par l'homothétie de même rapport mais de centre 0.

D'où l'équation d'une homothétie de centre z_0 et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$:

$$z' - z_0 = k(z - z_0)$$

d) Rotation de centre 0 et d'amplitude θ



L'application $z \mapsto [1; \theta]z$ conserve le module tout en augmentant l'argument de θ .

C'est donc une rotation de centre 0 et d'amplitude θ , dont l'équation s'écrit :

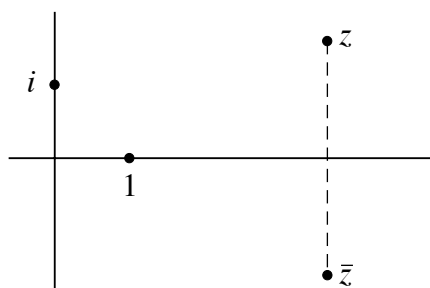
$$z' = [1; \theta]z$$

e) Rotation de centre z_0 et d'amplitude θ

A partir de d) et à l'aide de la translation $z \mapsto z - z_0$, on montre que l'équation de cette rotation est :

$$z' - z_0 = [1; \theta](z - z_0)$$

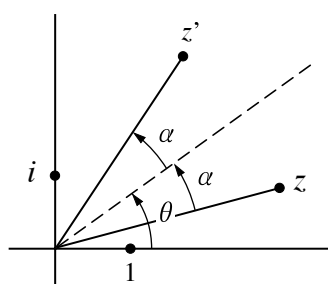
f) Réflexion d'axe réel



Il est clair que son équation est :

$$z' = \bar{z}$$

g) Réflexion d'axe passant par 0 et d'angle directeur θ



Posons $z = [r; \varphi]$ et $z' = [r; \varphi']$. Alors (cf. figure) :
 $\alpha = \theta - \varphi = \varphi' - \theta$ et $\varphi' = 2\theta - \varphi$.

Puis : $z' = [r; 2\theta - \varphi] = [1; 2\theta] \cdot [r; -\varphi] = [1; 2\theta] \cdot \bar{z}$.
 Ainsi, l'équation d'une réflexion d'axe passant par 0 et d'angle directeur θ est :

$$z' = [1; 2\theta] \cdot \bar{z}$$

h) Réflexion d'axe passant par z_0 et d'angle directeur θ

A partir de g) et à l'aide de la translation $z \mapsto z - z_0$, on montre que l'équation de cette réflexion est :

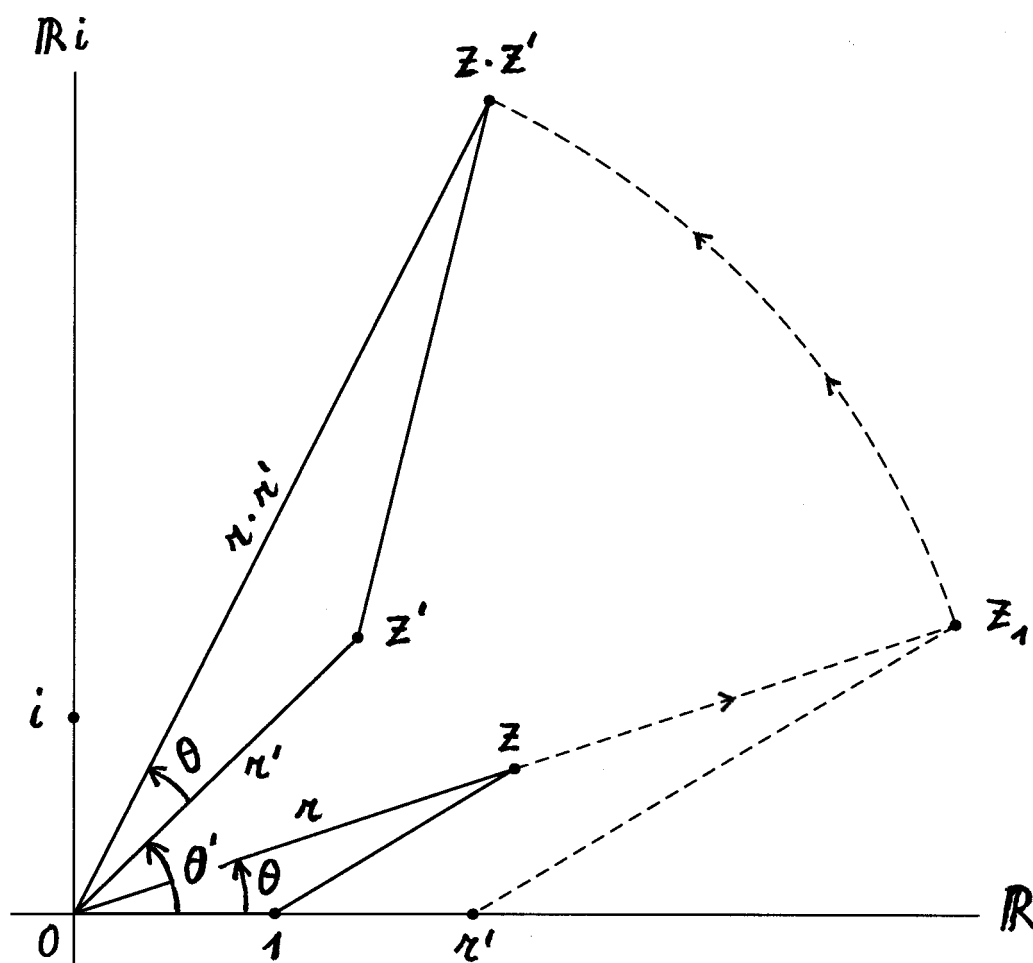
$$z' - z_0 = [1; 2\theta] \cdot (\overline{z - z_0})$$

§ 11. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU PRODUIT

Soient deux complexes $z = [r; \theta]$ et $z' = [r'; \theta']$. L'application $z \mapsto z \cdot z'$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ peut être vue comme la composée d'une homothétie de centre 0 et de facteur r' avec une rotation de centre 0 et d'angle θ' :

$$\begin{array}{ccc}
 z = [r; \theta] & \xrightarrow{\cdot [r'; \theta']} & z z' = [r r'; \theta + \theta'] \\
 \searrow \begin{array}{l} \cdot r' \\ \text{(homothétie)} \end{array} & & \nearrow \begin{array}{l} \cdot [1; \theta'] \\ \text{(rotation)} \end{array} \\
 & z_1 = [r r'; \theta] &
 \end{array}$$

On en tire la "construction" suivante du produit de deux nombres complexes :



§ 12. RACINES N-IÈMES

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}^*$.

On appelle *racine n-ième* de z tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^n = z$.

Théorème

Chaque nombre complexe non nul $z = [r; \theta]$ possède n racines n -ièmes distinctes :

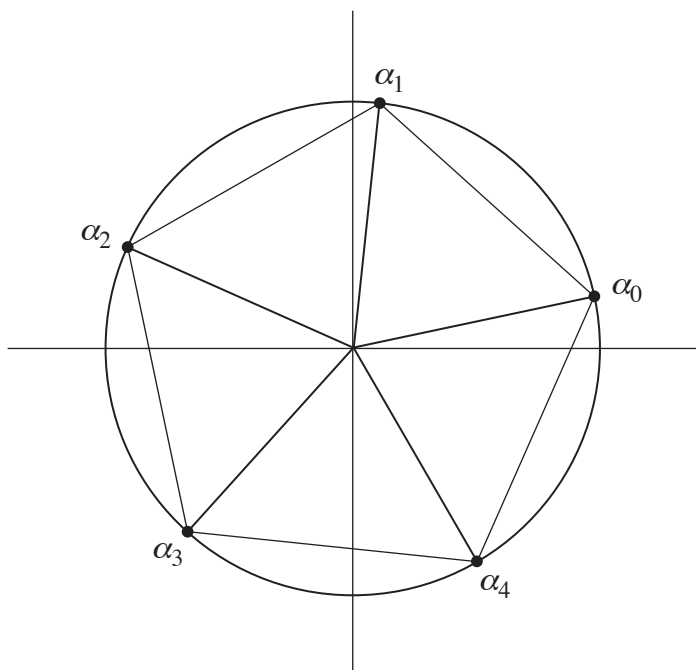
$$\left[\sqrt[n]{r} ; \frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right], \quad k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$$

Preuve

Cherchons α tel que $\alpha^n = [r; \theta]$. Comme $\alpha^n = [|\alpha|^n; n \cdot \arg(\alpha)]$, on doit avoir $|\alpha|^n = r$ et $n \cdot \arg(\alpha) = \theta + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ainsi, $|\alpha| = \sqrt[n]{r}$ et $\arg(\alpha) = \frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$. D'où le résultat annoncé.

Exemple



Les racines 5-ièmes de

$$z = 1 + \sqrt{3}i = [2; \frac{\pi}{3}]$$

sont

$$\left[\sqrt[5]{2} ; \frac{\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \right],$$

avec $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Remarque. L'unique racine n -ième de 0 est 0.

§ 13. LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Théorème

Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 et à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}$.

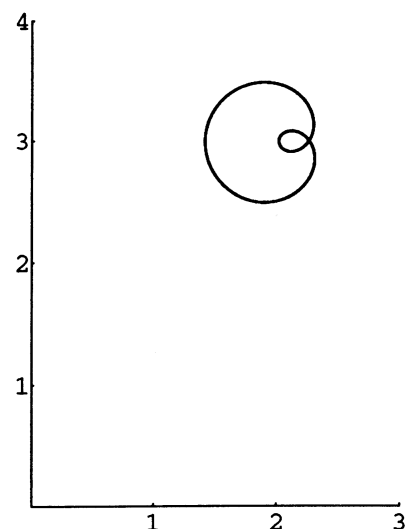
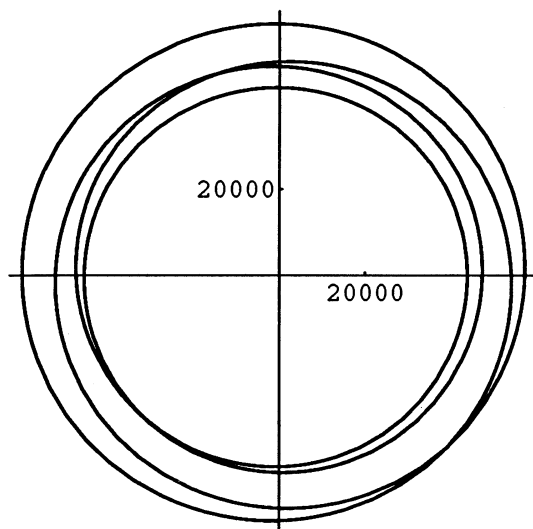
Idée de la preuve

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Le théorème étant trivial si $a_0 = 0$, nous supposons que $a_0 \neq 0$; et en divisant $P(z)$ par a_n , on se ramène au cas $a_n = 1$. On considère alors la transformation f du plan complexe définie par :

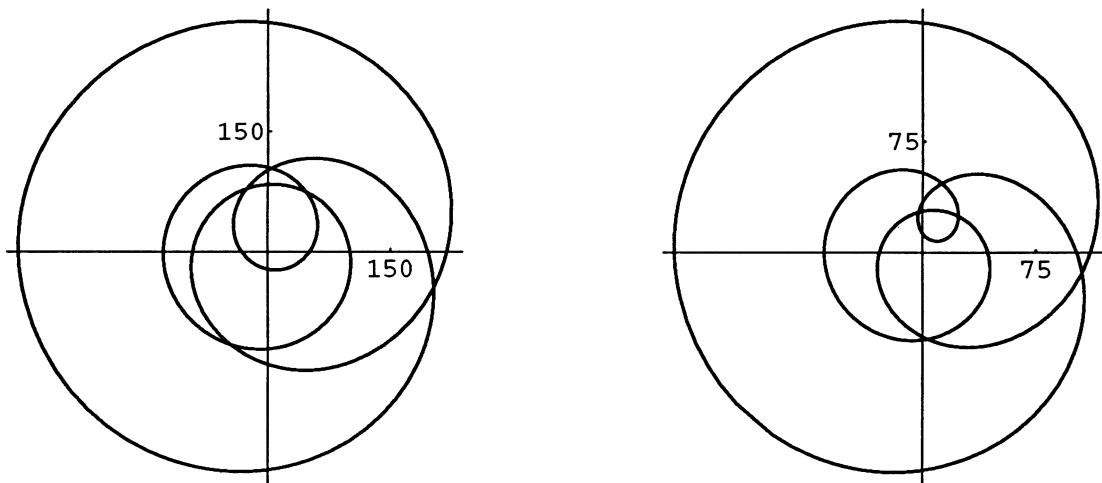
$$f: z \mapsto P(z), \text{ avec } P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0)$$

On examine les images par f des cercles centrés à l'origine. Les points z du cercle C_R de rayon R sont caractérisés par $|z| = R$. Si R est assez grand, $f([R; \theta]) \cong [R^n; n\theta]$, parce que dans ce cas le terme dominant de $P(z)$ est z^n . Donc, si R est assez grand, l'image de C_R est une courbe qui entoure n fois l'origine. Si R est assez petit, $f([R; \theta]) \cong a_1 [R; \theta] + a_0$, parce que dans ce cas le terme dominant de $P(z)$ est $a_1 z + a_0$. Donc, si R est assez petit, l'image de C_R est une courbe qui est proche du cercle de rayon $|a_1| R$ centré en a_0 . On admet que si R diminue continûment, l'image de C_R se déforme de manière continue. Dans ce processus, la courbe $f(C_R)$ se déforme et, pour se rapprocher de a_0 , finit par passer sur l'origine. A ce moment, elle met en évidence un zéro de $P(z)$: le point de C_R que f envoie sur l'origine.

Pour illustrer le phénomène, prenons le polynôme $P(z) = z^4 - (2+i)z^3 + 7iz^2 + (1-i)z + (2+3i)$. La figure ci-dessous donne l'image par f du cercle de rayon 15 (à gauche) et celle du cercle de rayon 0,2 (à droite).



La figure suivante montre les images des cercles de rayon 3,4 (à gauche), et 2,8 (à droite). Entre ces deux valeurs, la courbe a touché l'origine.



Corollaires du théorème fondamental

Tout polynôme $P(z)$ de degré n supérieur ou égal à 1 et à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet une décomposition en un produit de n facteurs du premier degré :

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$$

les α_k étant des nombres complexes non nécessairement distincts.

Pour tout polynôme $P(z)$ de degré n supérieur ou égal à 1, à coefficients dans $\mathbb{C}$, il existe des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ deux à deux distincts, et des entiers strictement positifs $m_1, m_2, \dots, m_p$ tels que

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1)^{m_1} (z - \alpha_2)^{m_2} \dots (z - \alpha_p)^{m_p}$$

avec $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$.

§ 14. ÉQUATION GÉNÉRALE DU TROISIÈME DEGRÉ

Cf. exercices 70 à 74.

EXERCICES

1. Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$):

a) $3(5 - 2i) + 2(7 - i) - 3(4 - 3i)$

b) $(7 - 3i) + (-4 + 2i) - (8 + 9i)$

c) $(9 + 5i)(2 - 7i)$

d) $(2 + 3i)(2 - 3i)$

e) $(1 + i)^4$

f) $(2 - 3i)^3$

g) $(3 - 4i)^2$

h) $\frac{1}{i}$

i) $\frac{1}{4 - 3i}$

j) $\frac{1}{1 - i}$

k) $\frac{1}{1 + i}$

l) $\frac{1}{i - 2}$

m) $\frac{1}{5i - 2}$

n) $\frac{1 + i}{1 - i}$

o) $\frac{i}{2 - i}$

p) $\frac{4 - 3i}{i - 1}$

q) $\frac{1 + 2i}{2 + 3i}$

r) $\frac{1 - i}{1 + i}$

s) $\frac{3 - 2i}{5 + 4i}$

t) $\frac{2 + i}{1 - 2i} + \frac{2 - i}{1 + 2i}$

u) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$

v) $\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha}$

w) $(1 + i)^2$

x) $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2$

y) $i^k \ (k \in \mathbb{Z})$

z) $(7 - 8i)\overline{(8 - 7i)} - \overline{(4 + 3i)}(4 - 2i)$

2. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (2 + i)z + (2 - i)z' = 7 - 4i \\ (1 + i)z - iz' = 2 + i \end{cases}$$

Exercices

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $2z - 3 + i = 0$

b) $(1 - 4i)z = 6 - 7i$

c) $\frac{1}{z} = 3 - 7i$

d) $z^2 = 3 - 4i$

e) $z^2 = -1$

f) $z^2 = i$

g) $z^2 = -7 - 24i$

h) $z^2 = -4$

4. Calculer le module des nombres complexes suivants :

a) $2 + 3i$

b) $1 + i$

c) $2i$

d) $-3i$

e) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

f) 5

g) -6

h) $\cos \alpha + i \sin \alpha$

5. Quel est le lieu des points représentatifs des nombres complexes satisfaisant les relations suivantes :

a) $z - \bar{z} = 10i$

b) $z - \bar{z} = 1 + i$

c) $z + \bar{z} = 10$

d) $z + \bar{z} = 1 - i$

e) $(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 2$

f) $z + \bar{z} + 2i(z - \bar{z}) = 5$

g) $z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 32$

h) $z\bar{z} + 3iz - 3i\bar{z} - 55 = 0$

i) $z\bar{z} - z + iz - i\bar{z} - \bar{z} = 7$

j) $|z - 1| = 1$

k) $|z - (2 + 3i)| = 4$

l) $|z - \bar{z}| = 2$

6. Représenter les points $A, B, C, \dots$ dans le plan complexe connaissant leurs affixes $a, b, c, \dots$: $a = 2 - i$; $b = -3 + 2i$; $c = a + b$; $d = a - b$; $e = \frac{1}{2}(a + \bar{a})$; $f = \frac{1}{2}(a - \bar{a})$; $g = -a$; $h = -\bar{a}$.

7. Ecrire les nombres suivants sous forme polaire :

a) 1 b) i c) -2 d) $-1 - i$ e) $-1 - i\sqrt{3}$ f) $3 + 4i$ g) $12 - 5i$

8. Ecrire les complexes suivants sous forme cartésienne :

a) $\left[4; -\frac{\pi}{3}\right]$ b) $\left[\frac{3}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ c) $[\pi; -\pi]$ d) $\left[4; \frac{\pi}{3}\right]$ e) $\left[1; -\frac{\pi}{2}\right]$

Exercices

9. Calculer : a) $\left[2; \frac{\pi}{4}\right] \cdot \left[\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$ b) $\left[2; \frac{\pi}{4}\right] : \left[3; \frac{\pi}{6}\right]$ c) $\left[6; \frac{2\pi}{3}\right] : \left[3; -\frac{\pi}{3}\right]$
10. Calculer : a) $(1+i\sqrt{3})^7$ b) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{19}$ c) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$
11. Calculer sous forme cartésienne les racines carrées complexes des nombres suivants :
a) 1 b) i c) $-i$ d) 4 e) -9 f) $3+4i$ g) $-5+12i$
12. a) Déterminer la forme polaire des nombres complexes z tels que $z^4 = 1+i$.
b) Déterminer la forme cartésienne des nombres complexes z tels que $z^4 = 24i - 7$.
13. a) Déterminer les racines cubiques de $\sqrt{3}+i$ (sous forme polaire), et les représenter dans le plan complexe.
b) Idem pour les racines cinquièmes de 32.
c) Idem pour les racines huitièmes de -1 .
d) Vérifier que $\left[\sqrt[n]{r}; \frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right]^n = [r; \theta]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$.
14. Représenter dans le plan complexe les solutions des équations :
a) $z^6 = 64$ b) $z^4 = -1$ c) $z^{10} = 1024$
15. Dans le plan complexe, on désigne par a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D . Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $a - b + c - d = 0$.
16. Représenter les régions du plan complexe dont l'affixe des points vérifie :
a) $\begin{cases} |z| \geq 2 \\ |z-1| \leq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} z\bar{z} \leq 2 \\ z + \bar{z} \geq 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} z^3 \text{ est réel} \\ z^3 < -1 \end{cases}$
17. Au moyen d'une rotation, déterminer l'affixe du sommet B du triangle équilatéral OAB sachant que l'affixe de A est $4 - 2i$.
18. Trouver une construction géométrique des racines carrées d'un nombre complexe.

Exercices

19. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes $a = 1 + 2i$, $b = 4 - 2i$ et $c = -2 - 2i$. Montrer que le triangle ABC est isocèle.
20. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes $a = 1 + i$, $b = 6 + 3i$ et $c = -5 + 5i$. Calculer les côtés et les angles du triangle ABC .
21. Résoudre les équations suivantes :
- a) $2z^2 + 10z + 17 = 0$ b) $z^2 + 3z - 5 = 0$
c) $z^2 - 3(1 + i)z + 6 + 7i = 0$ d) $(1 + 2i)z^2 - (7 + 4i)z + 5 - 5i = 0$
22. Donner la factorisation dans $\mathbb{C}[x]$ et dans $\mathbb{R}[x]$ des polynômes suivants :
- a) $x^5 - 1$ b) $x^{10} - 1$
c) $x^4 + x^2 + 1$ d) $x^3 - 2x + 1$
e) $x^6 - 1$ f) $x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27$
23. Former un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ de degré minimal tel que :
- a) 1 soit un zéro triple et i un zéro double
b) $2 - i$ soit un zéro simple
c) $2 + 5i$ et $1 - 4i$ soient des zéros simples
d) 0 soit un zéro double et $\frac{3 - 6i}{4i - 2}$ un zéro simple.
24. Résoudre l'équation $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$ sachant que deux de ses solutions sont opposées.
25. Résoudre l'équation $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ sachant qu'elle admet une solution double.
26. Résoudre les équations suivantes :
- a) $z^3 - 4z^2 + (8 + i)z - 7 + i = 0$, sachant qu'elle admet la solution $1 - i$.
b) $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 5i)z - (2 + 6i) = 0$, sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.
c) $z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0$, sachant qu'elle admet la solution $1 + i$.

Exercices

50. Soit un complexe $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Prouver que $z = 0$ implique $a = b = 0$. En déduire que si $a + bi = c + di$, alors $a = c$ et $b = d$.

51. Etablir les formules suivantes : ($z, z' \in \mathbb{C}$)

1) $|\bar{z}| = |z|$

2) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

3) $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$

52. Etablir les formules suivantes : ($z, z' \in \mathbb{C}$)

1) $z\bar{z} = |z|^2$

2) $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'$

3) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$

4) $\overline{\left(\frac{z}{z'} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

53. Montrer que $(z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

54. On appelle **triplet de Pythagore** ("TP") tout triplet (x, y, z) de nombres naturels vérifiant l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Exemples : $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 1)$, $(0; 1; 1)$, $(3; 4; 5)$, $(5; 12; 13)$.

a) Montrer que si (x, y, z) est un TP, et si $k \in \mathbb{N}$, alors (kx, ky, kz) est aussi un TP.

b) Essayer de trouver 2 ou 3 TP non multiples de ceux donnés ci-dessus, ni multiples entre eux.

c) Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $a > b > 0$. Calculer $\operatorname{Re}(z^2)$, $\operatorname{Im}(z^2)$ et $|z^2|$ en fonction de a et b . Remarquer que ces 3 nombres entiers sont les côtés d'un triangle rectangle. En déduire beaucoup de TP...

55. Montrer que si α est une racine n -ième de $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{\alpha}$ en est aussi une.

Exercices

57. Notons $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes en x à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$. Etablir que $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, et que $P(x)$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}[x]$ si $\alpha \notin \mathbb{R}$.

58. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n à coefficients réels.

- a) Montrer que si α est un zéro de $P(x)$, alors $\bar{\alpha}$ en est également un.
- b) En déduire que si n est impair, alors $P(x)$ admet au moins un zéro réel.

59. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $x^3 = 27\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

b) $x^6 + 4\sqrt{2}(1+i) = 0$

c) $x^4 - x^3 - ix + i = 0$

d) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

60. Appelons "somme de deux carrés" tout entier pouvant s'obtenir en additionnant les carrés de deux entiers. Démontrer le théorème suivant :

Dans $\mathbb{Z}$, si u et v sont sommes de deux carrés, leur produit uv est également une somme de deux carrés.

Indication :

Par hypothèse, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $u = a^2 + b^2$ et $v = c^2 + d^2$.

Poser $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$, puis considérer le réel $|z_1|^2 |z_2|^2$.

61. Identifier les transformations suivantes du plan complexe :

a) $z \mapsto \bar{z}$

b) $z \mapsto z + (3 + i)$

c) $z \mapsto -\bar{z}$

d) $z \mapsto iz$

e) $z \mapsto -10z$

f) $z \mapsto (\sqrt{3} + i)z$

Exercices

70. On considère l'équation générale du troisième degré :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

Vérifier que la substitution $x = y - \frac{b}{3a}$ élimine le terme de degré 2.

Ainsi : toute équation de 3^e degré équivaut à une équation du type

$$x^3 + px + q = 0$$

71. Soit $\varepsilon = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right]$.

- a) Etablir que $\frac{1}{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$ et que $\frac{1}{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon$.
- b) Vérifier que 1, ε et $\bar{\varepsilon}$ sont les racines cubiques de 1.
- c) Montrer que si α est une racine cubique de $z \in \mathbb{C}$, alors $\varepsilon\alpha$ et $\bar{\varepsilon}\alpha$ sont les deux autres racines cubiques de z .
- d) Mettre ε sous forme $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

72. Soit $u, v \in \mathbb{C}$. On considère le polynôme

$$P(x) = x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3)$$

- a) Diviser $P(x)$ par $x - (u + v)$.
- b) Montrer que les trois zéros de $P(x)$ sont :

$$\begin{aligned}x_1 &= u + v \\x_2 &= \varepsilon u + \bar{\varepsilon} v \\x_3 &= \bar{\varepsilon} u + \varepsilon v\end{aligned}$$

où ε désigne la racine cubique de l'unité $\left[1; \frac{2\pi}{3}\right] = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

73. Résoudre dans $\mathbb{C}$: (Utiliser les résultats ci-dessus)

- a) $x^3 + 6x - 7 = 0$
- b) $x^3 - 24x - 72 = 0$
- c) $x^3 + 36x - 208 = 0$
- d)

74. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

- a) $x^3 - 147x - 286 = 0$
- b) $x^3 - 507x + 506 = 0$
- c) $x^3 - 4107x - 89206 = 0$
- d) $x^3 - 7x + 6 = 0$

Exercices

80. a) Etablir les formules trigonométriques

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cos\alpha \quad \text{et} \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

en exprimant de deux manières $[1; \alpha]^2$.

b) Idem pour les formules $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ et $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, mais en partant de $[1; \alpha]^3$.

c) Idem pour $\sin(n\alpha) = \dots$ et $\cos(n\alpha) = \dots$, à partir de $[1; \alpha]^n$. ($n \in \mathbb{N}$, $n > 3$)

d) Que faire pour retrouver les formules d'addition $\sin(\alpha + \beta) = \dots$ et $\cos(\alpha + \beta) = \dots$?

81. Résoudre : $x^4 - (2 - \sqrt{3})ix^2 - (1 - \sqrt{3}) = 0$.

RÉPONSES

1. a) $17 + i$ b) $-5 - 10i$ c) $53 - 53i$ d) 13 e) -4 f) $-46 - 9i$ g) $-7 - 24i$
 h) $-i$ i) $\frac{4+3i}{25}$ j) $\frac{1+i}{2}$ k) $\frac{1-i}{2}$ l) $\frac{-2-i}{5}$ m) $\frac{-2-5i}{29}$ n) i
 o) $\frac{-1+2i}{5}$ p) $\frac{-7-i}{2}$ q) $\frac{8+i}{13}$ r) $-i$ s) $\frac{7-22i}{41}$ t) 0 u) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
 v) $\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)$ w) $2i$ x) $\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)$
 y) ± 1 ou $\pm i$ selon les valeurs de k z) $102 + 5i$
2. $z = 3 - i$; $z' = 1 - 2i$
3. a) $\frac{3-i}{2}$ b) $2+i$ c) $\frac{3+7i}{58}$ d) $\pm(2-i)$ e) $\pm i$ f) $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
 g) $\pm(3-4i)$ h) $\pm 2i$
4. a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 3 e) 1 f) 5 g) 6 h) 1
5. a) droite d'équation $y = 5$ b) $\emptyset$
 c) droite d'équation $x = 5$ d) $\emptyset$
 e) droite d'équation $x - y = 1$ f) droite d'équation $2x - 4y = 5$
 g) cercle de centre $(2; 0)$ et de rayon 6 h) cercle de centre $(0; 3)$ et de rayon 8
 i) cercle de centre $(1; 1)$ et de rayon 3 j) cercle de centre $(1; 0)$ et de rayon 1
 k) cercle de centre $(2; 3)$ et de rayon 4 l) réunion des deux droites $y = \pm 1$
7. a) $[1; 0]$ b) $[1; \frac{\pi}{2}]$ c) $[2; \pi]$ d) $[\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}]$
 e) $[2; \frac{4\pi}{3}]$ f) $[5; 53,13^\circ]$ g) $[13; -22,62^\circ]$
8. a) $2 - 2i\sqrt{3}$ b) $\frac{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{8}$ c) $-\pi$ d) $2 + 2i\sqrt{3}$ e) $-i$
9. a) -1 b) $[\frac{2}{3}; \frac{\pi}{12}]$ c) -2
10. a) $64 + 64i\sqrt{3}$ b) i c) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
11. a) ± 1 b) $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ c) $\pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ d) ± 2 e) $\pm 3i$ f) $\pm(2+i)$ g) $\pm(2+3i)$

Réponses

12. a) $\left[\sqrt[8]{2}; \frac{\pi}{16}\right]; \left[\sqrt[8]{2}; \frac{9\pi}{16}\right]; \left[\sqrt[8]{2}; \frac{17\pi}{16}\right]; \left[\sqrt[8]{2}; \frac{25\pi}{16}\right]$ b) $\pm(2+i), \pm(1-2i)$

13. a) $\left[\sqrt[3]{2}; 10^\circ\right]; \left[\sqrt[3]{2}; 130^\circ\right]; \left[\sqrt[3]{2}; 250^\circ\right]$
 b) $[2; 0^\circ]; [2; 72^\circ]; [2; 144^\circ]; [2; 216^\circ]; [2; 288^\circ]$
 c) $[1; 22,5^\circ]; [1; 67,5^\circ]; [1; 112,5^\circ]; [1; 157,5^\circ];$
 $[1; 202,5^\circ]; [1; 247,5^\circ]; [1; 292,5^\circ]; [1; 337,5^\circ]$

17. $(2 \pm \sqrt{3}) + (-1 \pm 2\sqrt{3})i$

20. $\alpha = 124,51^\circ \quad \beta = 32,10^\circ \quad \gamma = 23,39^\circ \quad BC = \sqrt{125} \quad AC = \sqrt{52} \quad AB = \sqrt{29}$

21. a) $\frac{-5 \pm 3i}{2}$ b) $\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$ c) $1+4i$ et $2-i$ d) $3-i$ et $-i$

22. a) dans $\mathbb{C}[x] : (x-1)(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})(x-\beta)(x-\bar{\beta})$ où $\alpha = [1; \frac{2\pi}{5}]$ et $\beta = [1; \frac{4\pi}{5}]$
 dans $\mathbb{R}[x] : (x-1)\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)x + 1\right)$

b) dans $\mathbb{C}[x] : \dots$

dans $\mathbb{R}[x] : \dots$

c) $\left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

d) $(x-1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

e) $x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = \dots$ [voir c)]

f) $(x+i\sqrt{3})^3(x-i\sqrt{3})^3 = (x^2+3)^3$

23. a) $(x-1)^3(x^2+1)^2$ b) x^2-4x+5 c) $(x^2-4x+29)(x^2-2x+17)$ d) $x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)$

24. $2; 2; -2$

25. $3; 3; -2$

26. a) $1-i; 2-i; 1+2i$ b) $2i; 2+i; 1-i$ c) $1+i; 1-i; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

Réponses

54. b) $(20; 21; 29), (28; 45; 53)$ c) $\operatorname{Re}(z^2) = a^2 - b^2$; $\operatorname{Im}(z^2) = 2ab$; $|z^2| = a^2 + b^2$
57. si $z = a + bi$, $P(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ et $\Delta(1; -2a; a^2 + b^2) = -4b^2$
59. a) $\left[3; \frac{\pi}{18}\right]$; $\left[3; \frac{13\pi}{18}\right]$; $\left[3; \frac{25\pi}{18}\right]$ b) $\left[\sqrt{2}; \frac{-3\pi + k \cdot 8\pi}{24}\right]$, $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
c) $1; \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i); \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i); -i$ d) $\pm i; \pm i\sqrt{3}$
61. a) réflexion d'axe Ox b) translation de vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
c) réflexion d'axe Oy d) rotation de $+90^\circ$ autour de O
e) homothétie de centre O et de facteur -10
f) rotation de $+30^\circ$ autour de O , suivie d'une homothétie de centre O et de facteur 2
71. d) $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$
72. a) $P(x) = (x - (u + v))(x^2 + (u + v)x + (u^2 - uv + v^2))$
73. a) $1; -\frac{1}{2}(1 \pm 3i\sqrt{3})$ b) $6; -3 \pm i\sqrt{3}$ c) $4; -2 \pm 4i\sqrt{3}$ d)
74. a) $-11; -2; 13$ b) $-23; 1; 22$ c) $-47; -26; 73$ d) $-3; 1; 2$
81. $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\pm \left[\sqrt{\sqrt{3}-1}; -\frac{\pi}{4}\right]$