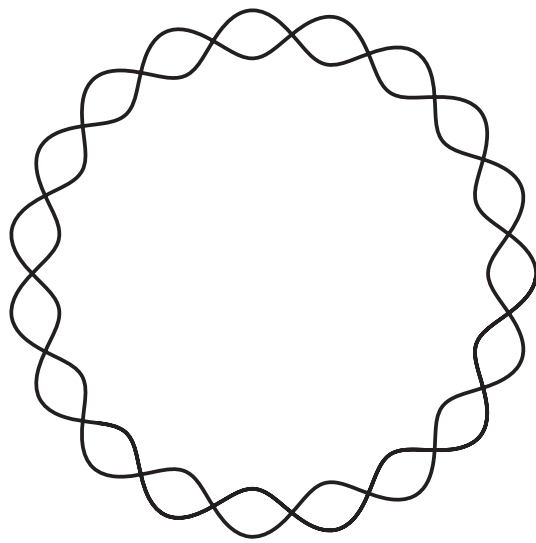


CONIQUES

2005



$$r = \cos(9,5t) + 10$$

TABLE DES MATIÈRES

Ellipse	1
Equation d'une ellipse centrée à l'origine et d'axe focal Ox	2
Equation d'une ellipse de centre $(\alpha ; \beta)$ et d'axe focal horizontal	3
Equation d'une ellipse d'axe focal vertical	4
Tangentes à une ellipse	5
Directrices d'une ellipse	6
Propriété optique de l'ellipse	7
Hyperbole	8
Equation d'une hyperbole centrée à l'origine et d'axe focal Ox	9
Asymptotes d'une hyperbole	10
Directrices d'une hyperbole	11
Tangentes à une hyperbole	12
Propriété optique de l'hyperbole	13
Hyperbole rapportée à ses asymptotes	14
Une propriété des sécantes d'une hyperbole	15
Parabole	16
Equation d'une parabole	17
Tangentes à une parabole	18
Propriété optique de la parabole	19
Section elliptique d'un cône	20
Section hyperbolique d'un cône	21
Section parabolique d'un cône	22
Tangentes de pente m à une conique	23
Polaire	24
Redressement d'une courbe du 2e degré	25

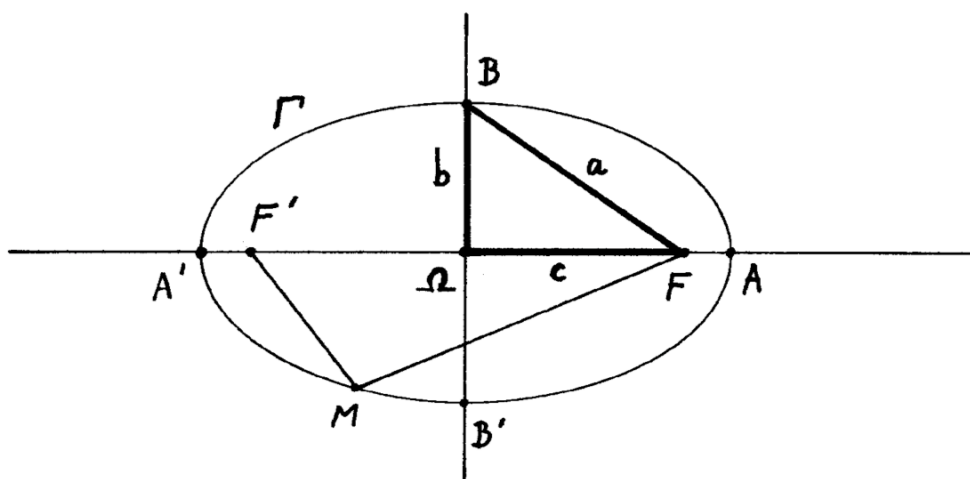
§ 1. ELLIPSE

Définition ("du jardinier")

Soit F et F' deux points, et a un réel strictement supérieur à $\frac{1}{2}FF'$.

On appelle ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$ le lieu géométrique Γ des points dont la somme des distances à F et F' égale $2a$:

$$\Gamma = \{ M \mid \underline{\underline{MF + MF' = 2a}} \}$$



On nomme :

- centre de l'ellipse Γ le milieu Ω de FF' ;
- axe focal ou grand axe de l'ellipse la droite FF' ;
- petit axe la perpendiculaire à FF' par Ω ;

- sommets les 4 points d'intersection de l'ellipse avec ses deux axes (A, A', B, B');
- demi-grand axe la longueur ΩA ;
- demi-petit axe la longueur ΩB ;
- distance focale la longueur FF' .

Proposition

1. $BF = a$ et $\Omega A = a$
2. Notant $b = \Omega B$ et $c = \Omega F$, on a : $a^2 = b^2 + c^2$

Preuve

1. Lorsque $M = B$, on a $MF = MF'$, donc $MF + MF' = 2MF = 2a$. D'où $BF = a$.
Lorsque $M = A$, on a $MF + MF' = (\Omega A - \Omega F) + (\Omega A + \Omega F) = 2\Omega A$. Ainsi : $\Omega A = a$.
2. Par Pythagore dans le triangle ΩBF .

Excentricité

Le rapport

$$e = \frac{c}{a}$$

s'appelle l'*excentricité* de l'ellipse. Il en mesure le degré d'allongement. Notons que $0 \leq e < 1$.

§ 2. ÉQUATION D'UNE ELLIPSE CENTRÉE À L'ORIGINE ET D'AXE FOCAL Ox

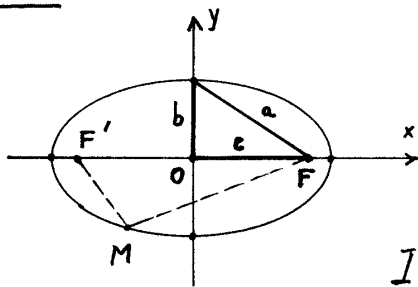
Considérons l'ellipse Γ de centre $O(0;0)$, d'axe focal Ox et de demi-axes a et b ($a \geq b$).

Théorème

Γ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Preuve



Par définition,

$$\Gamma = \{ M \mid MF + MF' = 2a \},$$

où $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$.

Il faut montrer que la

condition $MF + MF' = 2a$ équivaut, pour $M(x; y)$, à $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$MF + MF' = 2a \iff \|\vec{MF}\| + \|\vec{MF'}\| = 2a$$

$$\iff \sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a$$

$$\stackrel{(2a > 0)}{\iff} (c-x)^2 + y^2 + (c+x)^2 + y^2 + 2\sqrt{((c-x)^2 + y^2)((c+x)^2 + y^2)} = 4a^2$$

$$\iff \sqrt{c^4 - 2c^2x^2 + x^4 + 2c^2y^2 + 2x^2y^2 + y^4} = \underbrace{2a^2 - c^2 - x^2 - y^2}_{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow c^4 - 2c^2x^2 + x^4 + 2c^2y^2 + 2x^2y^2 + y^4 = (2a^2 - c^2 - x^2 - y^2)^2$$

et $\alpha \geq 0$

(...)

$$\Leftrightarrow -2c^2x^2 - 2a^4 + 2a^2c^2 + 2a^2x^2 + 2a^2y^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0$$

$$\stackrel{*}{\Leftrightarrow} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0$$

Or, l'égalité $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ implique $\alpha \geq 0$.

En effet :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow x^2 \leq a^2 \quad \text{et} \quad y^2 \leq b^2 \Rightarrow a^2 - x^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad b^2 - y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ a^2 - c^2 (*)}}{a^2 + b^2 - x^2 - y^2} \geq 0 \Rightarrow \alpha = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2 \geq 0.$$

D'où finalement :

$$MF + MF' = 2a \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

* $a^2 = b^2 + c^2$

§ 3. ÉQUATION D'UNE ELLIPSE D'AXE FOCAL HORIZONTAL

On considère une ellipse Γ de centre $\Omega(\alpha; \beta)$, d'axe focal parallèle à Ox et de demi-axes a et b ($a \geq b$).

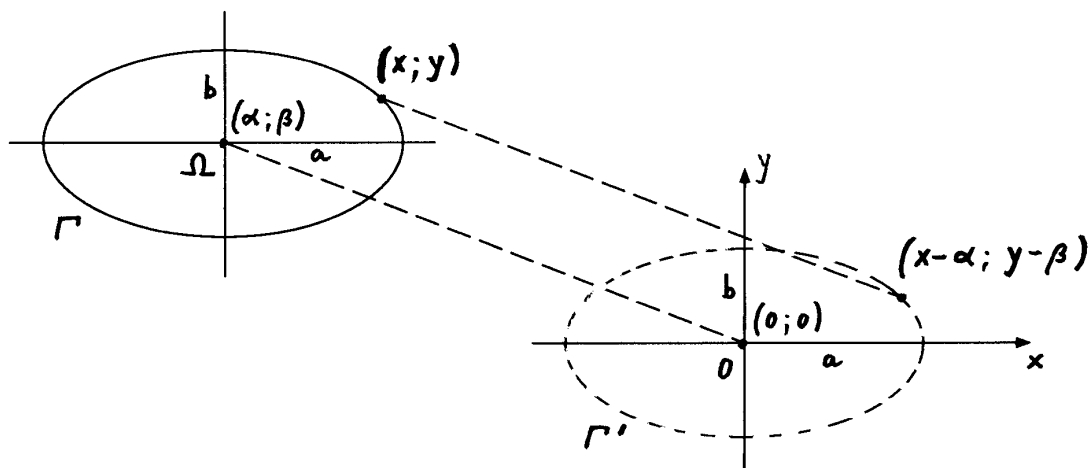
Théorème

L'équation de Γ est :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Preuve

Soit Γ' l'image de Γ par la translation amenant Ω sur O .



On sait déjà que $(u; v) \in \Gamma' \iff \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$

Ainsi :

$$\begin{aligned}(x; y) \in \Gamma &\iff (x-\alpha; y-\beta) \in \Gamma' \\ &\iff \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.\end{aligned}$$

Remarque

L'équation ci-dessus est dite équation canonique de Γ .

Exemple

Une ellipse Γ est donnée par l'équation

$$9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0$$

Trouver son équation canonique.

$$(9x^2 - 18x) + (16y^2 + 64y) = 71$$

$$9(x^2 - 2x) + 16(y^2 + 4y) = 71$$

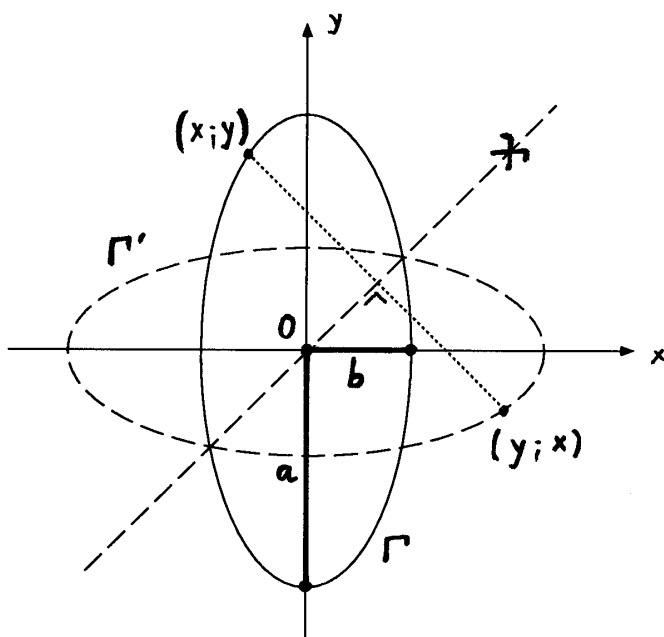
$$9((x-1)^2 - 1) + 16((y+2)^2 - 4) = 71$$

$$9(x-1)^2 + 16(y+2)^2 = 144 \quad || : 144$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{144}{9}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{144}{16}} = 1 \quad ; \quad \underline{\underline{\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1}}$$

§ 4. ÉQUATION D'UNE ELLIPSE D'AXE FOCAL VERTICAL

1. Soit Γ l'ellipse de centre $O(0;0)$, d'axe focal Oy et de demi-axes a et b ($a \geq b$), et soit Γ' l'ellipse symétrique de Γ par rapport à la bissectrice du 1^{er} quadrant.



On a :

$$(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow (y;x) \in \Gamma'$$

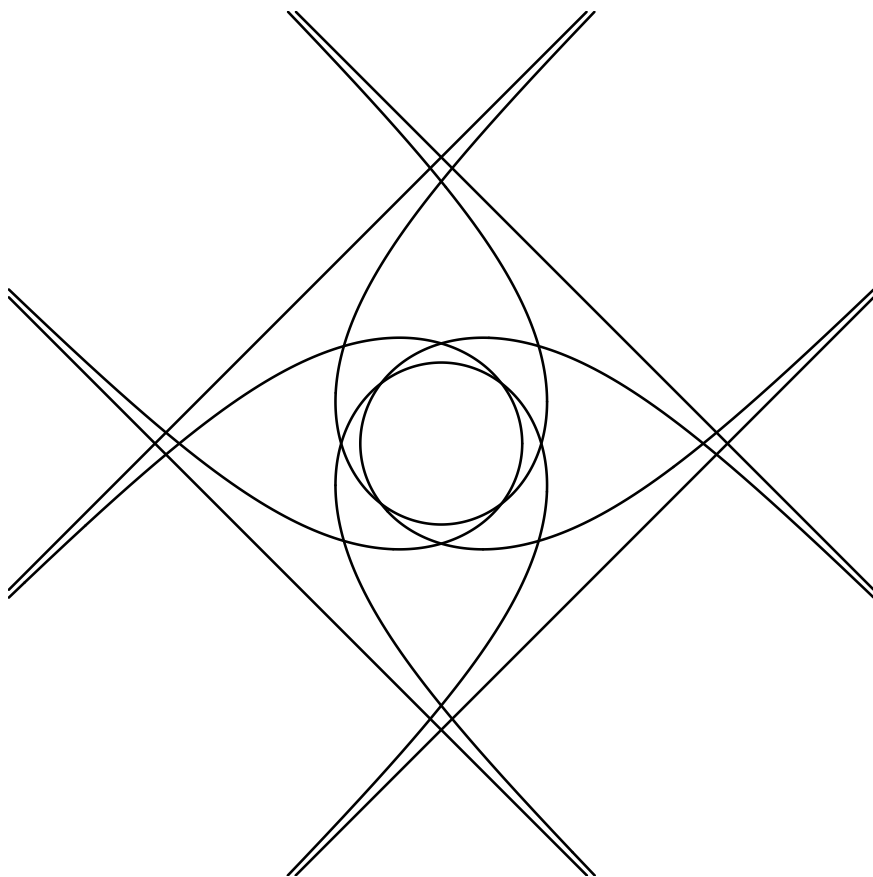
$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

L'équation de Γ peut donc s'écrire :

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

2. Si le centre de Γ est $\Omega(\alpha;\beta)$, une translation de vecteur $\vec{\Omega O}$ nous ramène au cas ci-dessus. Equation de Γ :

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1}$$



$$\text{CR}\left(\frac{z^7}{1+z^4}\right)$$

§ 5. TANGENTES À UNE ELLIPSE

Théorème

La tangente en un point $(x_0; y_0)$ d'une ellipse $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation :

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

(L'équation de la tangente s'obtient donc par "dédoublément" de l'équation de Γ .)

Preuve

Remarquons d'abord que l'équation de Γ peut s'écrire $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Γ est donc la réunion des graphes des deux fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ et $g(x) = -f(x)$. Soit maintenant $(x_0; y_0) \in \Gamma$.

Distinguons 3 cas :

- 1er cas $x_0 \in]-a; a[$ et $y_0 > 0$.

L'équation de la tangente en $(x_0; y_0)$ est :

$$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

$$\text{Or } f'(x) = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-bx}{a(\frac{a}{b}f(x))} = \frac{-b^2 x}{a^2 f(x)}.$$

Donc : $t : y - y_0 = \frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0)$

$$\Leftrightarrow a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = -b^2 x_0 x + b^2 x_0^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

• 2^e cas $x_0 \in]-a; a[$ et $y_0 < 0$.

Comme ci-dessus, mais avec la fonction g .

• 3^e cas $x_0 = \pm a$ et $y_0 = 0$

Ici, l'équation dédoublee équivaut à $\frac{(\pm a)x}{a^2} = 1$,

c'est-à-dire à $x = \pm a$.

Il suffit donc de montrer que les tangentes à Γ en $(\pm a; 0)$ sont verticales. Cela découle du fait que :

$$\lim_{x \rightarrow -a} f'(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -a} g'(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = +\infty$$

Généralisation

Si l'équation de l'ellipse Γ est $A(x - \alpha)^2 + B(y - \beta)^2 = C$, la tangente au point $(x_0; y_0)$ de Γ a pour équation

$$A(x_0 - \alpha)(x - \alpha) + B(y_0 - \beta)(y - \beta) = C$$

Si l'équation de l'ellipse est $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, la tangente au point $(x_0; y_0)$ a pour équation

$$Ax_0 x + By_0 y + \frac{C}{2} x_0 + \frac{C}{2} x + \frac{D}{2} y_0 + \frac{D}{2} y + E = 0$$

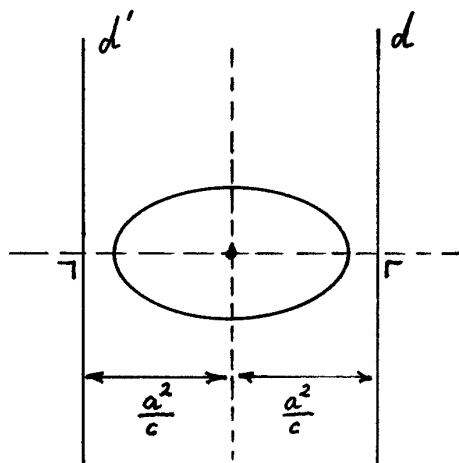
§ 6. DIRECTRICES D'UNE ELLIPSE

Dans ce qui suit, Γ désigne une ellipse de centre Ω , de $\frac{1}{2}$ -axes a et b ($a > b$) et de $\frac{1}{2}$ -distance focale c .

Définition

On appelle directrices de Γ les deux perpendiculaires au grand axe dont la distance au centre Ω est

$$\boxed{\frac{a^2}{c}}.$$



Théorème

Soit d l'une des directrices de Γ , F le foyer situé entre d et Ω et $e = \frac{c}{a}$ l'excentricité de Γ .

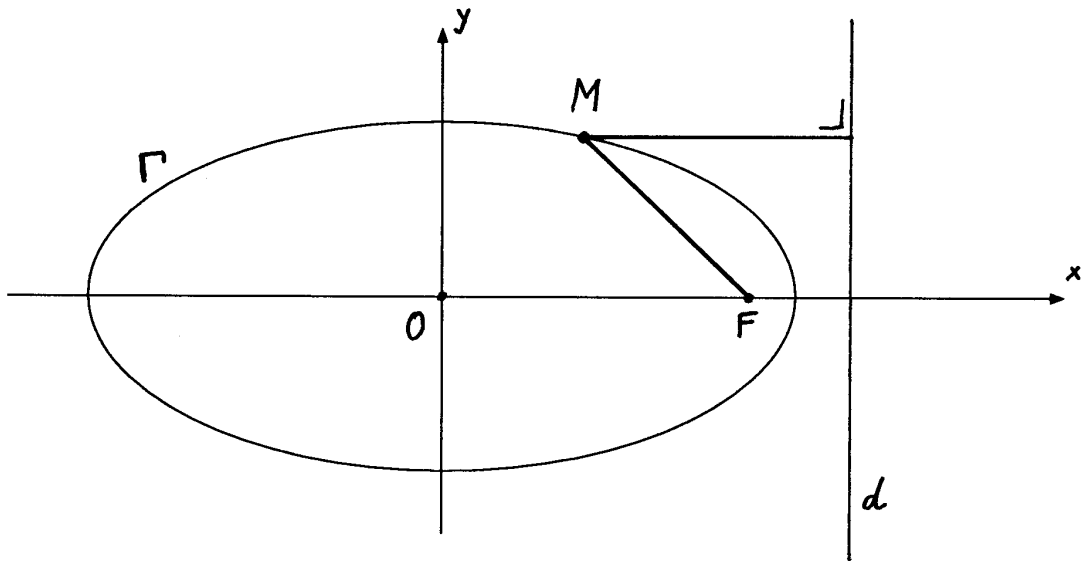
Alors, l'ellipse Γ est le lieu géométrique des points M vérifiant :

$$\boxed{\frac{\delta(M, F)}{\delta(M, d)} = e}$$

Preuve :

Plaçons le repère orthonormé Oxy de façon que Ω coïncide avec O et que F appartienne à la partie positive de l'axe Ox . Alors :

$$F(c; 0), \quad \Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad d: x = \frac{a^2}{c}.$$



Il suffit de montrer que, pour tout $M(x; y)$,

$$\frac{\delta(M, F)}{\delta(M, d)} = \frac{c}{a} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{\delta(M, F)}{\delta(M, d)} = \frac{c}{a} \iff a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = c \left| x - \frac{a^2}{c} \right|$$

$$\iff a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = c^2 \left(x - \frac{a^2}{c} \right)^2$$

$$\iff a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2xc + a^4$$

$$\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

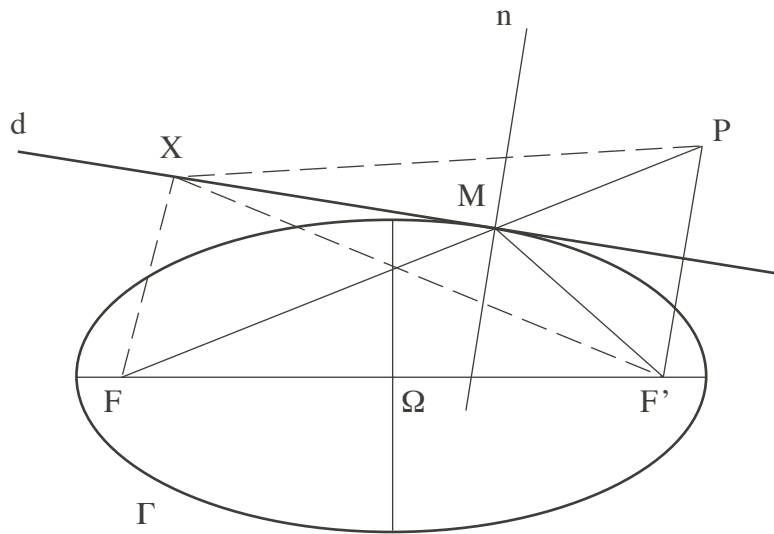
§ 7. PROPRIÉTÉ OPTIQUE DE L'ELLIPSE

Théorème

Soit M un point d'une ellipse Γ de foyers F et F' .

La normale et la tangente à Γ en M sont les bissectrices des "rayons focaux" MF et MF' .

Démonstration



Soit d la bissectrice extérieure en M du triangle FMF' et P le symétrique de F' par rapport à d . On établit facilement que F , M et P sont alignés, et on voit que

$$FP = FM + MP = FM + MF' = 2a \quad (= \text{grand axe de } \Gamma)$$

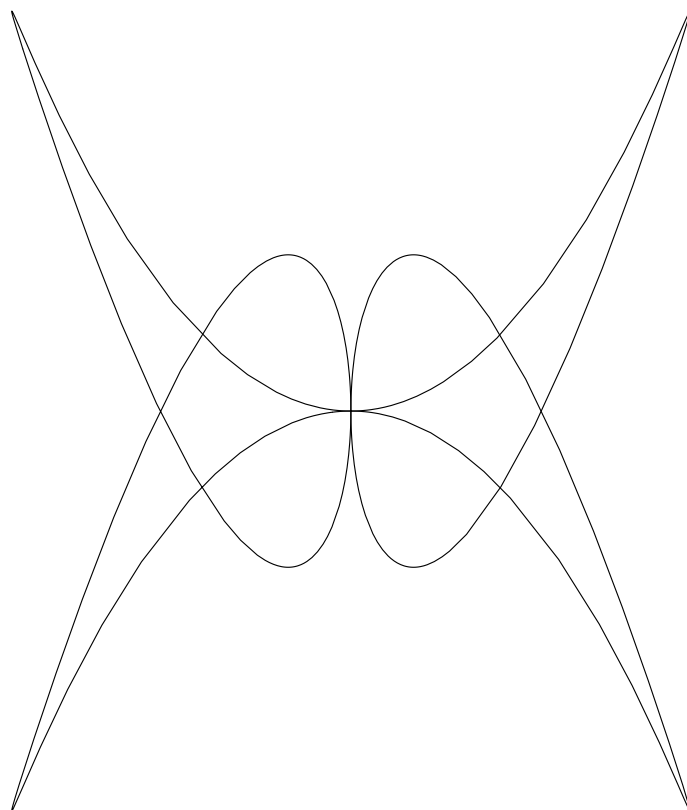
Soit maintenant X un point quelconque de d distinct de M . On a :

$$XF + XF' = XF + XP > FP = 2a$$

Il en résulte que quel que soit $X \in d - \{M\}$, X est à l'extérieur de l'ellipse, donc que d est tangente à l'ellipse en M . Ainsi, la tangente en M est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$, et la normale sa bissectrice intérieure.

Conséquence

Un rayon lumineux issu d'un foyer sera réfléchi par l'ellipse sur l'autre foyer.



$$\begin{cases} x = 2 \cos t - 2 \cos(3t) \\ y = 2 \sin t - 2 \sin(5t) \end{cases}$$

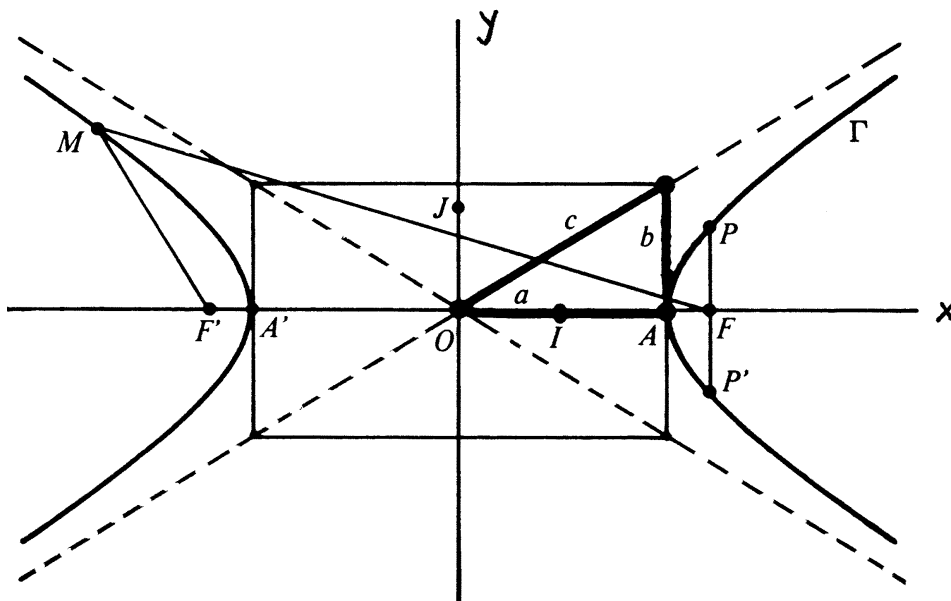
§ 8. HYPERBOLE

Définition

On donne deux points F et F' ainsi qu'un nombre a tels que $0 < 2a < FF'$.

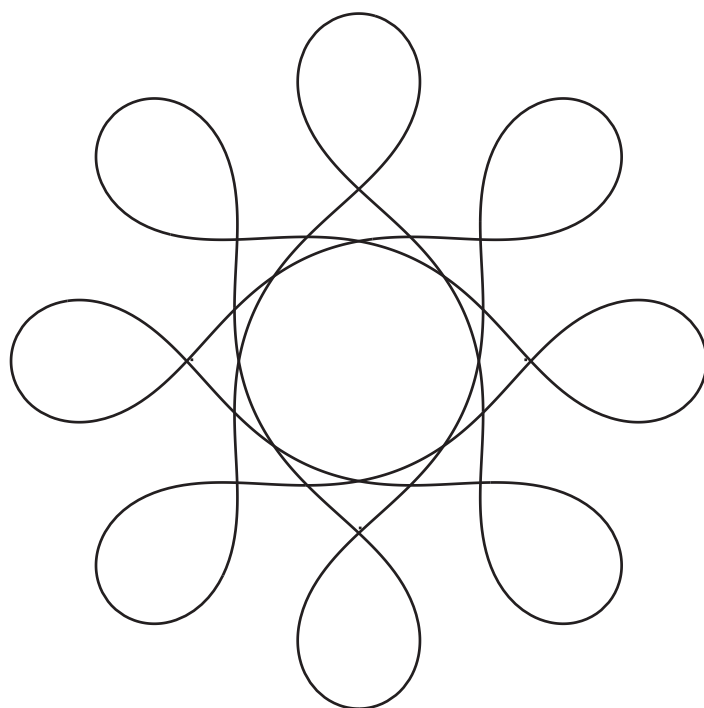
L'**hyperbole** de foyers F et F' et d'axe transverse $2a$ est l'ensemble Γ des points M du plan dont la valeur absolue de la différence des distances à F et F' est égale à $2a$:

$$\Gamma = \left\{ M \mid |MF - MF'| = 2a \right\}$$



Propriétés et terminologie

- L'hyperbole possède deux axes de symétrie orthogonaux; l'un, passant par les foyers, est appelé **axe focal** ou **axe transverse** et l'autre **axe non transverse**. L'hyperbole admet un centre de symétrie, appelé **centre** de l'hyperbole.
- Les points d'intersection A et A' de la courbe avec l'axe transverse sont les **sommets** de l'hyperbole.
- On désigne par $2c$ la **distance focale** FF' . Ainsi : $0 < a < c$.
- OA est appelé **demi-axe transverse**. On a $OA = a$.
- On appelle **excentricité** de l'hyperbole le nombre $e = \frac{c}{a}$; ce rapport est toujours supérieur à 1.
- On appelle **paramètre** de l'hyperbole la longueur $2p$ de la "corde focale" $(P'P)$ perpendiculaire à l'axe transverse : $2p = \frac{2b^2}{a}$.



$$\text{CR}\left(\frac{1}{8z^3 - 4z^{11}}\right)$$

§ 9. ÉQUATION D'UNE HYPERBOLE CENTRÉE À L'ORIGINE ET D'AXE FOCAL Ox

Considérons l'hyperbole Γ de centre $O(0;0)$, d'axe focal Ox , d'axe transverse $2a$ et de distance focale $2c$.

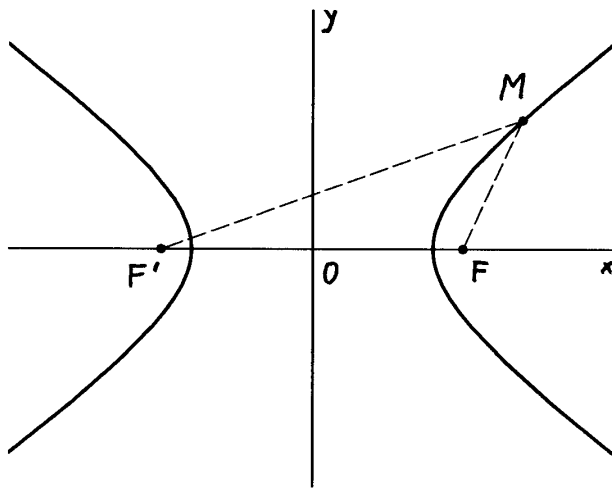
Théorème

Γ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

où b est défini par $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Preuve



Par définition,

$$\Gamma = \{ M \mid |MF - MF'| = 2a \},$$

avec $F(c;0)$ et $F'(-c;0)$.

On doit montrer que la condition

$|MF - MF'| = 2a$ équivaut, pour $M(x; y)$, à

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$|MF - MF'| = 2a \iff \left| \sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(c+x)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\iff (c-x)^2 + y^2 + (c+x)^2 + y^2 - 2\sqrt{((c-x)^2 + y^2)((c+x)^2 + y^2)} = 4a^2$$

$$\iff \sqrt{((c-x)^2 + y^2)((c+x)^2 + y^2)} = \underbrace{x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2}_{\alpha}$$

$$\iff ((c-x)^2 + y^2)((c+x)^2 + y^2) = \alpha^2 \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0$$

$$\stackrel{(\dots)}{\iff} (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0$$

$$\stackrel{b^2 = c^2 - a^2}{\iff} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0$$

$$\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0.$$

Or, l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ implique $\alpha \geq 0$.

En effet :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \implies x^2 \geq a^2$$

$$\implies \alpha = x^2 + y^2 + b^2 - a^2 \geq y^2 + b^2 \geq 0.$$

Ainsi :

$$|MF - MF'| = 2a \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

N.B.

Dans le cas d'une hyperbole, la relation entre les paramètres a , b et c est :

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

§ 10. ASYMPTOTES D'UNE HYPERBOLE

Théorème

L'hyperbole $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet pour asymptotes les droites d'équations

$$\underline{\underline{y = \frac{b}{a} x}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{y = -\frac{b}{a} x}}$$

La réunion des deux asymptotes a donc pour équation :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}$$

Preuve

Comme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$,

Γ est la réunion des graphes des fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ et $g(x) = -f(x)$.

Il suffit donc de montrer que les quatre limites suivantes sont nulles :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{b}{a} x \right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(g(x) - \frac{b}{a} x \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) + \frac{b}{a} x \right)$$

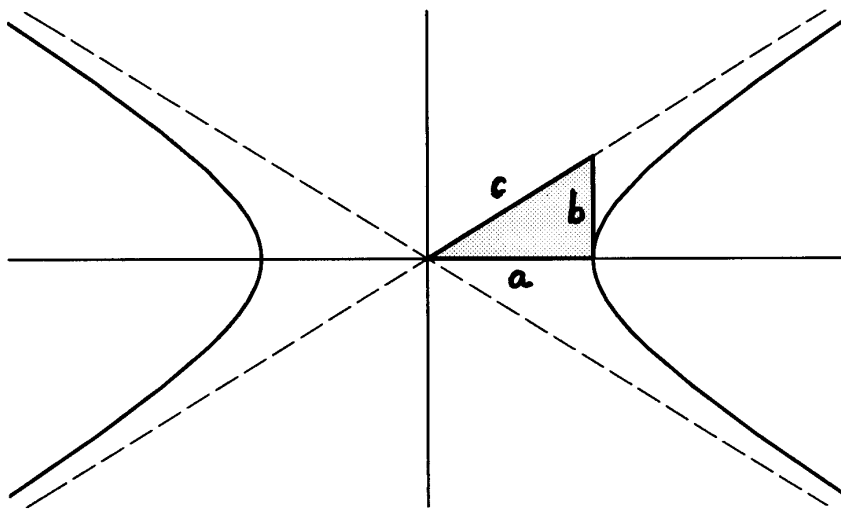
$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{b}{a} x \right)$$

Traisons le premier cas, les autres étant semblables.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{b}{a} x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0. \end{aligned}$$

Conséquence

On peut insérer entre l'hyperbole et ses asymptotes un triangle rectangle de côtés a , b et c :



Cas d'une hyperbole d'axe focal Oy

Les équations des asymptotes s'écrivent alors :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \frac{a}{b} x$$

Définition. On qualifie d'*équilatère* une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires. Dans ce cas, on a $a = b$.

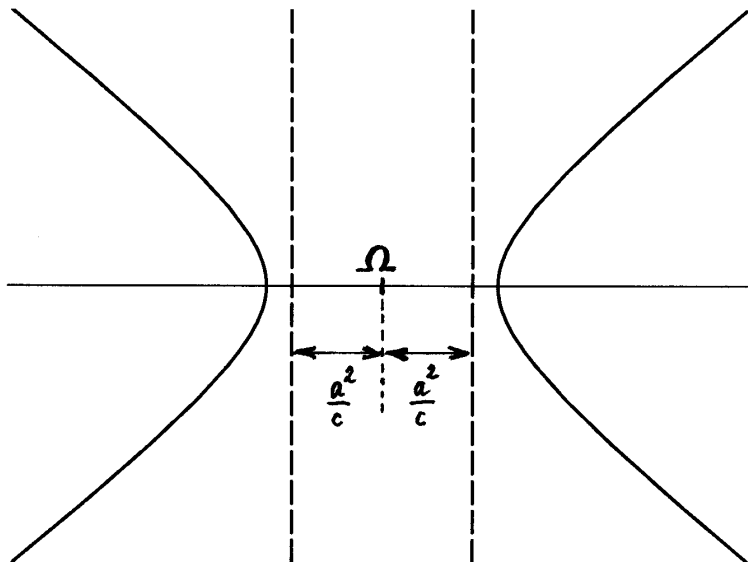
§ 11. DIRECTRICES D'UNE HYPERBOLE

Dans ce qui suit, Γ désigne une hyperbole de centre Ω , avec les paramètres habituels a, b et c .

Définition

On appelle directrice de Γ chacune des deux perpendiculaires à l'axe focal dont la distance au centre Ω est

$$\boxed{\frac{a^2}{c}}$$



Théorème

Soit d l'une des directrices de Γ , F le foyer le plus proche de d et $e = \frac{c}{a}$ l'excentricité de Γ ($e > 1$).

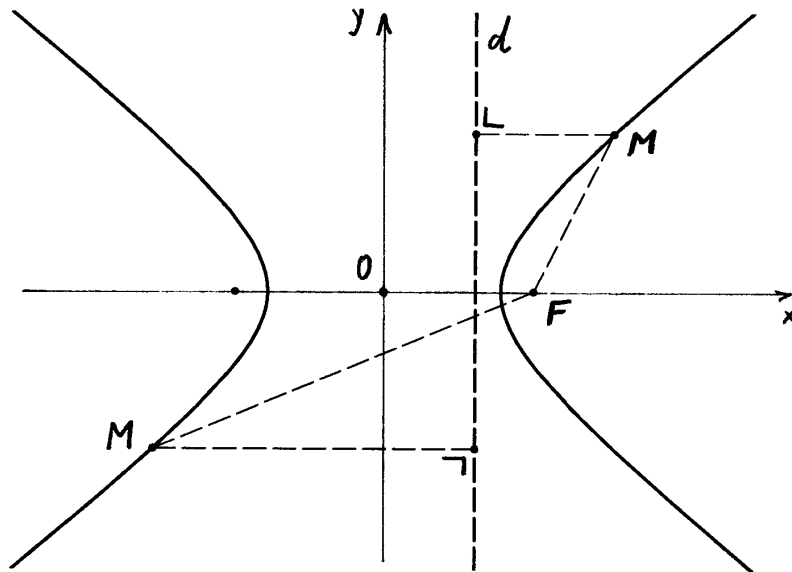
L'hyperbole Γ est le lieu géométrique des points M vérifiant :

$$\boxed{\frac{\delta(M, F)}{\delta(M, d)} = e}$$

Preuve

Plaçons le repère orthonormé Oxy de façon que Ω coïncide avec O et que F appartienne à la partie positive de l'axe Ox . Ainsi :

$$F(c; 0), \quad \Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad d: x = \frac{a^2}{c}.$$



Il suffit de montrer que $\frac{S(M, F)}{S(M, d)} = \frac{c}{a}$ équivaut à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pour tout $M(x, y)$.

$$\frac{S(M, F)}{S(M, d)} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = c\left|x - \frac{a^2}{c}\right|$$

$$\Leftrightarrow a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = c^2\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow -b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \quad (c^2 = a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§ 12. TANGENTES À UNE HYPERBOLE

Théorème

La tangente en un point $(x_0 ; y_0)$ de l'hyperbole $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation :

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Preuve

Elle est analogue à celle qui a été donnée pour l'ellipse.

Corollaire

Si l'équation de l'hyperbole Γ est $A(x - \alpha)^2 + B(y - \beta)^2 = C$, la tangente au point $(x_0 ; y_0)$ de Γ a pour équation

$$A(x_0 - \alpha)(x - \alpha) + B(y_0 - \beta)(y - \beta) = C$$

Si l'équation de l'hyperbole est $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, la tangente au point $(x_0 ; y_0)$ a pour équation

$$Ax_0 x + By_0 y + \frac{C}{2} x_0 + \frac{C}{2} x + \frac{D}{2} y_0 + \frac{D}{2} y + E = 0$$

§ 13. PROPRIÉTÉ OPTIQUE DE L'HYPERBOLE

Lemme

Pour tout point $M(u; v)$ de l'hyperbole $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ de foyers $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$, on a :

$$MF = \left| a - \frac{cu}{a} \right| \quad MF' = \left| a + \frac{cu}{a} \right|$$

Preuve : cf. exercices.

Théorème (Propriété optique)

Soit M un point d'une hyperbole Γ de foyers F et F' .

La normale et la tangente à Γ en M sont les bissectrices des "rayons focaux" MF et MF' .

Preuve

Introduisons le repère orthonormé Oxy relativement auquel l'équation de Γ est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$. La tangente t au point $M(u; v)$ de Γ a pour équation $\frac{ux}{a^2} - \frac{vy}{b^2} = 1$; elle coupe donc l'axe focal Ox en $P\left(\frac{a^2}{u}; 0\right)$. Nous allons montrer que t est la bissectrice intérieure en M du triangle $FF'M$. En vertu du *théorème des bissectrices*, il suffit d'établir deux choses : a) que P est entre F et F' ; b) que $\frac{PF}{PF'} = \frac{MF}{MF'}$.

a) $|x_P| = \left| \frac{a^2}{u} \right| = \frac{a^2}{|u|} \leq \frac{a|u|}{|u|} = a < c$. P est donc bien entre F et F' .

b) $\frac{PF}{PF'} = \frac{\left| c - \frac{a^2}{u} \right|}{\left| -c - \frac{a^2}{u} \right|} = \frac{|cu - a^2|}{|cu + a^2|}$ et, par le lemme : $\frac{MF}{MF'} = \frac{\left| a - \frac{cu}{a} \right|}{\left| a + \frac{cu}{a} \right|} = \frac{|a^2 - cu|}{|a^2 + cu|}$.

D'où : $\frac{PF}{PF'} = \frac{MF}{MF'}$.

Conséquence

Un rayon lumineux issu d'un foyer sera réfléchi par l'hyperbole en un rayon dont le support passe par l'autre foyer.

§ 14. HYPERBOLE RAPPORTÉE À SES ASYMPTOTES

Théorème

Soit une hyperbole Γ de centre O , de demi-distance focale c et d'asymptotes a_1 et a_2 .

Envisageons un repère $(O; E_1; E_2)$ tel que $E_1 \in a_1$, $E_2 \in a_2$ et $OE_1 = OE_2 = 1$.

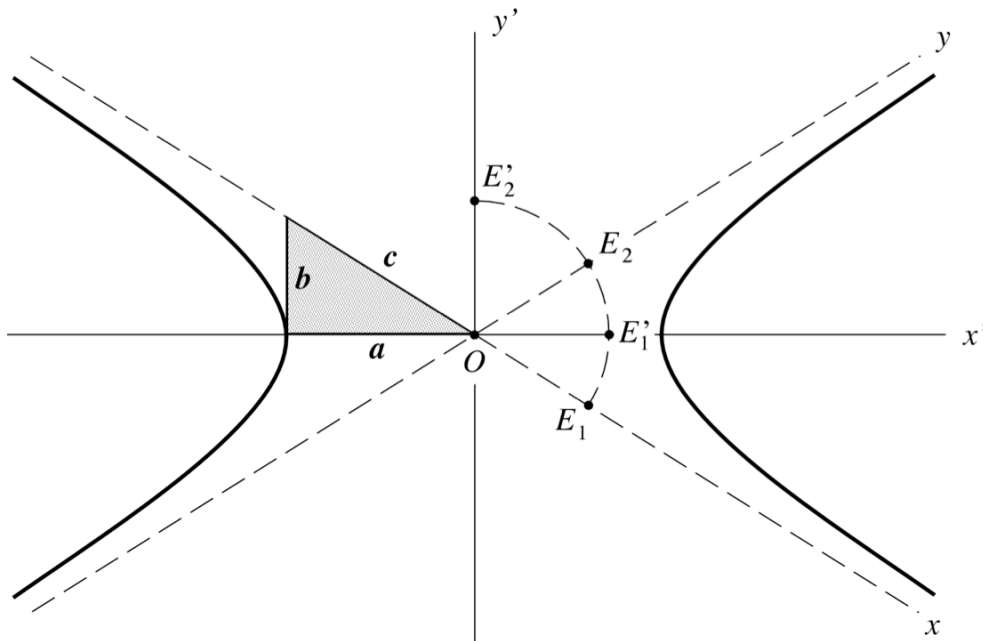
Relativement à ce repère, l'équation de Γ est :

$$xy = k, \quad \text{avec} \quad |k| = \frac{c^2}{4}$$

Preuve

Supposons que le repère $R = (O; E_1; E_2)$ est orienté positivement, et que $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2}$ a la direction de l'axe focal de Γ . Montrons qu'alors l'équation de Γ relativement à R est

$$xy = \frac{c^2}{4}$$



Introduisons le repère orthonormé $R' = (O; E'_1; E'_2)$ orienté positivement et tel que $\overrightarrow{OE'_1}$ soit de même sens que $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2}$. Relativement à ce repère, on sait que l'équation de Γ est

$$b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = a^2 b^2 \quad (1)$$

Soit maintenant un point M quelconque du plan. Si $(x; y)$ sont les coordonnées de M relatives au repère R , et si $(x'; y')$ sont celles relatives à R' , on a :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 \quad (2)$$

où $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$, $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{OE'_1}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{OE'_2}$.

Or, on montre sans peine que les coordonnées de E_1 et E_2 relativement au repère R' sont

$$\left(\frac{a}{c}; -\frac{b}{c}\right) \text{ et } \left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right).$$

Ainsi :

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{a}{c}\right)\vec{e}'_1 + \left(\pm\frac{b}{c}\right)\vec{e}'_2 \quad \vec{e}_2 = \left(\frac{a}{c}\right)\vec{e}'_1 + \left(\frac{b}{c}\right)\vec{e}'_2 \quad (3)$$

En insérant (3) dans (2), on obtient $\frac{a}{c}(x+y)\vec{e}'_1 + \frac{b}{c}(y-x)\vec{e}'_2 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2$, et donc :

$$x' = \frac{a}{c}(x+y) \quad y' = \frac{b}{c}(y-x) \quad (4)$$

Il ne reste plus qu'à combiner (4) et (1) :

$$b^2 \frac{a^2}{c^2}(x+y)^2 - a^2 \frac{b^2}{c^2}(y-x)^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - y^2 + 2xy - x^2 = c^2 \Leftrightarrow 4xy = c^2$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{c^2}{4}.$$

La preuve est analogue lorsque le repère R est orienté négativement, ou lorsque $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2}$ est perpendiculaire à l'axe focal. Pour ce dernier cas, l'équation de Γ est

$$xy = -\frac{c^2}{4}$$

§ 15. UNE PROPRIÉTÉ DES SÉCANTES D'UNE HYPERBOLE

Théorème

Une hyperbole et ses asymptotes découpent sur toute sécante deux segments égaux.

Preuve

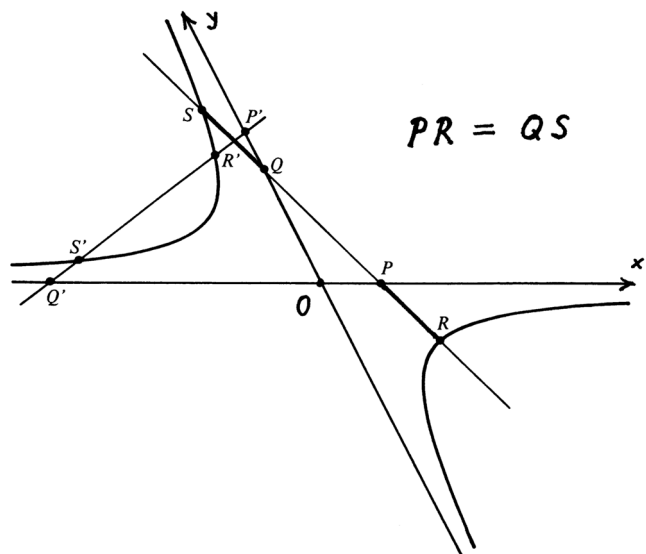
Soit P, Q les points d'intersection de la sécante avec les asymptotes et R, S ceux de la sécante avec l'hyperbole. Montrons que $PR = QS$ en prouvant que les segments PQ et RS ont même milieu.

Rapportons l'hyperbole à ses asymptotes ; son équation est alors :

$$xy = k \quad (1)$$

L'équation d'une sécante quelconque s'écrit :

$$y = mx + h \quad (m \neq 0) \quad (2)$$



Les équations des asymptotes étant $y = 0$ et $x = 0$, leurs intersections avec la sécante sont $P\left(-\frac{h}{m}; 0\right)$ et $Q(0; h)$; le point milieu M de PQ est donc $M\left(-\frac{h}{2m}; \frac{h}{2}\right)$.

L'intersection de la sécante avec l'hyperbole s'obtient en résolvant le système constitué par les équations (1) et (2). En éliminant y , on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} y = mx + h \\ mx^2 + hx - k = 0 \end{cases}$$

La seconde équation permettrait d'obtenir les abscisses des points R et S , mais, comme seul le point milieu N de RS nous intéresse, nous déterminons son abscisse à l'aide d'une formule de Viète :

$$x_N = \frac{x_R + x_S}{2} = -\frac{h}{2m}$$

Les points milieux M et N ont donc même abscisse. Comme ils appartiennent à la même droite (non parallèle à Oy), ils sont confondus.

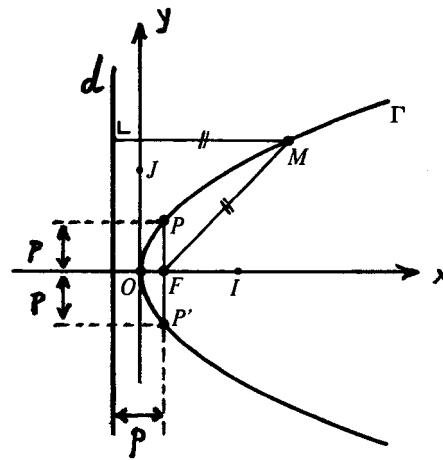
§ 16. PARABOLE

Définition et propriétés

Soit une droite d et un point F n'appartenant pas à d .

La **parabole** de directrice d et de foyer F est l'ensemble Γ des points M du plan équidistants de la droite d et du point F :

$$\Gamma = \left\{ M \mid \delta(M; d) = \delta(M; F) \right\}$$



- La parabole possède un axe de symétrie, passant par son foyer, appelé **axe** (ou *axe focal*) de la parabole.
- Le **sommet** de la parabole est l'intersection de la courbe avec son axe.

Excentricité. Paramètre

On considère la parabole comme une conique d'*excentricité* $e = 1$.

$$e = \frac{\delta(M; F)}{\delta(M; d)} = 1$$

Le *paramètre* $2p$ de la parabole est la longueur de la "corde focale" (PP') perpendiculaire à l'axe.

§ 17. ÉQUATION D'UNE PARABOLE

Soit Γ une parabole de foyer F et de directrice d .
Nommons F_1 la projection de F sur d et p
la distance FF_1 ($= \frac{1}{2}$ -paramètre de Γ)

Choisissons maintenant un repère orthonormé Oxy
de manière que O soit le milieu de FF_1 et que
 F soit sur la partie positive de l'axe Ox .

On a donc : $F(\frac{p}{2}; 0)$ et $d: x = -\frac{p}{2}$.

Théorème

La parabole Γ est l'ensemble des points $M(x; y)$
tels que :

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Preuve

Il suffit de montrer que la condition
 $\delta(M; F) = \delta(M; d)$ qui définit la parabole
équivaut à $y^2 = 2px$:

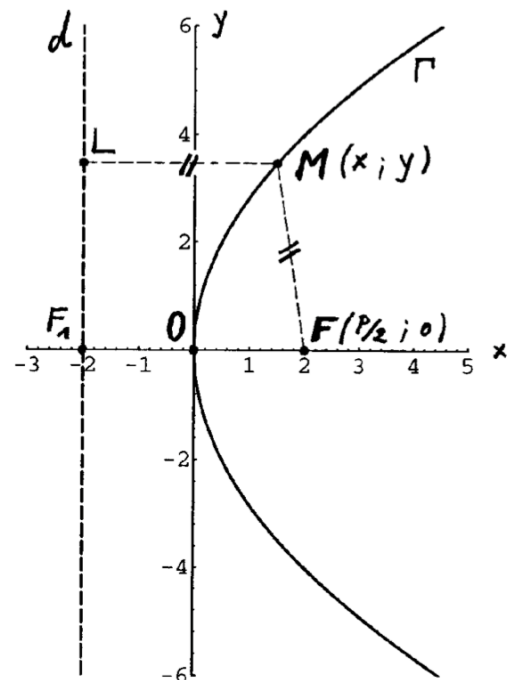
$$\delta(M; F) = \delta(M; d) \Leftrightarrow$$

$$\|\overrightarrow{MF}\| = |x_M - x_D| \Leftrightarrow$$

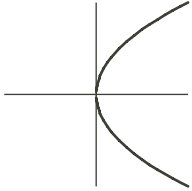
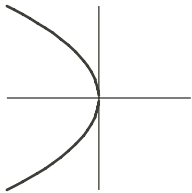
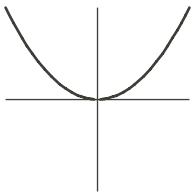
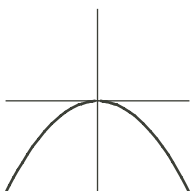
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$y^2 = 2px$$



Plus généralement, le tableau ci-dessous donne les équations de paraboles dont l'axe focal est parallèle à Ox ou à Oy . Notez que si le sommet n'est pas $(0; 0)$, mais $(\alpha; \beta)$, il suffit de remplacer x et y dans les équations par $(x - \alpha)$ et $(y - \beta)$ respectivement.

Γ_1		$y^2 = 2px$
Γ_2		$y^2 = -2px$
Γ_3		$x^2 = 2py$
Γ_4		$x^2 = -2py$

Justification

- $(x; y) \in \Gamma_2 \Leftrightarrow (-x; y) \in \Gamma_1$
- $(x; y) \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (y; x) \in \Gamma_1$
- $(x; y) \in \Gamma_4 \Leftrightarrow (x; -y) \in \Gamma_3$

§ 18. TANGENTES À UNE PARABOLE

Théorème

La tangente en un point $(x_0 ; y_0)$ de la parabole $\Gamma : y^2 = 2px$ a pour équation :

$$y_0 y = px_0 + px$$

Preuve

Γ est la réunion du graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{2px}$ avec celui de $g(x) = -\sqrt{2px}$.

Cas $y_0 > 0$: L'équation de la tangente t en $(x_0 ; y_0)$ est $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Or $f'(x) = \frac{p}{\sqrt{2px}}$. Donc :

$$\begin{aligned} t : y - y_0 &= \frac{p}{\sqrt{2px_0}}(x - x_0) &\Leftrightarrow & y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) &\Leftrightarrow & y_0 y - y_0^2 = px - px_0 \\ &\Leftrightarrow y_0 y - 2px_0 = px - px_0 &\Leftrightarrow & y_0 y = px_0 + px. \end{aligned}$$

Cas $y_0 < 0$: Idem avec la fonction g .

Cas $y_0 = 0$ (et donc $x_0 = 0$) : Il faut montrer que la tangente a pour équation $x = 0$. Cela découle du fait que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p}{\sqrt{2px}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-p}{\sqrt{2px}} = -\infty.$$

Corollaire

Si l'équation de la parabole Γ est $(y - \beta)^2 = \pm 2p(x - \alpha)$, la tangente au point $(x_0 ; y_0)$ de Γ a pour équation $(y_0 - \beta)(y - \beta) = \pm (p(x_0 - \alpha) + p(x - \alpha))$.

Si l'équation de la parabole est $(x - \alpha)^2 = \pm 2p(y - \beta)$, la tangente au point $(x_0 ; y_0)$ a pour équation $(x_0 - \alpha)(x - \alpha) = \pm (p(y_0 - \beta) + p(y - \beta))$.

Si l'équation de la parabole est $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, la tangente au point $(x_0 ; y_0)$ a pour équation $Ax_0 x + By_0 y + \frac{C}{2}x_0 + \frac{C}{2}x + \frac{D}{2}y_0 + \frac{D}{2}y + E = 0$.

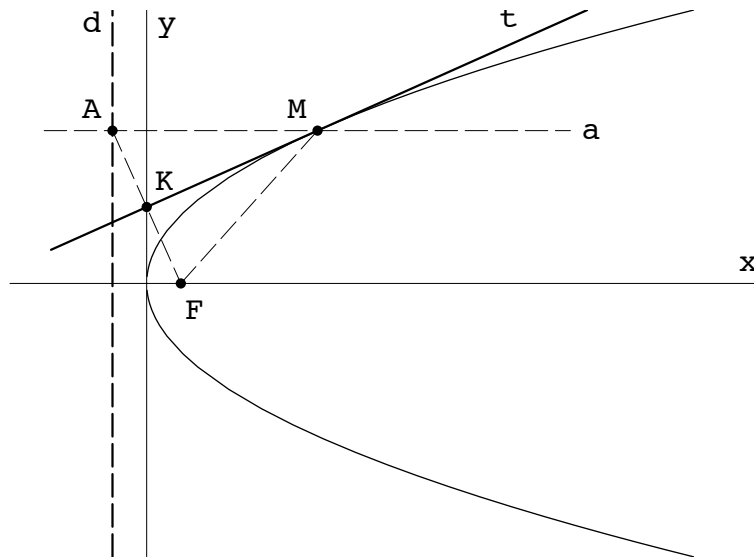
§ 19. PROPRIÉTÉ OPTIQUE DE LA PARABOLE

Théorème

Soit M un point d'une parabole Γ de foyer F et de directrice d , et soit a la parallèle par M à l'axe focal.

La normale et la tangente à Γ en M sont les bissectrices des droites MF et a .

Preuve



Soit $A = a \cap d$. Par définition d'une parabole, le triangle AMF est isocèle en M . Il suffit donc de montrer que le milieu K de AF est sur la tangente t à la parabole en M .

Introduisons un repère orthonormé Oxy de manière que l'équation de Γ soit $y^2 = 2px$.

Alors : $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, $A\left(-\frac{p}{2}; y_0\right)$, $K\left(0; \frac{y_0}{2}\right)$, $t: y_0 y = px_0 + px$.

K est-il sur t ? Oui, car en faisant $x = 0$ dans l'équation de t , on trouve

$$y = \frac{px_0}{y_0} = \frac{p \frac{y_0^2}{2p}}{y_0} = \frac{y_0}{2}$$

Notons encore que le cas $M = O$ est trivial.

Conséquence

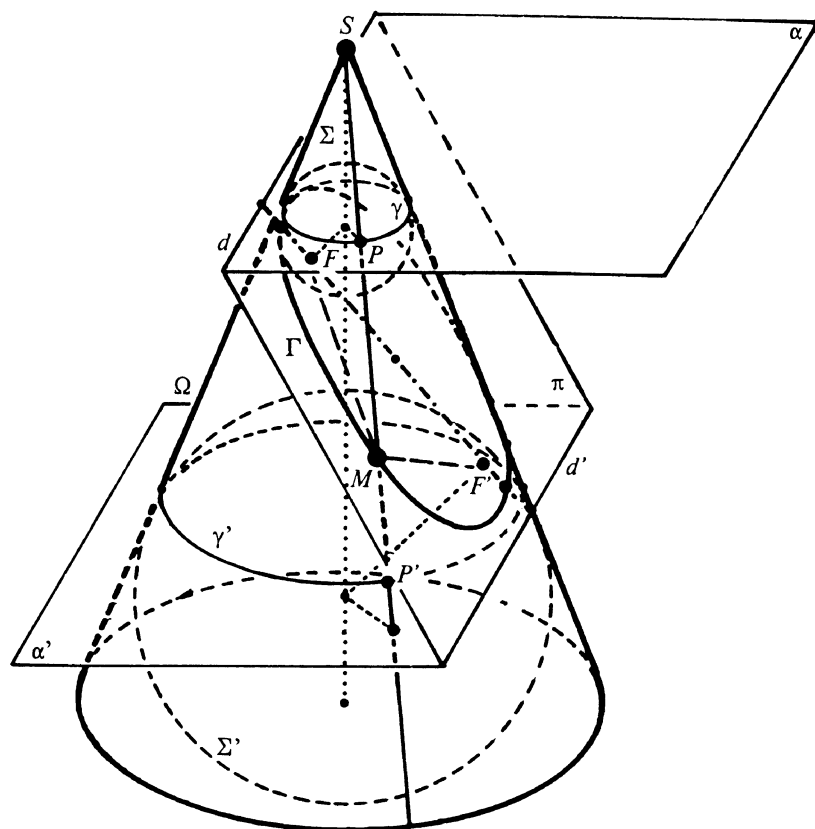
Un rayon lumineux issu du foyer sera réfléchi par la parabole dans la direction de l'axe focal.

§ 20. SECTION ELLIPTIQUE D'UN CÔNE

Théorème

Soit un cône circulaire droit Ω de sommet S . On considère une section de Ω par un plan π ne passant pas par S , ne coupant qu'une des nappes de Ω et n'étant parallèle à aucune génératrice de Ω . Cette section est une *ellipse*.

Preuve



Les deux sphères Σ et Σ' tangentes au cône Ω et au plan π sont appelées *sphère de Dandelin*. Soit γ et γ' les cercles de contact respectifs de Ω avec Σ et Σ' , F et F' les points de contact avec π de Σ et Σ' respectivement. On désigne encore par α et α' les plans des cercles γ et γ' .

Une génératrice quelconque de Ω coupe Γ , γ et γ' en M , P et P' respectivement. Les droites MF et MP (respectivement MF' et MP') sont deux tangentes issues de M à la sphère Σ (respectivement Σ'); on a donc : $MF = MP$ et $MF' = MP'$; d'où :

$$MF + MF' = MP + MP' = PP' = \text{constante}$$

Dans ce cas, Γ est une *ellipse*.

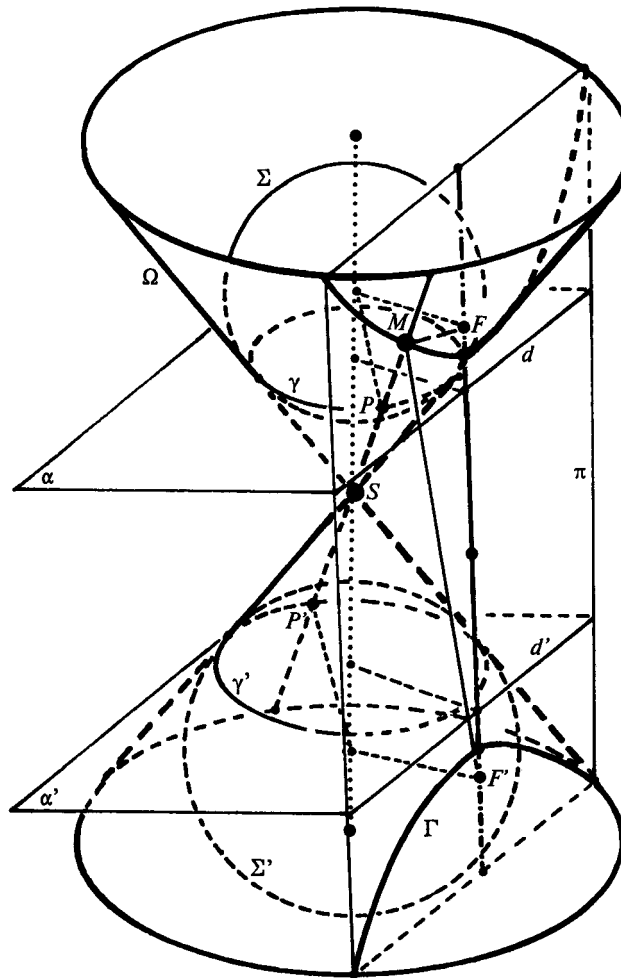
Remarque. Les points F et F' sont les foyers de Γ , les droites d'intersection d et d' de π avec α et α' en sont les directrices.

§ 21. SECTION HYPERBOLIQUE D'UN CÔNE

Théorème

Soit un cône circulaire droit Ω de sommet S . La section de Ω par un plan π ne passant pas par S et coupant les deux nappes de Ω est une *hyperbole*.

Preuve



On considère les mêmes éléments que ceux définis au paragraphe précédent. On obtient alors : $MF = MP$ et $MF' = MP'$; d'où :

$$|MF - MF'| = |MP - MP'| = PP' = \text{constante}$$

Dans ce cas, Γ est une *hyperbole*.

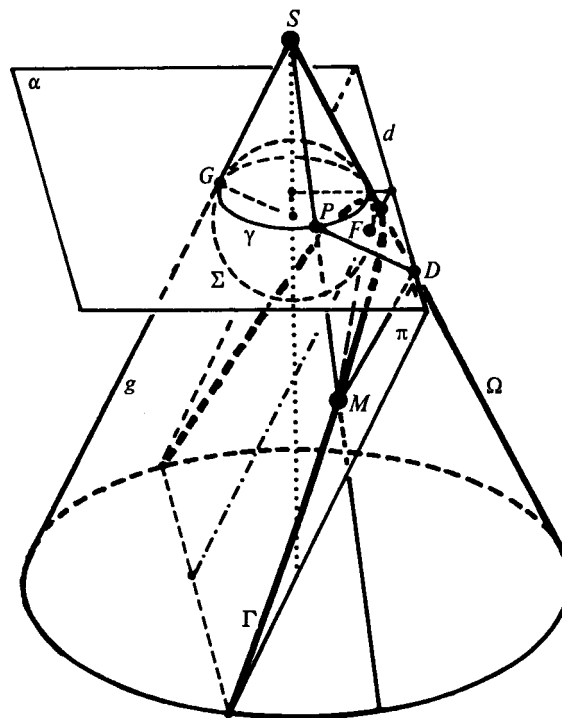
Remarque. Les points F et F' sont les foyers de l'hyperbole Γ , les droites d et d' en sont les directrices.

§ 22. SECTION PARABOLIQUE D'UN CÔNE

Théorème

Soit un cône circulaire droit Ω de sommet S . La section de Ω par un plan π ne passant pas par S et parallèle à une unique génératrice g de Ω est une *parabole*.

Preuve



Dans ce cas, il n'existe qu'une sphère Σ (de Dandelin) tangente à π au point F et tangente à Ω suivant le cercle γ . Soit α le plan du cercle γ , d la droite d'intersection des plans α et π , et G le point d'intersection de la génératrice g avec α . Une génératrice quelconque de Ω (distincte de g) coupe la courbe Γ en M et le cercle γ en P . Soit D le point d'intersection de d avec la parallèle à g par M . La droite MD est perpendiculaire à d . On a alors :

$$MF = MP \quad (MF \text{ et } MP \text{ sont deux tangentes à } \Sigma \text{ issues de } M)$$

$$MP = MD \quad (\text{le triangle } MPD \text{ est semblable au triangle isocèle } SPG)$$

D'où $MF = MD$. Γ est ainsi la *parabole* de foyer F et de directrice d .

§ 23. TANGENTES DE PENTE m À UNE CONIQUE

Equation de la conique	Tangente(s) de pente m
Ellipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$	$y = mx \pm \sqrt{A^2 m^2 + B^2}$
Hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ $y = mx \pm \sqrt{a^2 - b^2 m^2}$
Parabole $y^2 = 2px$ $y^2 = -2px$ $x^2 = 2py$ $x^2 = -2py$	$y = mx + \frac{p}{2m}$ $y = mx - \frac{p}{2m}$ $y = mx - \frac{pm^2}{2}$ $y = mx + \frac{pm^2}{2}$

Si le centre — ou le sommet dans le cas d'une parabole — est $(\alpha; \beta)$, on remplace x et y dans les équations ci-dessus par $(x - \alpha)$ et $(y - \beta)$ respectivement.

§ 24. POLAIRE

On considère une conique Γ dont l'axe focal a la direction de Ox ou de Oy . Son équation peut s'écrire

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

Soit $P(x_0 ; y_0)$ un point quelconque du plan.

Définition

On appelle *polaire* de P relativement à Γ la droite d'équation

$$ax_0x + by_0y + \frac{c}{2}x_0 + \frac{c}{2}x + \frac{d}{2}y_0 + \frac{d}{2}y + e = 0$$

Propriété 1

Si P est sur la conique Γ , sa polaire est la tangente à Γ en P .

La vérification est laissée aux bons soins du lecteur.

Propriété 2 (Théorème de réciprocité)

Relativement à Γ , et pour deux points A et B ,

$$B \in \text{polaire de } A \iff A \in \text{polaire de } B$$

Preuve

L'équation de la polaire de $A(x_A ; y_A)$ est :

$$ax_Ax + by_Ay + \frac{c}{2}x_A + \frac{c}{2}x + \frac{d}{2}y_A + \frac{d}{2}y + e = 0$$

L'équation de la polaire de $B(x_B ; y_B)$ est :

$$ax_Bx + by_By + \frac{c}{2}x_B + \frac{c}{2}x + \frac{d}{2}y_B + \frac{d}{2}y + e = 0$$

Ainsi : $B \in \text{polaire de } A$

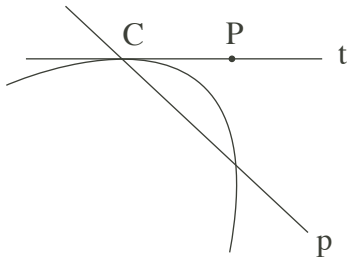
$$\iff ax_Ax_B + by_Ay_B + \frac{c}{2}x_A + \frac{c}{2}x_B + \frac{d}{2}y_A + \frac{d}{2}y_B + e = 0$$

$$\iff A \in \text{polaire de } B.$$

Propriété 3

Si du point P on peut mener une tangente à la courbe Γ , la polaire de P relativement à Γ passe par le point de contact de cette tangente avec Γ .

Preuve



Hypothèse : t tangente en C à Γ par P
 p = polaire de P rel. à Γ

Conclusion : $C \in p$

En vertu de la propriété 1, on sait que t est la polaire de C relativement à Γ ; P est donc sur la polaire de C . On en déduit, par réciprocité, que C appartient à la polaire de P .

§ 25. REDRESSEMENT D'UNE COURBE DU 2^e DEGRÉ

1. Courbe du 2^e degré dans $\mathbb{R}^2$

Soient a, b, c, d, e, f des réels, les trois premiers n'étant pas tous nuls.

L'ensemble des points du plan dont les coordonnées canoniques (x, y) vérifient l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

s'appelle une courbe du 2^e degré.

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $N = 2 \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$, l'équation ci-dessus prend la forme matricielle

$${}^tXMX + {}^tNX + f = 0.$$

On remarque que M est symétrique.

2. Un résultat d'algèbre linéaire

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique.

Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de M .

Preuve

Le polynôme caractéristique de M est

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+c)x + (ac-b^2).$$

Son discriminant s'écrit : $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$.

Il est donc ≥ 0 .

Par suite, M possède au moins un vecteur propre non nul, disons $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Montrons que $\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$, perpendiculaire à $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, est également propre.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ propre} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & \alpha \\ b\alpha + c\beta & \beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \underline{a\alpha\beta} + \underline{b\beta^2} - \underline{b\alpha^2} - \underline{c\alpha\beta} = 0 \iff \alpha(a\beta - b\alpha) + \beta(b\beta - c\alpha) = 0$$

$$\xLeftrightarrow[\text{produit scalaire}]{\text{produit}} \begin{pmatrix} a\beta - b\alpha \\ b\beta - c\alpha \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \text{ propre.}$$

Ainsi, $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée formée de vecteurs propres de M .

3. Théorème de redressement

Soit Γ une courbe du 2^e degré d'équation
 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ (relativement
à la base canonique).

Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ relativement
à laquelle l'équation de Γ est de la forme

$$Ax'^2 + Cy'^2 + 2Dx' + 2Ey' + f = 0.$$

(pas de terme en $x'y'$)

Les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de M .

Les coefficients A et C sont les valeurs propres de M .

Preuve

Partons de l'équation matricielle de Γ :

$${}^tXMX + {}^tNX + f = 0 \quad (*)$$

dans laquelle $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $N = 2 \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$.

En vertu du n°2 ci-dessus, il existe une base ortho-
normée B' formée de vecteurs propres de M .

La matrice de passage P de la base canonique B
à B' est donc orthogonale, et $M' = {}^tPMP$ est

diagonale. Notons $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les composantes relatives
à B' de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On sait que $X = PX'$.

En remplaçant X par PX' dans $(*)$, on trouve l'équation de Γ relativement à B' :

$${}^t(PX')M(PX') + {}^tN(PX') + f = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tX'{}^tPMPX' + {}^tN'PX' + f = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tX'M'X' + {}^tN'PX' + f = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tX'M'X' + {}^tN'X' + f = 0 \quad (\text{où } N' = {}^tPN)$$

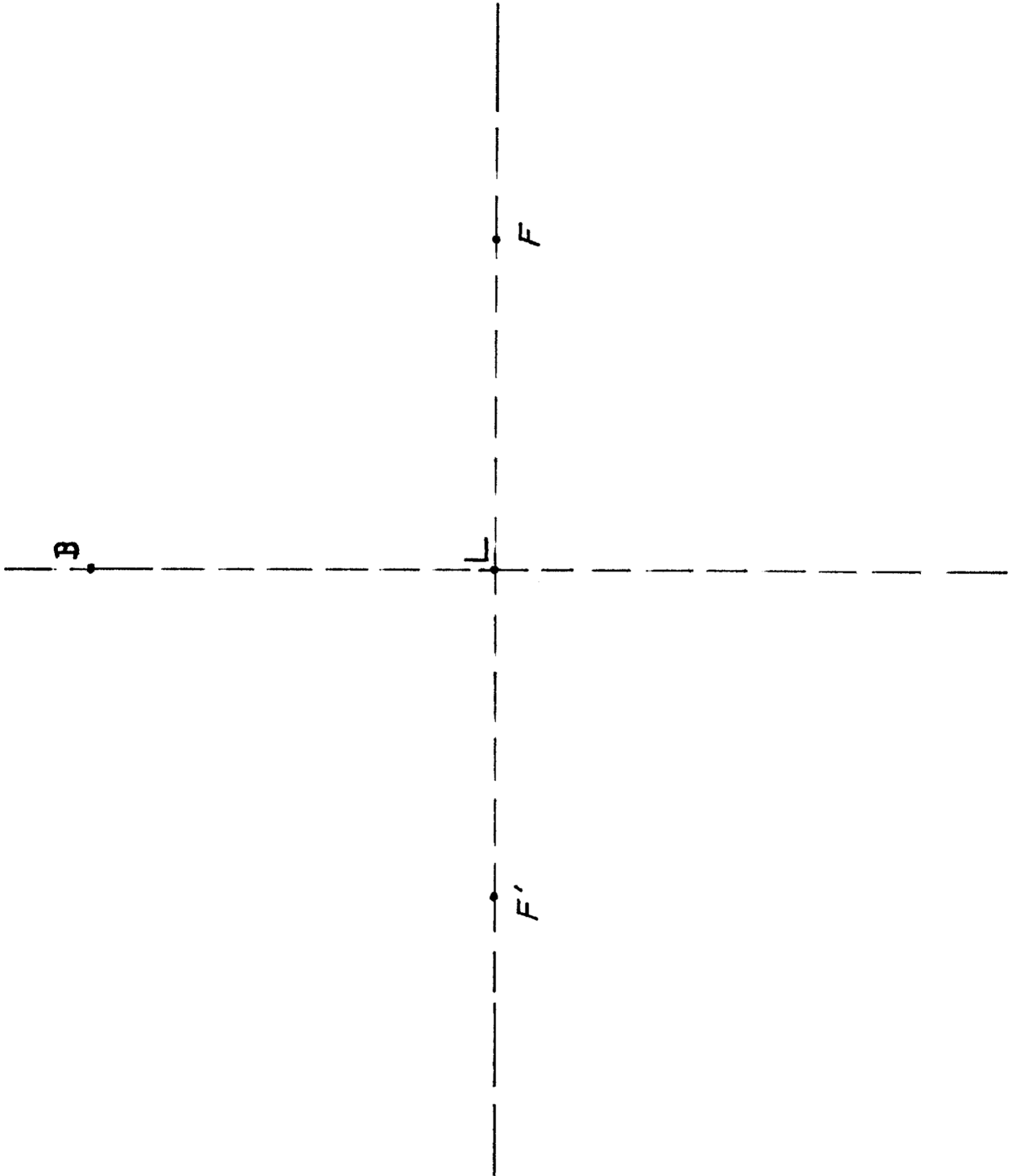
On termine en posant $M' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $N' = 2 \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$:

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{Ax'^2 + Cy'^2 + 2Dx' + 2Ey' + f = 0.}}$$

A et C sont bien les valeurs propres de M , puisque ce sont les éléments diagonaux de M' .

1 Esquisser la courbe Γ définie par :

$$\Gamma = \left\{ M \mid MF + MF' = 2 \cdot BF \right\}$$



- 2 Soit Γ une ellipse de foyers F et F' , et de demi axes a et b ($a \geq b$). Au moyen de la définition du jardinier, démontrer les propriétés suivantes :
- Γ est symétrique par rapport à son centre Ω (Ω = milieu de FF').
(Il suffit de montrer que si $M \in \Gamma$, son symétrique M' relativement à Ω est aussi sur Γ .)
 - Γ est symétrique par rapport à son grand axe (FF') et par rapport à son petit axe (perpendiculaire à FF' par Ω).
- 3 Construire les foyers d'une ellipse donnée par ses quatre sommets.
- 4 Construire les foyers et les sommets d'une ellipse dont on connaît le centre, un foyer et un sommet.
- 5 Construire les foyers et sommets d'une ellipse d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ donnée :
- $e = 0,8$
 - $e = 0,2$
 - $e = 0$
 - $e = 1$
- 6 Déterminer les sommets et les foyers des ellipses dont les équations sont :
- $4x^2 + 9y^2 = 36$
 - $4x^2 + 25y^2 = 25$
- Rép. 1) $(\pm 3; 0), (0; \pm 2), (\pm\sqrt{5}; 0)$ 2) $(\pm\frac{5}{2}; 0), (0; \pm 1), (\pm\frac{\sqrt{21}}{2}; 0)$
- 7 Trouver l'équation d'une ellipse centrée à l'origine et dont les foyers sont sur l'axe Ox , sachant que :
- $a = \frac{3}{2}$ et $b = 1$
 - $a = \frac{24}{5}$ et $c = 2$
 - $b = 2$ et $c = 0$
- Rép. 1) $4x^2 + 9y^2 = 9$ 2) $2975x^2 + 3600y^2 = 68544$ 3) $x^2 + y^2 = 4$
- 8 Soit $\Gamma(\Omega; a; b)$ une ellipse de foyers F et F' . On appelle *corde focale* le segment découpé par Γ sur une perpendiculaire à l'axe focal par un foyer.
- Montrer que la longueur d'une corde focale est égale à $\frac{2b^2}{a}$.
- Remarque : $\frac{2b^2}{a}$ est aussi, par définition, le *paramètre* de l'ellipse.
- 9 Une ellipse a pour équation $2x^2 + 3y^2 = 18$. Calculer son excentricité.
- Rép. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10 Trouver l'équation d'une ellipse centrée à l'origine et dont les foyers sont sur l'axe Ox , sachant que :

1) $a = 5$ et $b = 3$

2) $b = 4$ et $c = 3$

3) $c = 8$ et $e = \frac{2}{3}$

4) $a = 6$ et $e = \frac{1}{3}$

Rép. 1) $9x^2 + 25y^2 = 225$ 2) $16x^2 + 25y^2 = 400$ 3) $5x^2 + 9y^2 = 720$

4) $8x^2 + 9y^2 = 288$

11 Soient a et b deux réels strictement positifs, avec $a \geq b$.

1) Montrer que l'ellipse Γ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est la réunion des graphes des deux fonctions f et g de $[-a; a]$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ et $g(x) = -f(x)$.

2) Au moyen des dérivées de f et g , montrer que la tangente à Γ en un point $(x_0; y_0)$ de Γ a pour équation :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

12 Déterminer l'équation d'une ellipse centrée à l'origine et d'axe focal Ox sachant qu'elle passe par les points $R(1; 4)$ et $S(-6; 1)$.

Rép. $3x^2 + 7y^2 = 115$

13 Déterminer les sommets, les foyers et l'excentricité des ellipses données ci-dessous.

1) $4x^2 + 3y^2 = 36$

2) $y = \pm \sqrt{25 - 16x^2}$

Rép. 1) Sommets : $(0; \pm 2\sqrt{3})$, $(\pm 3; 0)$ / Foyers : $(0; \pm \sqrt{3})$ / $e = \frac{1}{2}$

2) Sommets : $(0; \pm 5)$, $(\pm \frac{5}{4}; 0)$ / Foyers : $(0; \pm \frac{5\sqrt{15}}{4})$ / $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$

14 Déterminer l'équation de l'ellipse satisfaisant aux conditions suivantes :

1) Le centre est à l'origine, l'axe focal est Oy , $e = \frac{1}{2}$ et $F(0; 6)$ est l'un des foyers.

2) Les foyers sont $F(0; 3)$ et $F'(0; -3)$, $e = \frac{3}{5}$.

Rép. 1) $4x^2 + 3y^2 = 432$ 2) $25x^2 + 16y^2 = 400$

- 15** On donne une ellipse par son équation. Ecrire l'équation canonique, déterminer les sommets et les foyers.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 1 = 0 & 2) \quad 25x^2 + 9y^2 + 50x - 18y - 191 = 0 \\ 3) \quad 16x^2 + 9y^2 - 32x + 36y - 92 = 0 & 4) \quad 4x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}\alpha x - 2\alpha y = 0 \end{array}$$

Rép.

1) Sommets : $(5 ; 2), (-3 ; 2), (1 ; 0), (1 ; 4)$	Foyers : $(1 \pm 2\sqrt{3} ; 2)$
2) Sommets : $(-1 ; -4), (-1 ; 6), (-4 ; 1), (2 ; 1)$	Foyers : $(-1 ; -3), (-1 ; 5)$
3) Sommets : $(1 ; -6), (1 ; 2), (-2 ; -2), (4 ; -2)$	Foyers : $(1 ; -2 \pm 2\sqrt{7})$
4) Sommets : $(-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha ; \alpha \pm 2\alpha), (-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \pm \alpha ; \alpha)$	Foyers : $(-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha ; \alpha \pm \sqrt{3}\alpha)$

- 16** Une ellipse dont les axes sont portés par Ox et Oy passe par les points $A(-4 ; 3)$ et $B(2\sqrt{6} ; \sqrt{6})$. Trouver son équation et ses foyers F et F' , puis déterminer P sur cette ellipse tel que PF soit perpendiculaire à PF' .

Rép. $3x^2 + 8y^2 = 120$ / Foyers : $(\pm 5 ; 0)$ / $P : (4 ; \pm 3), (-4 ; \pm 3)$

- 17** Dans une ellipse d'équation $25x^2 + 9y^2 = 225$ on inscrit un hexagone ayant ses six côtés égaux. Déterminer les sommets de ce polygone, sachant que deux d'entre eux coïncident avec les sommets situés sur le petit axe de la courbe.

Rép. $(-3 ; 0), (-\frac{51}{26} ; \pm \frac{15\sqrt{43}}{26}), (\frac{51}{26} ; \pm \frac{15\sqrt{43}}{26}), (3 ; 0)$

- 18** Trouver l'équation de la tangente t et de la normale n à une ellipse Γ en un point P de Γ :

a) $\Gamma : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$; $P(1 ; \frac{4}{3})$
b) $\Gamma : x^2 + 5y^2 = 14$; $P(-3 ; 1)$
c) $\Gamma : \frac{3(x-2)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$; $P(4 ; 6)$
d) $\Gamma : 3x^2 + y^2 - 18x + 10y + 40 = 0$; $P(2 ; -2)$

Rép.

a) $t : x + 6y = 9$	$n : 18x - 3y = 14$
b) $t : -3x + 5y = 14$	$n : 5x + 3y = -12$
c) $t : 3x + 2y = 24$	$n : 2x - 3y = -10$
d) $t : x - y = 4$	$n : x + y = 0$

- 19** a) Déterminer l'équation de la tangente et de la normale au point $P\left(4; \frac{9}{5}\right)$ de l'ellipse $\Gamma: 9x^2 + 25y^2 = 225$.
- b) Montrer que ces deux droites sont les bissectrices des "rayons focaux" PF et PF' .

Rép. a) $t: 4x + 5y = 25$ $n: 25x - 20y = 64$

- 20** Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $a^2 = b^2 + c^2$, d la droite d'équation $x = \frac{a^2}{c}$, F le point de coordonnées $(c; 0)$ et $e = \frac{c}{a}$. Montrer que le lieu géométrique des points M vérifiant $\frac{\delta(M; F)}{\delta(M; d)} = e$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Les droites $d: x = \frac{a^2}{c}$ et $d': x = -\frac{a^2}{c}$ s'appellent les *directrices* de l'ellipse.

- 21** Déterminer l'équation des directrices des ellipses d'équations :

1) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ 2) $9x^2 + y^2 - 81 = 0$

Rép. $x = \pm \frac{25}{4}$ / $y = \pm \frac{27\sqrt{2}}{4}$

- 22** Déterminer l'équation de l'ellipse de centre $C(0; 2)$, connaissant son excentricité $e = \frac{1}{2}$ et sachant que l'une des directrices a pour équation $y + 6 = 0$.

Rép. $4x^2 + 3(y - 2)^2 = 48$

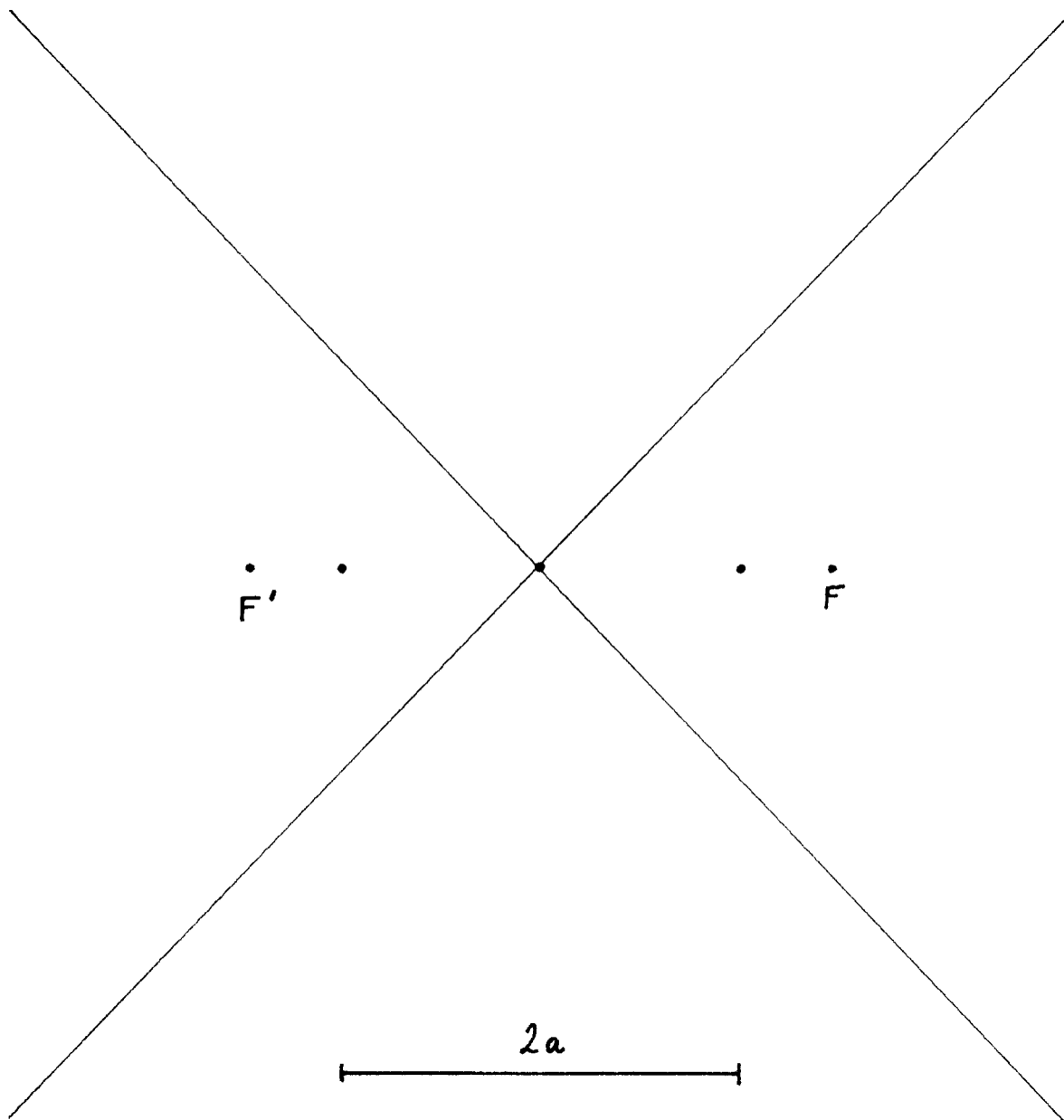
- 23** Soit $M(x; y)$ sur l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$ étant les foyers de cette ellipse, montrer que les segments MF et MF' ont pour longueur $a - \frac{cx}{a}$ et $a + \frac{cx}{a}$.

- 24** (*Tangentes de pente m à une ellipse*) Soit Γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- a) Former l'équation du deuxième degré donnant l'abscisse des points d'intersection de la droite $y = mx + h$ avec Γ .
- b) Etablir l'équation des tangentes de pente m à Γ en exprimant que le discriminant de l'équation obtenue en a) est nul.

Rép. b) $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$

- 25** a) Construire un nombre suffisant de points de la courbe $\Gamma_g = \{M \mid MF - MF' = 2a\}$ et tracer la courbe.
- b) *Idem* pour $\Gamma_d = \{M \mid MF' - MF = 2a\}$.
- c) *Idem* pour $\Gamma = \{M \mid |MF - MF'| = 2a\}$.



26 Déterminer les sommets, les foyers, l'excentricité et les asymptotes des hyperboles données ci-dessous.

1) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

2) $9x^2 - 16y^2 = 144$

3) $x^2 - y^2 = 25$

4) $3y^2 - 5x^2 = 14$

Rép.

1) $S(\pm 3; 0)$	$F(\pm\sqrt{13}; 0)$	$e = \frac{\sqrt{13}}{3}$	$y = \pm \frac{2}{3}x$
2) $S(\pm 4; 0)$	$F(\pm 5; 0)$	$e = \frac{5}{4}$	$y = \pm \frac{3}{4}x$
3) $S(\pm 5; 0)$	$F(\pm 5\sqrt{2}; 0)$	$e = \sqrt{2}$	$y = \pm x$
4) $S(0; \pm\sqrt{\frac{14}{3}})$	$F(0; \pm\sqrt{\frac{112}{15}})$	$e = \sqrt{\frac{8}{5}}$	$y = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}x$

27 Trouver l'équation de l'hyperbole qui a son centre à l'origine et dont les foyers sont sur l'axe Ox , sachant que :

1) $c = 8$ et $e = 4$

2) $b = 4$ et $c = 3$

3) $c = 8$ et $e = \frac{3}{2}$

Rép. 1) $15x^2 - y^2 - 60 = 0$ 2) pas de solution 3) $45x^2 - 36y^2 - 1280 = 0$

28 On donne une hyperbole par son équation. Écrire son équation canonique ; déterminer ses sommets, ses foyers, ses asymptotes.

1) $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y + 4 = 0$

2) $4y^2 = x^2 + 2x + 8y$

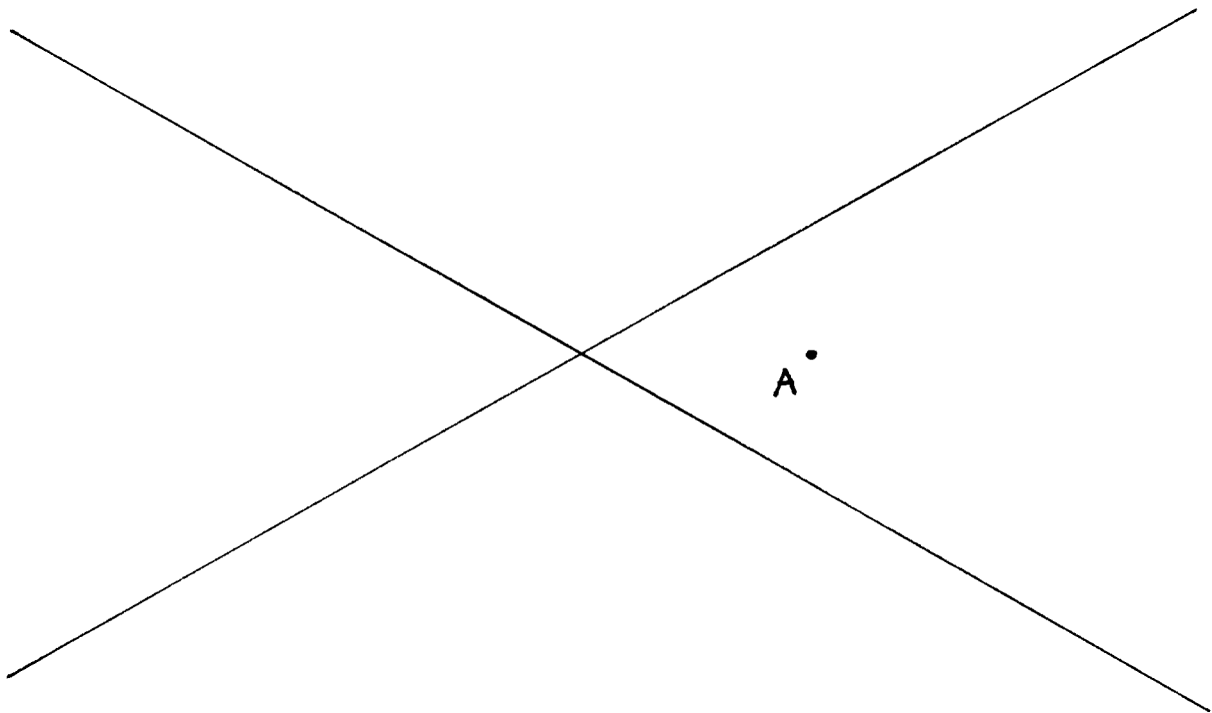
3) $25x^2 - 9y^2 + 50x + 54y + 169 = 0$

4) $8x^2 - 6y^2 + 16x - 32 = 0$

Rép.

- $\frac{(y+3)^2}{5} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1, S(2; -3 \pm \sqrt{5}), F(2; -3 \pm 3), y+3 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x-2)$
- $\frac{(y-1)^2}{\frac{3}{4}} - \frac{(x+1)^2}{3} = 1, S(-1; 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}), F(-1; 1 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}), y-1 = \pm \frac{x+1}{2}$
- $\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1, S(-1; 3 \pm 5), F(-1; 3 \pm \sqrt{34}), y-3 = \pm \frac{5}{3}(x+1)$
- $\frac{(x+1)^2}{5} - \frac{y^2}{\frac{20}{3}} = 1, S(-1 \pm \sqrt{5}; 0), F(-1 \pm \sqrt{\frac{35}{3}}; 0), y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}(x+1)$

- 29** On donne les asymptotes d'une hyperbole Γ et l'un de ses sommets A . Construire ses foyers et quelques-uns de ses points.



- 30** Construire les asymptotes d'une hyperbole connaissant ses sommets et ses foyers :



- 31** Trouver l'équation de l'hyperbole de foyers $F(3; 0)$ et $F'(-3; 0)$ sachant que :
- 1) les asymptotes ont pour équations $y = \pm 2x$.
 - 2) la courbe passe par le point $(4; 1)$.

Rép. 1) $20x^2 - 5y^2 = 36$ 2) $x^2 - 8y^2 = 8$

- 32** On donne l'hyperbole $\Gamma : 16x^2 - 9y^2 = 144$. Trouver l'équation de la corde de Γ dont le point $P(12; 3)$ est le milieu.

Rép. $64x - 9y = 741$

- 33** (*Tangentes de pente m à une hyperbole*)

a) Former l'équation donnant l'abscisse des points d'intersection de la droite $y = mx + h$ avec l'hyperbole Γ d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) Etablir l'équation des tangentes de pente m à Γ en exprimant que le discriminant de l'équation obtenue en (a) — lorsqu'elle est du 2e degré — est nul.

Rép. b) $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$

- 34** Soient a , b et c trois réels strictement positifs tels que $c^2 = a^2 + b^2$, d la droite d'équation $x = \frac{a^2}{c}$, F le point de coordonnées $(c; 0)$ et $e = \frac{c}{a}$.

Montrer que le lieu géométrique des points M vérifiant

$$\frac{\delta(M; F)}{\delta(M; d)} = e$$

est l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Les droites $d : x = \frac{a^2}{c}$ et $d' : x = -\frac{a^2}{c}$ s'appellent les *directrices* de l'hyperbole.

- 35** Déterminer les directrices des hyperboles suivantes :

1) $16x^2 - 9y^2 = 144$

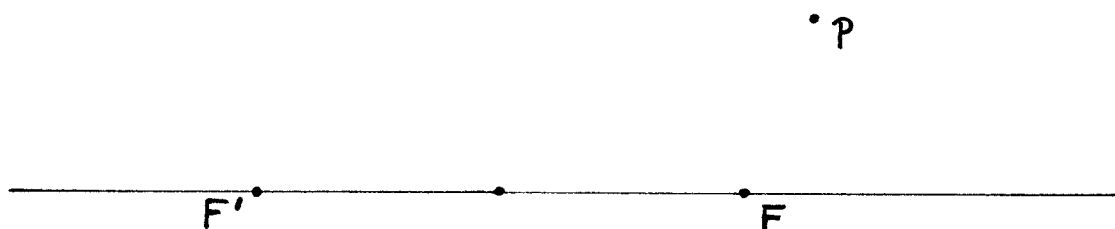
2) $y^2 - x^2 = 25$

Rép. 1) $x = \pm \frac{9}{5}$ 2) $y = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$

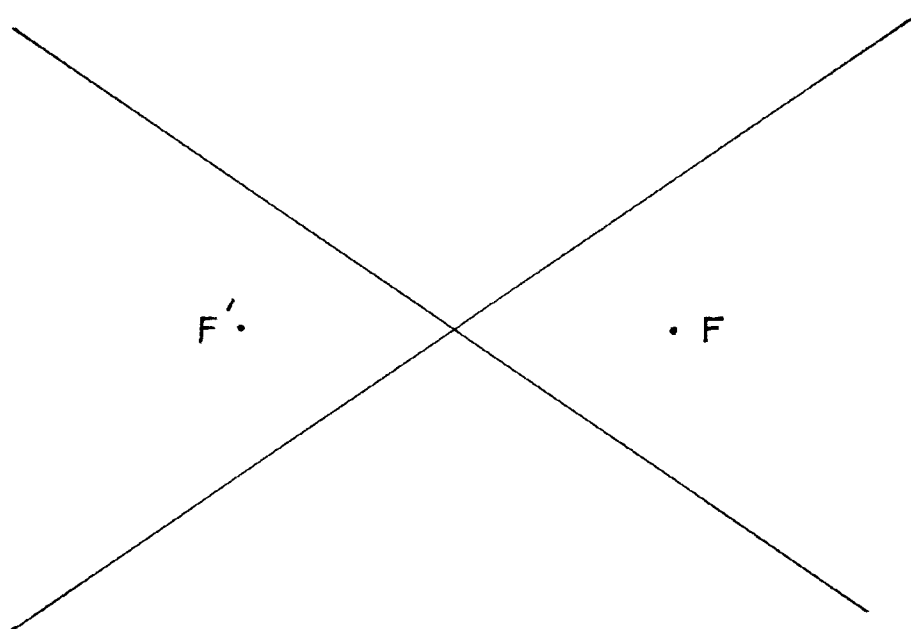
- 36** On donne l'hyperbole $\Gamma : x^2 - 4y^2 = 4$. Déterminer les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans Γ sachant qu'un des sommets coïncide avec le sommet d'abscisse positive de la courbe.

Rép. $(2; 0), (14; \pm 4\sqrt{3})$

- 37 On donne les foyers et un point P d'une hyperbole. Construire ses sommets et ses asymptotes, puis esquisser la courbe.



- 38 Construire les sommets d'une hyperbole connaissant ses asymptotes et ses foyers.



- 39 Construire les directrices d'une hyperbole connaissant le centre, un sommet et un foyer.



- 40 On considère l'hyperbole $\Gamma: \frac{x^2}{16} - \frac{9y^2}{64} = 1$.

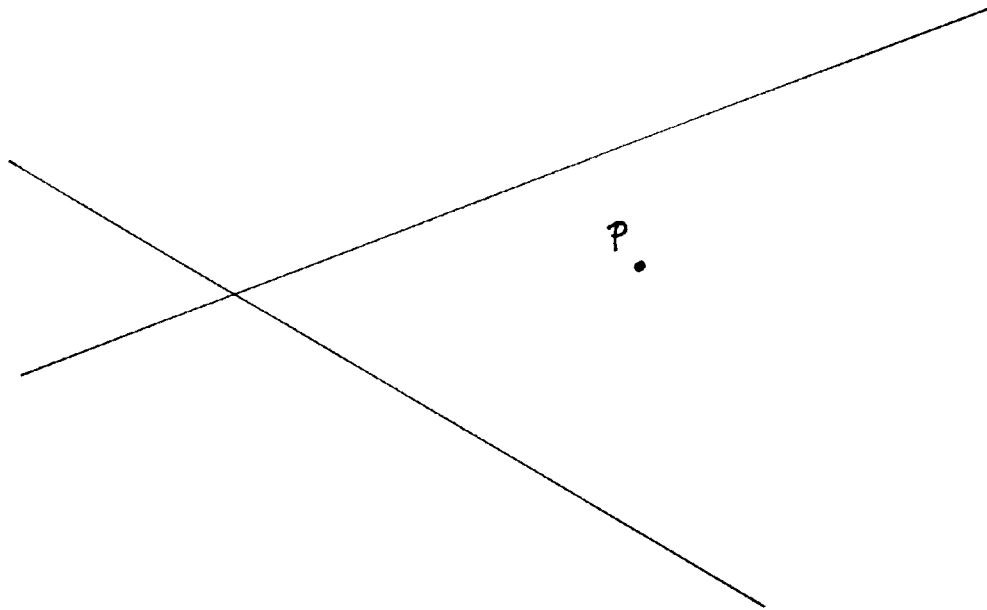
- Montrer que Γ est la réunion des graphes des fonctions f et $-f$, où $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 16}$.
- Au moyen d'une dérivée, déterminer l'équation de la tangente à Γ au point $P(5; 2)$.
- Montrer que les asymptotes découpent sur la tangente en P un segment dont P est le milieu.

Rép. b) $y - 2 = \frac{10}{9}(x - 5)$

- 41 Montrer que les asymptotes d'une hyperbole $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ découpent sur la tangente en $M(x_0; y_0) \in \Gamma$ un segment dont M est le milieu.

Indication : déterminer l'équation de la tangente t en M , calculer les abscisses x_1 et x_2 des points d'intersection de t avec les asymptotes, puis vérifier que $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

42 On donne les asymptotes et un point P d'une hyperbole. Construire la tangente en P .



43 Soit l'hyperbole $\Gamma: \frac{(y+3)^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.

- En déterminer le centre, les foyers, les sommets, les asymptotes et les directrices. Esquisser la courbe.
- Soit A et B les points d'ordonnée 2 sur Γ . Donner l'équation des tangentes en A et B , et montrer qu'elles se coupent sur l'une des directrices.

Rép. a) $\Omega(0; -3)$, $F(0; -3 \pm 5)$, as.: $y+3 = \pm \frac{3}{4}x$, $d: y = -3 \pm \frac{9}{5}$

b) $A, B: (\pm \frac{16}{3}; 2)$, $t_A, t_B: 3x - 5y = 6$, $3x + 5y = -6$.

44 Trouver l'équation de l'hyperbole centrée à l'origine, de demi-axe transverse $a = 4$ et dont une directrice est $y = \frac{16}{5}$.

Rép. $9y^2 - 16x^2 = 144$

45 Soit l'hyperbole $\Gamma: 3x^2 - y^2 - 2x = 0$.

- Déterminer son centre, ses sommets et ses asymptotes.
- On donne les points $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ et on considère un point $C(u; v)$ de Γ tel que $u > 1$ et $v > 0$. Prouver que, dans le triangle ABC , l'angle en B égale le double de l'angle en A .

Indication : établir que $\tan \beta = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$.

Rép. a) Centre : $(\frac{1}{3}; 0)$ / sommets : $(0; 0)$ et $(\frac{2}{3}; 0)$ / asymptotes : $3x \pm \sqrt{3}y = 1$

- 46** Soit M un point d'une hyperbole Γ de sommets A et A' , P sa projection sur l'axe AA' , γ le cercle de diamètre AA' et T le point de contact d'une tangente au cercle γ issue de P .
Montrer que le rapport $\frac{MP}{TP}$ est indépendant du choix de M .

Rép. $\frac{MP}{TP} = \frac{b}{a}$

- 47** De l'exercice précédent, déduire :

- a) une construction des points d'une hyperbole équilatère ($a = b$) à partir de ses sommets.
- b) une construction des points d'une hyperbole quelconque donnée par a et b .

- 48** Soit M un point variable d'une hyperbole de centre O . Montrer que le parallélogramme dont O et M sont deux sommets opposés, et dont les côtés sont parallèles aux asymptotes, a une aire constante.

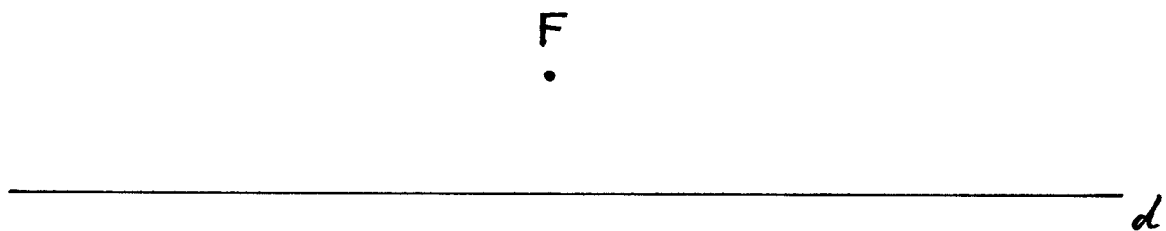
Indication. Rapporter l'hyperbole à ses asymptotes.

- 49** On considère la courbe $\Gamma : y = -\frac{3x+18}{x+2}$.

Montrer que les droites $x = -2$ et $y = -3$ sont les asymptotes de Γ , puis trouver l'équation de Γ relativement au repère orthonormé $(O'; I'; J')$ défini par $O'(-2; -3)$, $I'(-1; -3)$, $J'(-2; -2)$.

Rép. $x'y' = -12x'y'$

- 50** On donne une droite d et un point F hors de d . Construire un nombre suffisant de points équidistants de F et de d . Esquisser la courbe $\Gamma = \{ M \mid \delta(M; F) = \delta(M; d) \}$.



- 51** On donne les asymptotes et un point P d'une hyperbole. Construire d'autres points de la courbe en exploitant le théorème du §15.
- 52** Calculer la longueur de la corde de la parabole $\Gamma : y^2 = 2px$, menée perpendiculairement à l'axe par le foyer.

Rép. $2p$

53 On donne une parabole par son équation. Ecrire l'équation canonique ; déterminer le paramètre $2p$, le foyer et la directrice.

- 1) $y^2 + 6y = 8x - 17$ 2) $y^2 - 6x + 9 = 0$ 3) $y^2 = -2x$
 4) $y = 3x^2 + 4x + 5$ 5) $x^2 = 7 + 8y - 6x$ 6) $y = ax^2 + bx + c$

Rép. 1) $(y+3)^2 = 8(x-1)$ / $2p = 8$ / $F(3; -3)$ / $d: x = -1$
 2) $y^2 = 6(x - \frac{3}{2})$ / $2p = 6$ / $F(3; 0)$ / $d: x = 0$
 3) $y^2 = -2x$ / $2p = 2$ / $F(-\frac{1}{2}; 0)$ / $d: x = \frac{1}{2}$
 4) $(x + \frac{2}{3})^2 = \frac{1}{3}(y - \frac{11}{3})$ / $2p = \frac{1}{3}$ / $F(-\frac{2}{3}; \frac{15}{4})$ / $d: y = \frac{43}{12}$
 5) $(x+3)^2 = 8(y+2)$ / $2p = 8$ / $F(-3; 0)$ / $d: y = -4$
 6) $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{\Delta}{4a})$ / $2p = \frac{1}{|a|}$ / $F(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta+1}{4a})$ / $d: y = \frac{-\Delta-1}{4a}$

54 Soit $p > 0$. Ecrire les équations des quatre paraboles de paramètre $2p$ admettant l'origine O pour sommet, l'un des axes de coordonnées pour axe focal et l'autre comme tangente au sommet. Esquisser ces courbes dans un même repère Oxy .

Rép. $x^2 = 2py$; $x^2 = -2py$; $y^2 = -2px$; $y^2 = 2px$

55 Déterminer l'équation d'une parabole de sommet S , dont la directrice est parallèle à l'axe Oy , sachant que :

- 1) $p = 6$ $S(3; 4)$ le foyer est à droite de S .
 2) $p = 4$ $S(2; -3)$ le foyer est à gauche de S .

Rép. 1) $(y-4)^2 = 12(x-3)$ 2) $(y+3)^2 = -8(x-2)$

56 Soit $M(u; v)$ un point de l'hyperbole $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ de foyers $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$.

Etablir que $MF = \left| a - \frac{cu}{a} \right|$ et $MF' = \left| a + \frac{cu}{a} \right|$.

57 Déterminer l'équation d'une parabole dont on donne :

- 1) la directrice $d: x+1=0$ et le foyer $F(1; 0)$.
 2) la directrice $d: x-2=0$ et le foyer $F(5; 3)$.
 3) la directrice $d: y+4=0$ et le sommet $S(0; 0)$.
 4) la directrice $d: x-8=0$ et le sommet $S(2; 1)$.

Rép. 1) $y^2 = 4x$ 2) $y^2 - 6x - 6y + 30 = 0$
 3) $x^2 = 16y$ 4) $y^2 + 24x + 2y - 47 = 0$

- 58** Trouver l'équation de la parabole dont l'axe est parallèle à Oy et qui passe par les points $A(6; 2)$, $B(-6; 2)$ et $C(-2; 0)$.

Rép. $(x-8)^2 = -48\left(y - \frac{25}{12}\right)$

- 59** Construire les points d'intersection d'une droite a avec une parabole Γ donnée par son foyer F et sa directrice d . (Utiliser le fait que Γ est le lieu géométrique des centres des cercles tangents à d et passant par F .)

- 60** Soit une parabole Γ d'équation $y^2 = 2px$. Montrer que la valeur absolue de l'ordonnée de tout point de Γ est la moyenne géométrique du paramètre $2p$ et de l'abscisse du point considéré. On rappelle que la moyenne géométrique de deux réels $a, b > 0$ est $\sqrt{ab}$.

En déduire une construction des points de Γ à partir du sommet, de l'axe focal et du paramètre.

- 61** Soit ε une ellipse de centre O , d'axe focal horizontal et demi-axes a et b , ainsi qu'un point M de ε . La tangente à ε en M coupe l'axe focal en P .

- 1) Montrer que la moyenne géométrique des abscisses de M et de P est égale à a .
- 2) Montrer que, si l'on désigne par α l'angle $\widehat{POM}$ et par β l'angle $\widehat{OPM}$, alors :

$$\tan \alpha \tan \beta = \frac{b^2}{a^2}$$

- 62** Trouver l'équation de la tangente t et de la normale n à la parabole Γ en $P \in \Gamma$:

- | | |
|-------------------------------------|-------------|
| 1) $\Gamma: y^2 = 8x$ | $P(2; 4)$ |
| 2) $\Gamma: (y-3)^2 = -4(x+1)$ | $P(-5; -1)$ |
| 3) $\Gamma: x^2 = 2(y-1)$ | $P(-2; 3)$ |
| 4) $\Gamma: x^2 + 6x - 3y + 12 = 0$ | $P(-9; 13)$ |

- Rép.*
- | | |
|----------------------|-------------------|
| 1) $t: x - y = -2$ | $n: x + y = 6$ |
| 2) $t: x - 2y = -3$ | $n: 2x + y = -11$ |
| 3) $t: 2x + y = -1$ | $n: x - 2y = -8$ |
| 4) $t: 4x + y = -23$ | $n: x - 4y = -61$ |

- 63** Soit AB la corde de la parabole $\Gamma: y^2 = 2px$ perpendiculaire par le foyer F à l'axe focal.

- a) Déterminer l'équation des tangentes à Γ en A et B .
- b) Montrer que ces tangentes sont perpendiculaires et se coupent sur la directrice.

Rép. $t_{A,B}: y = \pm\left(x + \frac{p}{2}\right)$; $t_A \cap t_B: \left(-\frac{p}{2}; 0\right)$

64 On donne $\Gamma : y^2 = 4x$ et $P(-1; 2)$. (Faire une bonne figure.)

- a) Déterminer $M(x_0; y_0)$ sur Γ de sorte que la tangente en M à Γ passe par P .
- b) Montrer que la droite reliant les deux points trouvés passe par le foyer.

Rép. $M_1(3+2\sqrt{2}; 2+2\sqrt{2})$, $M_2(3-2\sqrt{2}; 2-2\sqrt{2})$; $M_1M_2 : y = x - 1$.

65 Soit $\Gamma : y^2 + 4x = 0$ et $P(-\frac{15}{4}; -4)$. (Faire une bonne figure.)

- a) Exprimer l'équation d'une droite d de pente m passant par P .
- b) Déterminer m afin que d soit tangente à Γ . (Le discriminant Δ d'une certaine équation doit être nul...)

Rép. b) $m = \frac{2}{3}$ ou $m = \frac{2}{5}$.

66 (Tangentes de pente m à une parabole)

Soit Γ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

- a) Former l'équation donnant l'abscisse des points d'intersection de la droite $y = mx + h$ avec Γ .
- b) Etablir l'équation de la tangente de pente $m \neq 0$ à Γ en exprimant que le discriminant de l'équation obtenue en (a) est nul.

Rép. b) $y = mx + \frac{p}{2m}$

67 Trouver les équations des tangentes de pente m à la conique Γ :

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| 1) $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\Gamma : 9x^2 + 48y^2 - 432 = 0$ |
| 2) $m = \frac{15}{26}$ | $\Gamma : 9x^2 - 4y^2 + 144 = 0$ |
| 3) $m = \frac{4}{9}$ | $\Gamma : x^2 + 9y^2 - 4x + 9y = 0$ |
| 4) $m = \frac{1}{2}$ | $\Gamma : x^2 - 6y^2 + 12y - 18 = 0$ |

Rép. 1) $x - \sqrt{3}y + 5\sqrt{3} = 0$ / $x - \sqrt{3}y - 5\sqrt{3} = 0$
2) $15x - 26y + 144 = 0$ / $15x - 26y - 144 = 0$
3) $4x - 9y - 25 = 0$ / $4x - 9y = 0$
4) $x - 2y = 0$ / $x - 2y + 4 = 0$

68 Trouver les équations des tangentes à Γ issues du point P :

- 1) $\Gamma : x^2 + 2y^2 - 17 = 0$; $P(-1; 5)$
- 2) $\Gamma : y^2 + 4x - 6y = 0$; $P(-\frac{3}{2}; -1)$
- 3) $\Gamma : x^2 - 3y^2 + 2x + 19 = 0$; $P(-1; 2)$

Rép. 1) $3x + 4y = 17$ / $11x - 8y + 51 = 0$
 2) $2x - 3y = 0$ / $2x - 5y = 2$
 3) $x - 3y + 7 = 0$ / $x + 3y - 5 = 0$

69 Montrer que les tangentes à une parabole, aux extrémités d'une corde focale, sont perpendiculaires.

70 Soit Γ une parabole d'équation $y^2 = 2px$, M un point de Γ et M' la projection de M sur l'axe Ox . La tangente t et la normale n à Γ en M coupent l'axe Ox en T et N respectivement. Montrer que :

- a) Les points T et M' sont symétriques relativement à l'origine O .
- b) $M'N = p$.

71 Déterminer les tangentes communes à deux coniques données par leurs équations :

- 1) $\Gamma_1 : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $\Gamma_2 : x^2 + y^2 = ab$
- 2) $\Gamma_1 : y^2 - 2px = 0$ $\Gamma_2 : x^2 - 5px - 2py + \frac{5p^2}{4} = 0$
- 3) $\Gamma_1 : y^2 - 2px - p^2 = 0$ $\Gamma_2 : x^2 - 2qy - q^2 = 0$
- 4) $\Gamma_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144$ $\Gamma_2 : 7x^2 - 32y^2 = 224$

Rép. 1) $y = \sqrt{\frac{b}{a}}x \pm \sqrt{b(a+b)}$ / $y = -\sqrt{\frac{b}{a}}x \pm \sqrt{b(a+b)}$
 2) $2x + 2y + p = 0$ / $2(-2 + \sqrt{3})x + 2y + p(-2 - \sqrt{3}) = 0$ / $2(2 - \sqrt{3})x - 2y + p(-2 + \sqrt{3}) = 0$
 3) $2px + 2qy + p^2 + q^2 = 0$ 4) $y = x \pm 5$ / $y = -x \pm 5$

72 Trouver les équations des normales à la conique $\Gamma : 5x^2 - 16x - 2y + 18 = 0$, abaissées du point $P(0; 4)$.

Rép. $x + 2y = 8$; $x - 4y = -16$

73 On donne deux cercles disjoints intérieurement. Déterminer le lieu géométrique des centres des cercles tangents aux deux cercles donnés.

Rép. Réunion deux ellipses

- 74** On donne deux cercles $\Gamma(C; r)$ et $\Gamma'(C'; r')$ disjoints extérieurement, avec $r' > r$. Déterminer le lieu géométrique des centres des cercles tangents aux deux cercles donnés.

Rép. Réunion deux hyperboles

- 75** On considère le point $O(0; 0)$ et la droite $d: x + 3 = 0$. Déterminer le lieu des points M tels que $\delta(M; O) - \delta(M; d) = 2$.

Rép. Parabole $y^2 = 10\left(x + \frac{5}{2}\right)$

- 76** On considère la parabole $\Gamma: y^2 - 4x + 4 = 0$.

- Déterminer le sommet, le foyer et le paramètre de Γ . Esquisser la courbe.
- On inscrit un rectangle $ABCD$ entre Γ et la verticale $v: x = 4$, de manière que A et D soient sur Γ , et B et C sur v . Étudier la variation de l'aire du rectangle en fonction de l'abscisse de A .

Rép. a) $S(1; 0)$, $F(2; 0)$, $2p = 4$

b) Aire du rectangle : $4(4 - x)\sqrt{x - 1}$; aire maximale pour $x = 2$.

- 77** Incrire un carré entre les paraboles $y^2 = 4x$ et $y^2 = -4(x - 2)$. (Esquisser d'abord les courbes en prenant 4 carrés pour unité.)

Rép. Sommets du carré : $\left(3 - 2\sqrt{2}; \pm(2\sqrt{2} - 2)\right)$, $\left(2\sqrt{2} - 1; \pm(2\sqrt{2} - 2)\right)$

- 78** On considère la parabole $\Gamma: x^2 - 6y = 0$ et son point P d'abscisse -6 . Déterminer l'équation du cercle centré sur Oy et tangent à Γ en P .

Rép. $x^2 + (y - 9)^2 = 45$.

- 79** On considère la région R du plan comprise entre la branche droite de l'hyperbole $\Gamma: \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$ et la droite parallèle à Oy par le foyer d'abscisse positive de Γ (bonne figure...). Calculer le volume du solide engendré par rotation de R autour de l'axe Ox .

Rép. 704π

- 80** Trouver $a > 0$ afin que la droite $t: 5x - 8y = 18$ soit tangente à l'hyperbole

$\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$. [*Rép.* $a = 6$]

- 81** On donne un cercle $\gamma(C; r)$ et une droite d telle que $\delta(C; d) > r$. Déterminer le lieu géométrique des centres des cercles tangents à γ et à d .

Rép. Réunion de deux paraboles

- 82** Montrer que le lieu géométrique des points $M(x; y)$ tels que

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}; a, b > 0)$$

est une ellipse. Donner l'équation cartésienne de celle-ci. [*Rép.* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$]

- 83** On appelle *cercles directeurs* d'une conique à centre les deux cercles ayant pour centres les foyers et dont le rayon est égal au grand axe.

- Montrer que toute ellipse peut être considérée comme le lieu géométrique des centres des cercles passant par un foyer et tangents intérieurement au cercle directeur centré à l'autre foyer.
- Montrer que toute hyperbole est le lieu géométrique des centres des cercles passant par un foyer et tangents au cercle directeur centré à l'autre foyer.

- 84** Déterminer le lieu des points $M(x; y)$ tels que $\begin{cases} x = 2 + 5 \cos t \\ y = 3 + 6 \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

En donner une équation cartésienne. [*Rép.* $36(x-2)^2 + 25(y-3)^2 = 900$]

- 85** Soient $A(r; 0)$, $A'(-r; 0)$, $B(0; r)$ et $B'(0; -r)$ sur le cercle $\gamma(O; r)$, C un point du segment BB' ($C \neq O$) et CD une demi-corde de γ parallèle à OA . Déterminer le lieu géométrique du point d'intersection des droites OD et AC lorsque CD se déplace parallèlement à OA .

Rép. Parabole $y^2 = -2r\left(x - \frac{r}{2}\right)$, sauf le point $\left(\frac{r}{2}; 0\right)$

- 86** Soit $P(u; v)$ sur le cercle $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$, avec $v \neq 0$. De P , on abaisse la perpendiculaire à la tangente à Γ au point $A(1; 0)$. La droite joignant le pied Q de cette perpendiculaire au point $B(2; 0)$ coupe OP en S . Déterminer le lieu de S quand P décrit le cercle Γ .

Rép. Parabole $y^2 = -4(x-1)$, sauf le point $(1; 0)$

- 87** On mène la tangente en un point P de la parabole d'équation $y = 12x^2$. Soit M le milieu du segment déterminé par les points d'intersection de cette tangente avec les axes de coordonnées. Déterminer le lieu de M lorsque P décrit la parabole. [*Rép.* Parabole $y = -96x^2$]

- 88** On donne deux points $B(-4 ; 6)$ et $C(-4 ; -2)$ et on considère un triangle variable ABC dont le sommet A se déplace sur la droite d'équation $x = 8$. Trouver le lieu de l'orthocentre du triangle ABC .

Rép. Parabole $(y - 2)^2 = -12\left(x + \frac{8}{3}\right)$

- 89** On considère la parabole $\Gamma : y^2 = 2px$ de foyer F . Déterminer le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées de F sur les tangentes à Γ .

Rép. Droite $x = 0$

- 90** Deux cercles de centres $C(0 ; 0)$ et $C'(4 ; 0)$ sont tangents à une droite de pente 1. Quel est le lieu géométrique de leurs points d'intersection lorsque la droite se déplace parallèlement à elle-même ?

Rép. Hyperbole $\frac{(x - 2)^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

- 91** Démontrer que, dans une parabole, la corde joignant les points de contact des tangentes issues d'un point est coupée en son milieu par une parallèle à l'axe passant par ce point.

- 92** On donne une courbe du 2^e degré Γ par son équation relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^2$. Déterminer une base B' orthonormée relativement à laquelle l'équation de Γ ne comporte pas de terme en $x'y'$, puis rechercher la forme canonique de cette équation.

En déduire le type de la conique Γ .

Si Γ est une ellipse ou une hyperbole, déterminer les coordonnées du centre, des sommets et des foyers, ainsi que les équations des axes. Pour une hyperbole, donner encore les équations des asymptotes.

Si Γ est une parabole, déterminer les coordonnées du sommet et du foyer, puis l'équation de l'axe.

Représenter graphiquement la courbe Γ .

- 1) $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$
- 2) $48x^2 - 16xy - 15y^2 - 3185 = 0$
- 3) $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 2500 = 0$
- 4) $13x^2 - 48xy + 27y^2 + 100x - 150y + 300 = 0$
- 5) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 388x + 334y - 2179 = 0$
- 6) $72x^2 - 126xy + 40y^2 + 108x - 34y - 15750 = 0$
- 7) $40x^2 - 66xy - 72y^2 + 292x + 156y - 6234 = 0$

93 Déterminer l'équation de la polaire du point P relativement à la conique Γ :

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $P\left(\frac{4}{3}; -5\right)$ | $\Gamma: 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ |
| 2) $P(-3; 7)$ | $\Gamma: 3x^2 - 10y^2 + 4x + 7y - 12 = 0$ |
| 3) $P(5; -2)$ | $\Gamma: x^2 - 6(x+y) - 3 = 0$ |
| 4) $P(4p; -5q)$ | $\Gamma: \frac{x^2}{16p} + \frac{y^2}{25q} = 1$ |

Rép. 1) $3x - 20y = 36$ 2) $14x + 133y = 13$ 3) $2x - 3y = 12$ 4) $5x - 4y = 20$

94 Soit Γ une conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, et M la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

a) Montrer que l'équation de Γ peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

b) Montrer que l'équation de la polaire d'un point $A(x_A; y_A)$ par rapport à Γ est

$$\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

c) En déduire le théorème de réciprocité polaire :

$$B \in \text{polaire de } A \Leftrightarrow A \in \text{polaire de } B$$

Indication. On rappelle que :

1. Une matrice est symétrique ssi elle est égale à sa transposée.
2. La transposée d'un produit de matrices est égale au produit des transposées dans l'ordre inverse.

95 Une corde AB d'une parabole Γ passe par le foyer F . Les tangentes à Γ en A et B se coupent en C .

- a) Montrer au moyen du théorème de réciprocité que AB est la polaire de C .
- b) En déduire que C appartient à la directrice d de Γ . On rappelle que d est la polaire du foyer.
- c) Montrer que la droite CF est perpendiculaire à AB .