

ED

100. Existe-t-il des réels α et β tels que la fonction f vérifie l'équation E ?

- | | |
|--|---|
| a) $f : y = \alpha \cos x + \beta \sin x$ | E : $y'' \cos x + 2y' \sin x - y \cos x = -4$ |
| b) $f : y = \alpha \cos x + \beta \sin x$ | E : $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$ |
| c) $f : y = (\alpha x^2 + \beta x)e^x$ | E : $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$ |
| d) $f : y = x(\alpha \cos x + \beta \sin x)$ | E : $y^{(4)} - y = 4 \cos x$ |

Rép. a) $\alpha = 2$, β quelconque b) $\alpha = \frac{2}{5}$, $\beta = \frac{1}{5}$ c) $\alpha = -\frac{1}{10}$, $\beta = \frac{9}{25}$ d) $\alpha = 0$, $\beta = -1$

101. Traduire à l'aide d'une équation différentielle les affirmations suivantes :

- 1) La population d'une ville croît à une vitesse proportionnelle à sa valeur actuelle.
- 2) La tangente en chaque point $(t, f(t))$ du graphe d'une fonction f coupe l'axe Ox en $(\frac{t}{2}, 0)$.
- 3) La pente de la tangente en chaque point $(t, f(t))$ du graphe d'une fonction f est proportionnelle à $\frac{f(t)}{t}$.
- 4) Le nombre de désintégrations se produisant chaque seconde dans un échantillon de radium est proportionnel au nombre d'atomes existant à l'instant considéré.

Rép. 1) ... 2) $t \cdot \frac{dy}{dt} - 2y = 0$ 3) $t \cdot \frac{dy}{dt} - ky = 0$ 4) ...

102. Résoudre les équations suivantes :

- | | | |
|---------------------------|----------------------------------|---------------------------|
| 1) $y' = 0$ | 2) $y' + 2x = 0$ | 3) $y' = \sin x \cos x$ |
| 4) $y' = \frac{x}{1+x^2}$ | 5) $y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ | 6) $y' = \frac{x-1}{x+1}$ |

Rép. 1) $y = C$ 2) $y = -x^2 + C$ 3) $y = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$ 4) $y = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
 5) $y = \sqrt{1+x^2} + C$ 6) $y = x - 2 \ln|x+1| + C$

103. Résoudre les équations à variables séparables suivantes :

- | | | |
|---------------------------|------------------------|----------------------------------|
| 1) $y' \sin x = y \cos x$ | 2) $y^2 + (x+1)y' = 0$ | 3) $xy' - ky = 0$ ($k \neq 0$) |
| 4) $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$ | 5) $x^2 y' + y = 3$ | 6) $(x^2 - 4)y' = 2y$ |
| 7) $yy' = x$ | 8) $y' - xe^{-y} = 0$ | 9) $x^2 y' = \cos^2 y$ |

Rép. 1) $y = C \sin x$ 2) $y = \frac{1}{\ln|x+1|+C}$ 3) $y = Cx^k$ 4) $y = \sin(x^2 + C)$ 5) $y = 3 + Ce^{1/x}$
 6) $y = C \sqrt{\left| \frac{x-2}{x+2} \right|}$ 7) $y = \pm \sqrt{x^2 + C}$ 8) $y = \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$ 9) $y = \text{Arctan}(C - 1/x)$

104.—

- a) Montrer que si $a \sin x + b \cos x = 0, \forall x$, alors $a = b = 0$.
 [Cela signifie que la famille $(\sin x, \cos x)$ est une famille libre.]
- b) En déduire que si $a_1 \sin x + b_1 \cos x = a_2 \sin x + b_2 \cos x, \forall x$, alors $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

105. Trouver l'équation de la courbe c telle que la pente de la tangente en chaque point $M(x, y)$ de c soit proportionnelle au carré de la première coordonnée de M .

Rép. $y = Dx^3 + C$

106. La tangente en chaque point (x, y) d'une courbe c coupe l'axe Oy au point $(0, ky)$. Quelles sont les courbes c vérifiant cette propriété ?

Rép. $y = C|x|^{1-k}$

200. Résoudre les équations linéaires suivantes :

- 1) $x^2 y' + y = 1$ 2) $y' - x^3 = xy$ 3) $y' + 2y = 2x^2 - 4x + 5$
 4) $y' \sin x - y \cos x = \cot x$ 5) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^3$ 6) $xy' - 4y = x^5 e^x$

Rép. 1) $y = 1 + Ce^{1/x}$ 2) $y = -x^2 - 2 + Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ 3) $y = x^2 - 3x + 4 + Ce^{-2x}$
 4) $y = \frac{-1}{2 \sin x} + C \sin x$ 5) $y = (x+1)^2(x+C)$ 6) $y = x^4(e^x + C)$

201. Résoudre les équations avec conditions initiales :

- 1) $xy' - 2y = 2 - x$ et $y(0,5) = 0$ 2) $2xy' + y = 1$ et $y(1) = 2$
 3) $xy' + y = x \cos x$ et $y(\pi/2) = 1$ 4) $y' = y + 3x + 2$ et $y(0) = -3$
 5) $y' + y = e^{-x}$ et $y(0) = 0$ 6) $xy' + 3y = -\frac{2}{x}$ et $y(-1) = -3$

Rép. 1) $y = 2x^2 + x - 1$ 2) $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ 3) $y = \frac{x \sin x + \cos x}{x}$
 4) $y = 2e^x - 3x - 5$ 5) $y = xe^{-x}$ 6) $y = \frac{4 - x^2}{x^3}$

ED

202. La vitesse d'accroissement de la population d'un pays au temps t est proportionnelle au nombre d'habitants au temps t . Sachant qu'aux temps 0 et t_1 la population est égale à y_0 et y_1 respectivement, calculer la population de ce pays au temps quelconque t .

Rép. $y = y_0 \left(\frac{y_1}{y_0} \right)^{t/t_1}$

203. Une certaine quantité d'eau que l'on a portée à ébullition (100°) se refroidit dans un milieu de température ambiante 18° . Au bout de 5 minutes, la température de l'eau n'est plus que de 70° . On admet que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures de l'eau et du milieu ambiant.

- a) Au bout de combien de temps cette eau aura-t-elle une température de 19°C ?
- b) Quelle est la vitesse de refroidissement au début et à la fin du processus ?

Rép. a) 48,375 min b) $-7,47^\circ/\text{min}$; $-4,74^\circ/\text{min}$

204. Une personne place 5000 francs à *intérêt composé continu**, au taux de 2,5%. De combien disposera-t-elle sur son compte dans sept ans ? Rép. 5956,23 fr

*Cela signifie que la vitesse d'accroissement du capital est proportionnelle au capital, le facteur de proportionnalité étant égal au taux.

ED

300. On considère l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ linéaire, du 2e ordre, à coefficients constants, sans second membre. Montrer que si y_1 et y_2 en sont deux solutions, alors $Ay_1 + By_2$ en est également une, quels que soient les réels A et B .

301. Soit $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique d'une équation différentielle E linéaire, du 2e ordre, à coefficients constants, sans second membre.

- a) Montrer que si λ est une solution réelle de l'équation caractéristique, alors $e^{\lambda x}$ est une solution de l'équation E .
- b) Montrer que si le discriminant Δ de l'équation caractéristique est nul, et si λ en est l'unique solution, alors $xe^{\lambda x}$ est une solution de E .

302. Montrer que les fonctions $f(x) = e^{px}$ et $g(x) = e^{qx}$ sont linéairement indépendantes si $p \neq q$.

303. Montrer que les fonctions $f(x) = e^{kx}$ et $g(x) = xe^{kx}$ sont linéairement indépendantes.

304. Résoudre les équations suivantes (du deuxième ordre, linéaires à coefficients constants, sans second membre) :

- | | | |
|------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1) $y'' - y' - 2y = 0$ | 2) $y'' - 7y' = 0$ | 3) $y'' + 10y' + 21y = 0$ |
| 4) $y'' - 5y = 0$ | 5) $y'' - 8y' + 16y = 0$ | 6) $y'' + 4y' + 4y = 0$ |

- Rép. 1) $y = Ce^{-x} + De^{2x}$ 2) $y = C + De^{7x}$ 3) $y = Ce^{-3x} + De^{-7x}$
4) $y = Ce^{x\sqrt{5}} + De^{-x\sqrt{5}}$ 5) $y = Ce^{4x} + Dxe^{4x}$ 6) $y = Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}$

305. Résoudre les équations suivantes :

- | | | |
|-------------------------|-------------------|--------------------------|
| 1) $y'' + 4y' + 5y = 0$ | 2) $y'' + 4y = 0$ | 3) $y'' - 6y' + 25y = 0$ |
|-------------------------|-------------------|--------------------------|

- Rép. 1) $y = e^{-2x}(C \cos x + D \sin x)$
2) $y = C \cos 2x + D \sin 2x$
3) $y = e^{3x}(C \cos 4x + D \sin 4x)$

306. Montrer que les fonctions $f(x) = e^{px} \cos(qx)$ et $g(x) = e^{px} \sin(qx)$ sont linéairement indépendantes si $q \neq 0$.

ED

307. Résoudre les équations avec conditions initiales :

- 1) $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$ 2) $y'' - 2y' - 3y = 0$; $y(0) = 4, y'(0) = 0$
 3) $y'' - y' = 0$; $y(1) = e + 1, y'(1) = e$ 4) $y'' + 4y = 0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$

- Rép. 1) $y = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$ 2) $y = 3e^{-x} + e^{3x}$
 3) $y = e^x + 1$ 4) $y = -\cos 2x + \sin 2x$

308. Une particule M se déplace sur une droite d'origine O et subit à chaque instant une force qui est dirigée de M vers O et dont l'intensité est proportionnelle à la distance OM . Trouver l'équation du mouvement de M sachant qu'au temps $t=0$ le mobile se trouve à l'origine et se déplace avec une vitesse v_0 .

Rép. $x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$

309. Une bille de masse m glisse sans frottement dans un tube horizontal qui tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical. Trouver la loi du mouvement $x(t)$ de la bille relativement au tube (axe Ox parallèle au tube, axe Oy perpendiculaire au tube) sachant que, au temps $t=0$, elle se déplace relativement au tube avec une vitesse v_0 et se trouve alors à une distance nulle de l'axe vertical ($x(0)=0, x'(0)=v_0$).

Indication : la force centrifuge subie par la bille est égale à $m \cdot \omega^2 x$.

Rép. $x = \frac{v_0}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t)$

310. On considère l'équation $E: ay'' + by' + cy = f(x)$ (linéaire, du deuxième ordre, à coefficients constants, avec second membre), ainsi que l'équation sans second membre associée $E_0: ay'' + by' + cy = 0$. Soit y_p une solution de E .

- a) Montrer que si y_0 est une solution de E_0 , alors $y = y_p + y_0$ est une solution de E .
 b) Réciproquement, montrer que si y est une solution de E , il existe une solution y_0 de E_0 telle que $y = y_p + y_0$.

Conclusion : pour obtenir la solution générale de E , il suffit d'en trouver une solution particulière y_p et de lui ajouter la solution générale de E_0 .

311. Résoudre les équations suivantes :

- 1) $y'' = 2k$ 2) $y'' = xe^x$ 3) $y'' = \ln x$

Rép. 1) $y = kx^2 + Ax + B$ 2) $y = e^x(x-2) + Ax + B$ 3) $y = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 + Ax + B$

312. Résoudre les équations suivantes :

$$1) \quad y'' - y' - 2y = 4x^2 \qquad 2) \quad y'' - y = \cos x \qquad 3) \quad y'' + y' = x$$

Rép. 1) $y = -2x^2 + 2x - 3 + Ae^{2x} + Be^{-x}$

2) $y = -\frac{1}{2}\cos x + Ae^x + Be^{-x}$

3) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + Ae^{-x} + B$

313. Résoudre les équations suivantes :

$$1) \quad y'' - 4y = 4x \qquad 2) \quad y'' + y = 2e^{-x} \qquad 3) \quad y'' - 2y' = 2 - 4x$$

$$4) \quad y'' - 3y' - 4y = 0 \qquad 5) \quad y'' = 18y \qquad 6) \quad y'' - 4y' + 2y = 4$$

$$7) \quad y'' + 4y' + 3y = 3 \qquad 8) \quad y'' + 4y' + 5y = 0 \qquad 9) \quad y''(1+x^2) = 2x$$

Rép. 1) $y = -x + Ae^{-2x} + Be^{2x}$

2) $y = e^{-x} + A \cos x + B \sin x$

3) $y = x^2 + Ae^{2x} + B$

4) $y = Ae^{-x} + Be^{4x}$

5) $y = Ae^{(3\sqrt{2})x} + Be^{-(3\sqrt{2})x}$

6) $y = 2 + Ae^{(2-\sqrt{2})x} + Be^{(2+\sqrt{2})x}$

7) $y = 1 + Ae^{-3x} + Be^{-x}$

8) $y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x)$

9) $y = x \ln(x^2 + 1) + 2 \operatorname{Arctan} x + Cx + D$

314. A l'instant $t = 0$, un corps de masse m est lâché d'un point O sans vitesse initiale et tombe sous l'action de son poids. Trouver l'équation du mouvement de ce corps en admettant que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de chute.

Rép. $y = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} - \frac{m}{k} e^{kt/m} \right)$

315. Trouver la courbe d'équation $y = f(x)$ dont la dérivée seconde est en chaque point M égale à la somme des coordonnées de M , et telle que $f(0) = f'(0) = 0$.

Rép. $y = -x + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x$

316.—

- La résistance opposée par l'air à une voiture de masse m est supposée proportionnelle à la vitesse v de la voiture. F étant une force constante appliquée par le moteur à la voiture, déterminer l'équation du mouvement de celle-ci.
- Calculer $v(t) = x'(t)$ si l'on a la condition initiale $v(0) = 0$.
- Idem avec les conditions initiales $v(0) = v_0$ et $F = 0$ (pour $t \geq 0$).

Rép. a) $mx'' + kx' = F$ b) $v(t) = \frac{F}{k} (1 - e^{-kt/m})$ c) $v(t) = v_0 e^{-kt/m}$

317. Résoudre les équations suivantes :

1) $y'' + 2y' + y = 4e^x$

2) $y'' + 4y = \cos x - \sin x$

Rép. 1) $y = e^x + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ 2) $y = \frac{1}{3}(\cos x - \sin x) + A \cos(2x) + B \sin(2x)$

318. Une boule d'acier de 20 kg est suspendue, immobile, à un ressort. Celui-ci mesure alors 50 cm de plus que sa longueur naturelle. On place maintenant la boule 150 cm au-dessus de sa position initiale et on la laisse tomber.

- a) En négligeant la résistance de l'air et le diamètre de la boule, exprimer l'altitude x de la boule en fonction du temps. On orientera l'axe Ox de haut en bas et l'on supposera que $x = 0$ quand le ressort a sa longueur naturelle.

Rappel : la force élastique du ressort est proportionnelle à son allongement (loi de Hooke).

- b) Esquisser le graphe de la fonction obtenue.

Rép. $x = \frac{mg}{k} - \frac{mg+k}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$

319. Une masse de 500 grammes est suspendue à un ressort dont la constante de Hooke vaut $4 [N/m]$. Soit $x(t)$ l'allongement — par rapport à sa longueur naturelle — du ressort au temps t . On sait que $x(0) = 1 [m]$ et $x'(0) = 4 [m/s]$. De plus, la résistance de l'air sur la masse est approximativement égale à $-2x'(t) [N]$. Déterminer la fonction x et en esquisser le graphe.

Rép. $x = \frac{g}{8} + e^{-2t} \left(\frac{8-g}{8} \cos(2t) + \frac{24-g}{8} \sin(2t) \right)$

320. Un corps chimique contient n molécules. Au temps t_0 commence une réaction. Le nombre de molécules transformées à l'instant t est égal à x . On cherche la fonction $x(t)$ sachant que la vitesse de transformation à l'instant t est proportionnelle au nombre de molécules restantes au même instant.

Rép. $x = n + Ce^{-kt} \quad (k > 0)$

321. Un condensateur de capacité C , chargé de manière à présenter à ses bornes une tension U_0 , est relié au temps $t = 0$ à une résistance R . Calculer la tension $U(t)$ aux bornes du condensateur sachant que sa décharge obéit à l'équation différentielle $RCU' + U = 0$.

Rép. $U = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$

322. Résoudre les équations suivantes :

$$1) \quad y' + y = x^2 \qquad 2) \quad y' - ay = e^{bx} \quad (a, b \in \mathbb{R}) \qquad 3) \quad (1 - x^2)y' + 2xy = 1 + x^2$$

Indication pour le 3) : $\frac{x^2 + 1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x+1)^2}$

Rép. 1) $y = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$ 2) $y = \frac{1}{b-a} e^{bx} + Ce^{ax}$ 3) $y = x + C(1 - x^2)$

323. Un skieur de masse m glisse à la vitesse $v(t)$ sans frottement sur une piste rectiligne faisant un angle α avec l'horizontale. Il subit de la part de l'air une résistance kv^2 ($k > 0$). La vitesse du skieur au temps 0 était nulle. Trouver la fonction $v(t)$ et calculer la vitesse limite atteinte par le skieur.

Rép. $v = \frac{a}{b} \cdot \frac{e^{2abt} - 1}{e^{2abt} + 1}$ où $a = \sqrt{g \sin \alpha}$, $b = \sqrt{k/m}$; vitesse limite : $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{k}}$

324. Une bouée cylindrique de rayon r et de masse m flotte immobile dans un liquide de masse volumique ρ , l'axe du cylindre étant vertical. Soit alors h la hauteur immergée et P le point de l'axe du cylindre situé au niveau du liquide.

- a) Montrer que, dans cet état d'équilibre, $h = \frac{m}{\rho \pi r^2}$. (Newton et Archimède...)
- b) En abaissant la bouée puis en la relâchant, elle se met à osciller verticalement. Soit $x(t)$ l'altitude du point P par rapport au niveau du liquide, comptée négativement si P est immergé. Etablir que :

$$mx'' = -\rho \pi r^2 g x$$

325. Une bouée cylindrique de 0,5 m de diamètre flotte sur de l'eau douce, son axe étant vertical. Si on l'enfonce légèrement avant de la relâcher, sa période d'oscillation est de 2 secondes. Quelle est sa masse ?

Rép. 195,2 kg

326. Un parachutiste tombe à une vitesse de 55 m/s, lorsque son parachute s'ouvre. Si la résistance de l'air est $\frac{1}{25} P v^2$, où P est le poids de l'homme et du parachute, trouver la vitesse en fonction du temps, après l'ouverture du parachute, ainsi que la vitesse limite.

Rép. $v \cong 5 \cdot \frac{6e^{4t} + 5}{6e^{4t} - 5} = 5 \cdot \frac{6 + 5e^{-4t}}{6 - 5e^{-4t}}$; vitesse limite : 5 m/s

ED

327. Un marin, se tenant au coin A d'un bassin rectangulaire $ABCD$ ($AB = 20$ m), tient l'amarre de 20 m de longueur d'un bateau situé en B . Il marche le long du bassin, vers D , l'amarre restant tendue. Situer le marin et le bateau lorsque ce dernier se trouve à 12 m de AD .

Indication : choisir un repère Oxy tel que $O = A$, B est sur l'axe Oy positif et D sur l'axe Ox positif.

Rép. équation de la trajectoire du bateau : $x = 20 \cdot \ln \left(\frac{20 + \sqrt{400 - y^2}}{y} \right) - \sqrt{400 - y^2}$;

le marin est à 22 m de A et le bateau à 6 m de AB