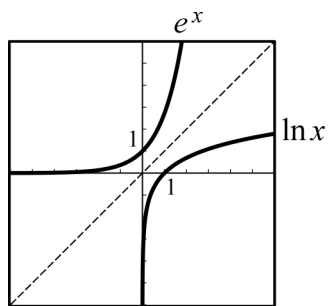
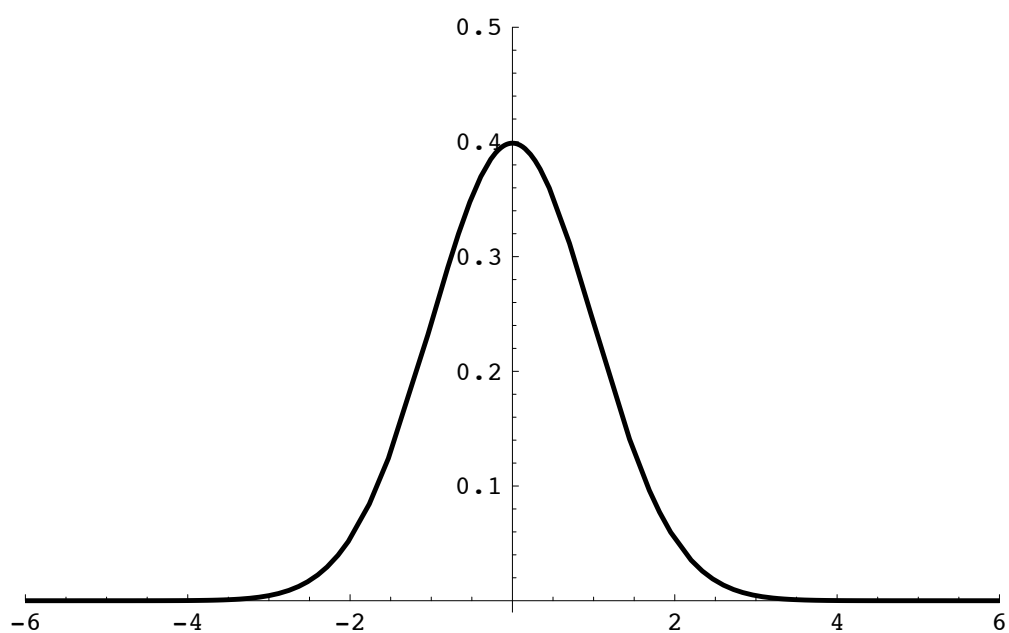


EXPONENTIELLES & *LOGARITHMES*



Courbe de Gauss : $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$



*L'aire délimitée par la courbe et l'axe Ox
est exactement égale à 1*

TABLE DES MATIÈRES

Racine n -ième	§ 1
Racine d'un produit et d'un quotient	§ 2
Exposants fractionnaires	§ 3
Puissances et racines – Formulaire	§ 4
Logarithme – définition	§ 5
Calcul d'un logarithme à la machine	§ 6
Réciprocité de $\exp_a(x)$ et $\log_a(x)$	§ 7
Logarithme d'un produit	§ 8
Graphes des fonctions 2^x et $\log_2(x)$	§ 9
Intérêts composés	§ 10
Fonction exponentielle de base e	§ 20
Logarithme naturel	§ 21
Réciprocité de $\exp$ et $\ln$	§ 22
Graphe des fonctions $\exp$ et $\ln$	§ 23

EXERCICES

§ 1. RACINE n -ième

Définitions

1. Soit $n > 0$ un entier *pair*, et a un réel ≥ 0 .

La racine n -ième de a , notée $\sqrt[n]{a}$, est le nombre **positif** dont la puissance n est a .

2. Soit $n > 0$ un entier *impair*, et a un réel quelconque.

La racine n -ième de a , notée $\sqrt[n]{a}$, est l'unique nombre dont la puissance n est a .

Exemples

$$\sqrt[3]{8} = 2; \quad \sqrt[3]{-8} = -2; \quad \sqrt[5]{32} = 2; \quad \sqrt[2]{16} = 4; \quad \sqrt[1]{7} = 7$$

Remarques

- $\sqrt[2]{a}$ s'abrège $\sqrt{a}$
- $\sqrt[1]{a} = a$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a^n} = a$
- Si n est pair, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$
- Si n est impair, $\sqrt[n]{a^n} = a$

§ 2. RACINE D'UN PRODUIT ET D'UN QUOTIENT

Théorème

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$(a, b \in \mathbb{R}_+ ; n \in \mathbb{N}^*)$$

Preuve

$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ étant ≥ 0 , il suffit de vérifier que sa puissance n est ab :

$$\left(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

De manière semblable, on obtient :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Remarque

Si n est impair, les formules ci-dessus sont vraies également pour a et b négatifs.

Exemples

- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{5} = 2 \sqrt[3]{5}$
- $\sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$
- $\sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{3}{10} = 0,3$

§ 3. EXPOSANTS FRACTIONNAIRES

Si l'on veut donner un sens à une expression du type $a^{\frac{2}{3}}$ en respectant les règles de calcul habituelles sur les puissances, on doit avoir :

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\frac{2}{3} \cdot 3} = a^2$$

$a^{\frac{2}{3}}$ est donc nécessairement la racine cubique de a^2 . Il est alors naturel de définir les puissances à exposant fractionnaire comme suit :

Définition

Soit a un réel ≥ 0 , et m, n deux entiers, n étant ≥ 1 . On pose :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

En particulier :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Exemples

$$1) \quad a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} \qquad 2) \quad a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a} \qquad 3) \quad a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$$

Bien que ce soit un peu fastidieux, il n'est pas trop difficile de montrer que les formules utilisées habituellement pour des puissances à exposant entier sont encore valables pour les exposants fractionnaires. Cela permet de ramener les calculs de racines à des calculs de puissances.

Exemples

$$1) \quad \sqrt[3]{a^5} \sqrt[6]{a^7} = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{17}{6}} = \sqrt[6]{a^{17}}$$

$$2) \quad \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

§ 4. PUISSANCES ET RACINES – FORMULAIRE

<i>Produit de puissances de même base</i>	$a^n a^m = a^{n+m}$
<i>Quotient de puissances de même base</i>	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
<i>Puissance de puissance</i>	$(a^n)^m = a^{nm}$
<i>Puissance d'un produit</i>	$(ab)^n = a^n b^n$
<i>Puissance d'un quotient</i>	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
<i>Racine d'un produit</i>	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
<i>Racine d'un quotient</i>	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
<i>Inverse $\leftrightarrow$ Opposé</i>	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Mise en garde : $\sqrt[n]{a+b}$ n'est pas égal à $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ (sauf si $a=0$, ou $b=0$, ou $n=1$).

§ 5. LOGARITHME – DÉFINITION

Soient a et x deux réels > 0 , avec $a \neq 1$.

On appelle *logarithme de x en base a* — et l'on note $\log_a(x)$ — le nombre u tel que $x = a^u$.

$$u = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^u$$

Autrement dit, $\log_a(x)$ est *l'exposant de la puissance de base a qui est égale à x* .

Exemples

- $\log_{10}(1000) = 3$, car $1000 = 10^3$
- $\log_{10}(0,01) = -2$, car $0,01 = 10^{-2}$
- $\log_2(16) = 4$, car $16 = 2^4$

§ 6. CALCUL D'UN LOGARITHME À LA MACHINE

La calculatrice donne le logarithme en base 10 (touche LOG). Pour calculer un logarithme de base différente, on utilise la formule suivante :

$$\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)}$$

Exemple

$$\log_{15}(1291) = \frac{\log_{10}(1291)}{\log_{10}(15)} = 2,645140178...$$

Preuve de la formule

Posons : $m = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^m$ (1)

$$u = \log_{10}(x) \Leftrightarrow x = 10^u$$
 (2)

$$v = \log_{10}(a) \Leftrightarrow a = 10^v$$
 (3)

Il faut montrer que $m = \frac{u}{v}$, qui équivaut à $mv = u$.

$$10^{mv} = \left(10^v\right)^m \stackrel{(3)}{=} a^m \stackrel{(1)}{=} x \stackrel{(2)}{=} 10^u. \text{ D'où } 10^{mv} = 10^u \text{ et donc } mv = u.$$

De manière analogue, on obtient la formule plus générale de **changement de base** :

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

§ 7. RÉCIPROCITÉ DE $\exp_a(x)$ ET $\log_a(x)$

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. On appelle *fonction exponentielle* de base a la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $\exp_a(x) = a^x$. On appelle *fonction logarithmique* de base a la fonction $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ envoyant x sur $\log_a(x)$.

Théorème

Les fonctions $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ sont **réciroques** l'une de l'autre. Autrement dit :

1. $\exp_a(\log_a(x)) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
2. $\log_a(\exp_a(x)) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Preuve

1. Posons $u = \log_a(x)$, qui équivaut à $x = a^u$.
Alors : $\exp_a(\log_a(x)) = \exp_a(u) = a^u = x$.
2. $\log_a(\exp_a(x)) = \log_a(a^x) = x$.

Corollaire

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

1. $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$
2. $\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve

1. $a^x = a^y \Rightarrow \log_a(a^x) = \log_a(a^y) \Rightarrow x = y$. La réciproque est banale.
2. $\log_a(x) = \log_a(y) \Rightarrow \exp_a(\log_a(x)) = \exp_a(\log_a(y)) \Rightarrow x = y$.

La réciproque est banale.

§ 8. LOGARITHME D'UN PRODUIT

Théorème

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

"Le logarithme transforme les multiplications en additions"

Preuve

Posons : $u = \log_a(xy) \Leftrightarrow a^u = xy$ (1)

$$v = \log_a(x) \Leftrightarrow a^v = x$$
 (2)

$$w = \log_a(y) \Leftrightarrow a^w = y$$
 (3)

Il faut établir que $u = v + w$.

$$a^{v+w} = a^v \cdot a^w \stackrel{(2)(3)}{=} xy \stackrel{(1)}{=} a^u. \text{ D'où } a^{v+w} = a^u \text{ et donc } u = v + w.$$

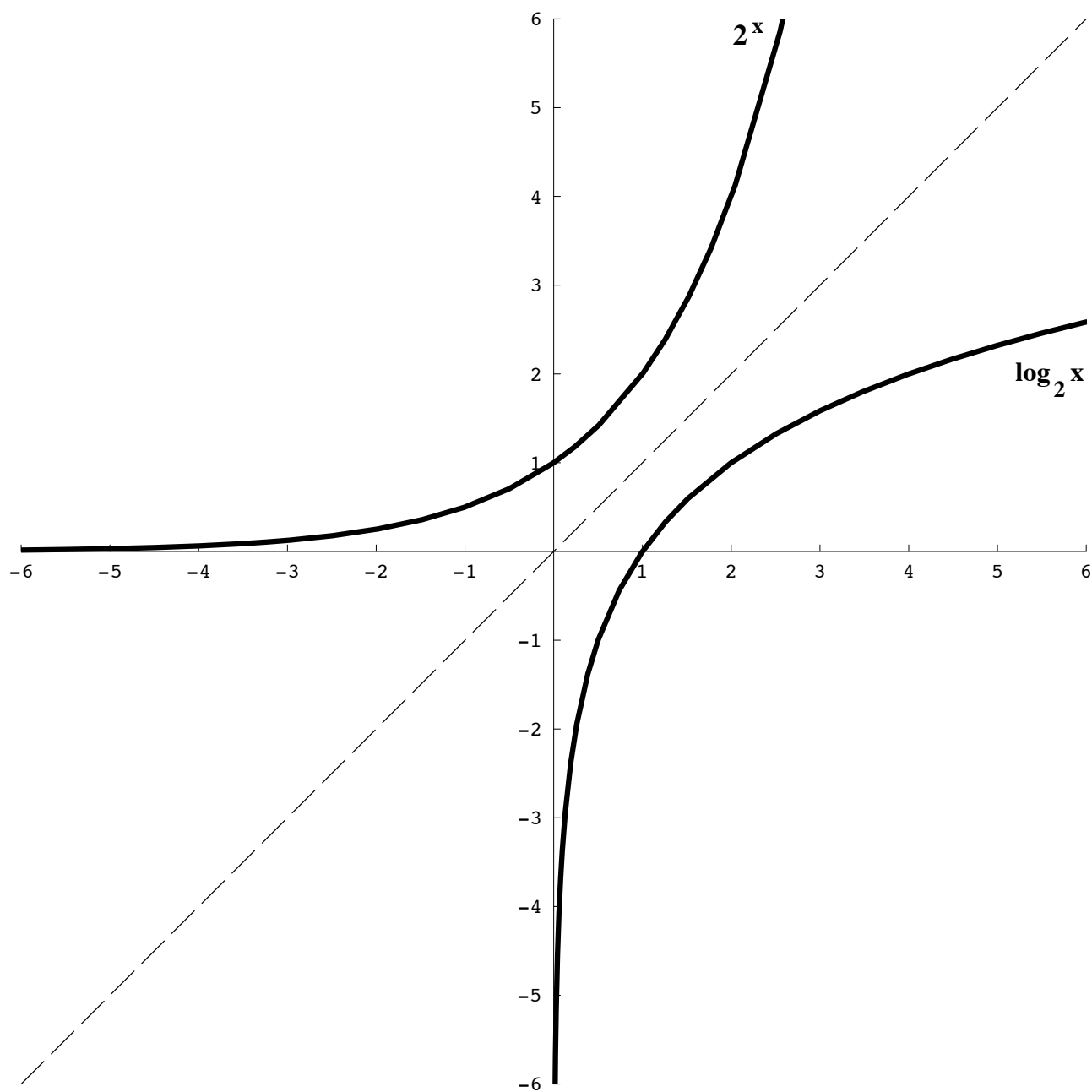
De manière analogue, on obtient :

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x), \text{ pour tout } n \in \mathbb{R}$$

§ 9. GRAPHES DES FONCTIONS 2^x ET $\log_2(x)$



Remarque

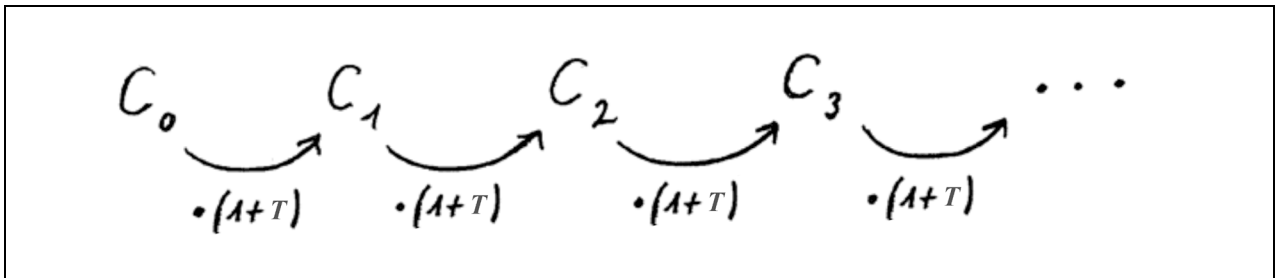
Les deux fonctions étant réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

§ 10. INTÉRÊTS COMPOSÉS

Comment évolue au cours des années un capital C_0 (capital initial) placé à un taux fixe T ?

Posons : C_1 = capital après 1 an de placement (= C_0 plus l'intérêt produit par C_0 la 1^{re} année) ;
 C_2 = capital après 2 ans de placement (= C_1 plus l'intérêt produit par C_1 la 2^e année) ;
 C_3 = capital après 3 ans de placement (= C_2 plus l'intérêt produit par C_2 la 3^e année) ;
etc.

On a :



En effet :

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 + T \cdot C_0 = C_0(1+T) ; \\ C_2 &= C_1 + T \cdot C_1 = C_1(1+T) ; \\ C_3 &= C_2 + T \cdot C_2 = C_2(1+T) ; \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Tout cela se résume ainsi :

$$C_n = C_0(1+T)^n$$

[T = taux du placement ; C_0 = capital initial ; C_n = capital après n années]

§ 20. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons :

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Plus précisément : $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$, où $S_n(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. Il faut bien sûr montrer que cette limite existe et est finie (pour tout x), ce que nous ne ferons pas ici...

Définition

Notons e l'image de 1 par la fonction $\exp$:

$$e = \exp(1) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \cong 2,718$$

Théorème 1

Pour tous réels x, y :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Idée de la preuve

Multiplions les sommes définissant $\exp(x)$ et $\exp(y)$ comme de simples polynômes, en groupant les termes de même degré (on peut montrer que cette façon de faire est légitime) :

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \right) \\ &= 1 + (x+y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!} \right) + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^2y}{2!} + \frac{y^3}{3!} \right) + \dots \\ &= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots = \exp(x+y). \end{aligned}$$

Théorème 2

Pour tout réel x :

$$\exp(x) = e^x$$

Idée de la preuve

- $x \in \mathbb{N}$ $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \dots = 1 = e^0$

$$\exp(1) = e = e^1 \text{ (par définition de } e \text{)}$$

$$\exp(2) = \exp(1+1) \stackrel{*}{=} \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2$$

$$\exp(3) = \exp(2+1) \stackrel{*}{=} \exp(2) \cdot \exp(1) = e^2 \cdot e = e^3$$

etc.

- $x \in \mathbb{Q}_+$ Prenons par exemple $x = \frac{3}{5}$. Il s'agit de montrer que $\exp\left(\frac{3}{5}\right) = e^{3/5} = \sqrt[5]{e^3}$.

$$\left(\exp\left(\frac{3}{5}\right)\right)^5 \stackrel{*}{=} \exp\left(5 \cdot \frac{3}{5}\right) = \exp(3) = e^3 ; \quad \Rightarrow \quad \exp\left(\frac{3}{5}\right) = \sqrt[5]{e^3}.$$

- $x \in \mathbb{Q}_-$ Ecrivons $x = -y$, avec $y \in \mathbb{Q}_+$. Alors :

$$\exp(y) \cdot \exp(-y) \stackrel{*}{=} \exp(y-y) = \exp(0) = 1 ;$$

$$\Rightarrow \exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{e^y} = e^{-y} \quad (y \in \mathbb{Q}_+) ; \quad \Rightarrow \quad \exp(x) = e^x.$$

- $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ C'est une question de "continuité"...

* En vertu du théorème 1

§ 21. LOGARITHME NATUREL

Le logarithme naturel ("ln") est le logarithme en base $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \cong 2,718$:

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$$(x > 0)$$

On a donc :

$$u = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^u$$

L'ensemble de définition de la fonction $\ln : x \mapsto \ln(x)$ est $\mathbb{R}_+^*$, comme pour les autres logarithmes.

Formules diverses

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

Formules de passage :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad ; \quad a^x = e^{(\ln a)x}$$

§ 22. RÉCIPROCITÉ DE $\exp$ ET $\ln$

Théorème

Les fonctions $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ sont **réciroques** l'une de l'autre :

$$1. \quad \exp(\ln(x)) = x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$2. \quad \ln(\exp(x)) = x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(On rappelle que $\exp(x) = e^x$)

Preuve

1. Posons $u = \ln x$, qui équivaut à $e^u = x$.

$$\text{Alors : } \exp(\ln(x)) = \exp(u) = e^u = x.$$

2. Posons $v = e^x$, qui équivaut à $x = \ln(v)$.

$$\text{Alors : } \ln(\exp(x)) = \ln(e^x) = \ln(v) = x.$$

Remarque

Le théorème ci-dessus peut s'exprimer également ainsi :

$$1. \quad e^{\ln x} = x$$

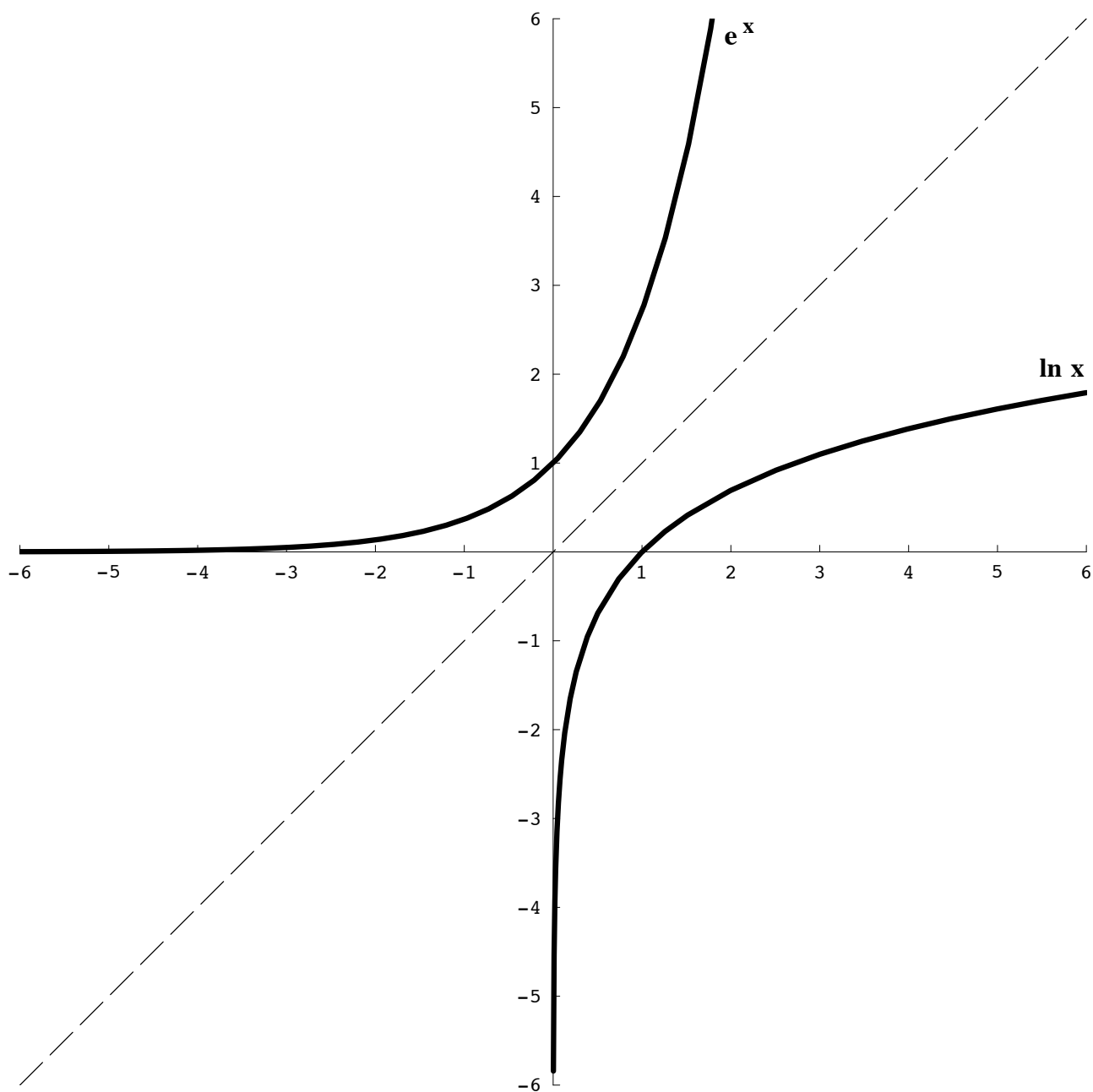
$$2. \quad \ln(e^x) = x$$

Corollaire

$$1. \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y, \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y, \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

§ 23. GRAPHES DES FONCTIONS $\exp$ ET $\ln$



Les deux fonctions étant réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant (droite d'équation $y = x$)

EXERCICES

1. Sachant que $\sqrt{27} \cong 5,19$ et que $\sqrt{270} \cong 16,43$, calculer :

a) $\sqrt{2700}$ b) $\sqrt{27000}$ c) $\sqrt{270000}$ d) $\sqrt{2,7}$ e) $\sqrt{0,27}$ f) $\sqrt{0,027}$

Rép. a) 51,9 b) 164,3 c) 519 d) 1,643 e) 0,519 f) 0,1643

2. Réduire :

a) $\sqrt{24}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{243}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{300}$ b) $\sqrt{54}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{147}$; $\sqrt{80}$; $3\sqrt{12}$

c) $3\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 3\sqrt{80}$ d) $2\sqrt{40} - 2\sqrt{90} + \sqrt{4000} - 5\sqrt{10}$

Rép. a) $2\sqrt{6}$; $3\sqrt{2}$; $9\sqrt{3}$; $5\sqrt{2}$; $10\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{6}$; $5\sqrt{5}$; $7\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; $6\sqrt{3}$

c) $-2\sqrt{5}$ d) $13\sqrt{10}$

3. Réduire :

a) $(3 - \sqrt{3})(1 - 2\sqrt{3})$

b) $(4 - \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$

c) $(5 - 2\sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$

d) $(3\sqrt{12} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{12} - 3\sqrt{2})$

e) $(2\sqrt{3} - 1)^2$

f) $(2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$

Rép. a) $9 - 7\sqrt{3}$ b) $16 - 11\sqrt{2}$ c) $-5 + 3\sqrt{5}$ d) $132 - 2\sqrt{6}$ e) $13 - 4\sqrt{3}$

f) $23 + 4\sqrt{15}$

4. Eliminer la racine du dénominateur :

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{2}{\sqrt{6}}$; $\frac{3}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{2}{3\sqrt{12}}$; $\frac{2}{\sqrt{2}}$; $\frac{15}{\sqrt{80}}$

c) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$; $\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{4\sqrt{5} + 6}{\sqrt{20}}$; $\frac{\sqrt{32} - 7\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

Rép. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{9}$; $\sqrt{2}$; $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ c) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; $\frac{\sqrt{3} - 3}{3}$ d) $\frac{10 + 3\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{3}{2}$

5. Réduire :

a) $(3\sqrt{2})^2$; $(\sqrt{2} - \sqrt{6})^2$; $(3a\sqrt{b})^2$

b) $2\sqrt{18}\sqrt{8}$; $(7+2\sqrt{6})(9-5\sqrt{6})$; $\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{27}{6}}$

c) $\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{144}{49}}$; $\sqrt{\frac{1}{72}}\sqrt{32}$; $\sqrt{\frac{28}{5}}\sqrt{\frac{35}{4}}$

Rép. a) 18 ; $8-4\sqrt{3}$; $9a^2b$ b) 24 ; $3-17\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$ c) $\frac{12}{35}$; $\frac{2}{3}$; 7

6. Classer dans l'ordre croissant les quatre nombres suivants :

$$a = 2^{222} ; \quad b = 2^{(22^2)} ; \quad c = 22^{22} ; \quad d = (2^{22})^2$$

Rép. $d < c < a < b$

7. a) Ecrire en code décimal : 10^3 ; 10^6 ; 10^{-2} ; 10^{-9} ; 100^{-3} .

b) Ecrire les nombres ci-dessous en "notation scientifique", c'est-à-dire sous la forme

$$a \cdot 10^n, \text{ avec } 1 \leq a < 10$$

$0,0003$; $0,0042$; 163200 ; $0,00704$; $429,74$; $3270,31$; $0,00148$; 136 .

c) Calculer : (réponse en notation scientifique)

$$(3,6 \cdot 10^{-6}) \cdot (8 \cdot 10^3) ; \quad (7,9 \cdot 10^{21}) \cdot (3,1 \cdot 10^{-10}) ; \quad \frac{8,6 \cdot 10^{17}}{2 \cdot 10^{11}} ; \quad \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 2,3 \cdot 10^5}{1,5 \cdot 10^{18}}.$$

Rép. a) 1000 ; $1'000'000$; $0,01$; $0,000'000'001$; $0,000'001$

b) $3 \cdot 10^{-4}$; $4,2 \cdot 10^{-3}$; $1,632 \cdot 10^5$; $7,04 \cdot 10^{-3}$;
 $4,2974 \cdot 10^2$; $3,27031 \cdot 10^3$; $1,48 \cdot 10^{-3}$; $1,36 \cdot 10^2$

c) $2,88 \cdot 10^{-2}$; $2,449 \cdot 10^{12}$; $4,3 \cdot 10^6$; $7,6 \cdot 10^{-17}$

8. Ecrire sans barre de fraction :

1) $\frac{1}{a^3}$ 2) $\frac{a}{b^7}$ 3) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^5$ 4) $\frac{1}{a^{-4}}$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$ 6) $\left(\frac{a}{(cd)^5}\right)^2$

Rép. 1) a^{-3} 2) ab^{-7} 3) $a^{10}b^{-15}$ 4) a^4 5) $a^{-3}b^3$ 6) $a^2c^{-10}d^{-10}$

9. Ecrire sans exposants négatifs :

1) a^{-5} 2) $(a^2 b^{-2})^{-3}$ 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4}$ 4) 10^{-5} 5) $(a^{-3} b^2 c^4)^{-1}$ 6) $\left(\frac{ac^{-1}}{2b^{-4}}\right)^2$

Rép. 1) $\frac{1}{a^5}$ 2) $\frac{b^6}{a^6}$ 3) $\frac{b^4}{a^4}$ 4) $\frac{1}{10^5}$ 5) $\frac{a^3}{b^2 c^4}$ 6) $\frac{a^2 b^8}{4c^2}$

10. Ecrire sous forme d'une puissance de a :

1) $a^8 a^{-5}$ 2) $a^{-4} a^{-2}$ 3) $a^{2n-9} a^{8-n}$ 4) $a^{n-3} a^{3-n}$

Rép. 1) a^3 2) a^{-6} 3) a^{n-1} 4) 1

11. Résoudre les équations suivantes : (inconnue : x)

1. $x^3 = 27$

6. $x^4 = 17$

2. $x^3 - 5 = 0$

7. $7x^4 - 49 = 0$

3. $3x^3 = 5$

8. $\frac{1}{2} x^5 = 13$

4. $2x^3 = a$

9. $ax^5 - b = 0$ ($a \neq 0$)

5. $\frac{4}{3} \pi x^3 = 10$

10. $\frac{4}{3} \pi x^3 = V$

Rép.

1) 3

2) 1,709976

3) 1,1856

4) $\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$

5) $\sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}$

6) $\pm 2,0305$

7) $\pm 1,6266$

8) 1,9186

9) $\sqrt[5]{\frac{b}{a}}$

10) $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

12. Calculer (*sans machine*) :

$$\begin{array}{lll}
 1. \sqrt[3]{27 \cdot 1000} & 6. \sqrt[4]{\frac{16}{10000}} & 10. \sqrt[3]{\frac{125 a^3}{10^6}} \\
 2. \sqrt[5]{32 \cdot 100000} & 7. \sqrt[3]{0,008} & 11. \sqrt[5]{a^{10} \cdot 100000} \\
 3. \sqrt[4]{16 \cdot 10^4} & 8. \sqrt[3]{\frac{1}{10^{12}}} & 12. \sqrt[3]{\frac{1}{10^{15}}} \\
 4. \sqrt[3]{0,001} & 9. \sqrt[4]{10^{12}} & 13. \sqrt[3]{a^3 b^6} \\
 5. \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} & &
 \end{array}$$

Réponse :

$$\begin{array}{llllll}
 1) 30 & 2) 20 & 3) 20 & 4) 0,1 & 5) \frac{3}{10} & 6) \frac{1}{5} \\
 7) 0,2 & 8) \frac{1}{10^4} & 9) 10^3 & 10) \frac{a}{20} & 11) 10a^2 & \\
 12) \frac{1}{10^5} & 13) ab^2 & & & &
 \end{array}$$

13. Réduire :

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{80}} & 2) \frac{\sqrt{3} + \sqrt{18}}{2\sqrt{3}} & 3) \frac{10\sqrt{2} + 20}{\sqrt{2700}} \\
 4) \frac{10a}{\sqrt{a}} & 5) \frac{a^5}{\sqrt{a^3}} & 6) \frac{3}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{b}}
 \end{array}$$

Réponse : 1) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ 2) $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{9}$ 4) $10\sqrt{a}$ 5) $a^3\sqrt{a}$ 6) $\frac{3\sqrt{ab}}{a}$

14. Simplifier :

$$\begin{array}{ll}
 1. \frac{a^{-5}b^4}{a^2b^{-1}} & 3. \frac{(2a)^{-3} \cdot b^5}{b^2 \cdot 4a^{-1}} \\
 2. \frac{(a^2b^{-3})^2}{a(b^{-1})^2} & 4. \sqrt[3]{a^{18}} \quad (a > 0)
 \end{array}$$

Réponse : 1) $a^{-7}b^5$ 2) a^3b^{-4} 3) $2^{-5}a^{-2}b^3$ 4) a^3

15. Résoudre :

Résoudre :

$$1. 2^{2x} = 2^{x+5}$$

$$3. 3^{5x} = 9^{x+1}$$

$$5. 2(x^5)^2 - a = 0$$

$$2. 4^x = 2^{x-3}$$

$$4. 25^{x+3} = 5^{1-x}$$

$$6. 27^x - 3 \cdot 3^{2x} = 0$$

Rép.

$$1) 5 \quad 2) -3 \quad 3) \frac{2}{3} \quad 4) -\frac{5}{3} \quad 5) \pm \sqrt[10]{\frac{a}{2}} \quad 6) 1$$

16. Ecrire au moyen d'un exposant fractionnaire :

$$1. \sqrt[5]{a^2} \quad 2. \sqrt[8]{(a^2)^3} \quad 3. \sqrt[3]{a^9} \quad 4. \sqrt{2} \quad 5. \sqrt[7]{a}$$

$$6. \sqrt{a^4} \quad 7. \sqrt[n]{a^{2n}} \quad 8. (\sqrt[3]{a^2})^7 \quad 9. (\sqrt[3]{a^n})^2 \quad 10. \sqrt[3]{\sqrt{a^5}}$$

Rép. 1) $a^{2/5}$ 2) $a^{3/4}$ 3) a^3 4) $2^{1/2}$ 5) $a^{1/7}$
6) a^2 7) a^2 8) $a^{14/3}$ 9) $a^{2n/3}$ 10) $a^{5/6}$

17. Ecrire sans exposant fractionnaire :

$$1. 3^{5/6} \quad 2. a^{4/3} \quad 3. a^{-1/2} \quad 4. a^{-2/3}$$

$$5. a^{9,5} \quad 6. a^{-9,2} \quad 7. a^{-1/2} b^{1/3} \quad 8. (a^2 b)^{-1/4}$$

Rép. 1) $\sqrt[6]{3^5}$ 2) $\sqrt[3]{a^4}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 4) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$
5) $\sqrt{a}$ 6) $\frac{1}{\sqrt[5]{a}}$ 7) $\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$ 8) $\frac{1}{\sqrt{a} \sqrt[4]{b}}$

18. Réduire : (réponse sous forme d'une puissance de a)

$$1) \sqrt[5]{a^3} (\sqrt[5]{a})^2 \quad 2) (\sqrt[3]{a})^2 \cdot \sqrt[3]{a} \quad 3) (\sqrt[5]{a})^3 (\sqrt[5]{a^2})^6$$

Rép. 1) a 2) a 3) a^3

19. Réduire :

$$1) \sqrt{2^4} + 3 \sqrt[3]{3^9} - 4 \sqrt[4]{2^{16}} - \sqrt[5]{4^{10}} - 2 \sqrt[6]{2^{12}}$$

$$2) \sqrt{5^4} + 2 \sqrt[3]{5^6} - 3 \sqrt[4]{5^8} + 4 \sqrt[7]{5^{14}} - 5 \sqrt[13]{5^{26}}$$

Rép. 1) -3 2) -25

20. Réduire :

$$1) \sqrt{a \sqrt{a}} \quad 2) \sqrt[3]{a \sqrt{a^4}} \quad 3) \sqrt[5]{a^2} \sqrt{a^3} \quad 4) \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$$

$$5) \sqrt[3]{a \sqrt{a^2} \sqrt{a^4}} \quad 6) \sqrt{a \sqrt[3]{a \sqrt{a}}} \quad 7) a \left(\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}} \right) \quad 8) \sqrt{\frac{a}{\sqrt[5]{a}}}$$

Rép. 1) $\sqrt[4]{a^3}$ 2) a 3) $\sqrt[10]{a^{19}}$ 4) $\sqrt[12]{a}$ 5) a 6) $\sqrt[4]{a^3}$ 7) $\sqrt[9]{a^8}$ 8) $\sqrt[5]{a^2}$

21. Ecrire sous forme d'une puissance de a :

$$1. \sqrt[4]{a^3} \sqrt[3]{a^4} \quad 2. \sqrt[n]{a} \sqrt[2n]{a} \quad 3. \sqrt{a} \sqrt[5]{a^3} (\sqrt[10]{a})^4$$

$$4. \left(\sqrt[2n]{\sqrt[n]{a}} \right)^{3n} \quad 5. \left(\sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{a}}} \right)^{128} \quad 6. \left(\frac{1}{\sqrt{a^3}} \right)^6$$

Rép.

$$1) a^{\frac{25}{12}} \quad 2) a^{\frac{3}{2n}} \quad 3) a^{\frac{3}{2}}$$

$$4) a^{\frac{3}{2n}} \quad 5) a^2 \quad 6) a^{-9}$$

22. Réduire :

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{(x^2 y^2)^n}{(x^3 y^2)^{n-1}} & 2) \frac{(a^{n-1} b^n)^2}{(a^2 b^2)^{n-1}} & 3) \frac{(16x^4 y^2)^n}{(4x^2 y)^{2n-1}} \\
 4) \frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a} \sqrt[3]{a}} & 5) \frac{a}{\sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a}} & 6) \frac{\sqrt[3]{a^5} \sqrt[6]{a}}{a^3}
 \end{array}$$

Rép. 1) $x^{3-n} y^2$ 2) b^2 3) $4x^2 y$ 4) 1 5) $\sqrt[12]{a}$ 6) $\frac{1}{\sqrt[6]{a^7}}$

23. Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 1) (3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2} & 2) (5^{x+2})^4 = 125 \cdot 5^{x-3} \\
 3) 27^{x+2} = 3^{5x+8} & 4) 9^x \cdot 2^{2x} = 6^{-3} \\
 5) 16^x \cdot 125^x = \frac{10^4}{5^x} & 6) 3 \cdot 3^{4x} - 4 \cdot 3^{2x} + 1 = 0 \\
 7) 2^{6x} + 6 \cdot 2^{3x} + 9 = 0 & 8)
 \end{array}$$

Rép. 1) $\frac{3}{2}$ 2) $-\frac{8}{3}$ 3) -1 4) $-\frac{3}{2}$ 5) 1 6) $0; -\frac{1}{2}$ 7) $\emptyset$ 8)

24. Sans calculatrice, déterminer les logarithmes suivants :

$$\begin{array}{ll}
 1. \log_{10}(1000) & 2. \log_{10}(10^7) \\
 3. \log_{10}(1) & 4. \log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) \\
 5. \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\right) & 6. \log_{10}(\sqrt[3]{100})
 \end{array}$$

Rép. 1) 3 2) 7 3) 0 4) -1 5) $-\frac{1}{4}$ 6) $\frac{2}{3}$

25. Sans calculatrice, déterminer les logarithmes suivants :

$$\begin{array}{ll}
 1. \log_2\left(\frac{1}{64}\right) & 2. \log_3(81) \\
 3. \log_3(\sqrt[4]{3}) & 4. \log_2(\sqrt[4]{2}) \\
 5. \log_4(\sqrt[5]{64}) & 6. \log_3\left(\frac{1}{27}\right)
 \end{array}$$

Rép. 1) -6 2) 4 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{4}$ 5) $\frac{3}{5}$ 6) -3

26. Résoudre les équations :

1. $x = \log_2 32$

2. $x = \log_5 125$

3. $\log_4 x = 3$

4. $\log_2 x = 4$

5. $\log_x 256 = 4$

6. $\log_x 125 = 3$

Rép. 1) 5 2) 3 3) 64 4) 16 5) 4 6) 5

27. Sans calculatrice, déterminer le logarithme en base 10 des nombres suivants :

a) $10'000$; $1'000'000$; $\frac{1}{1000}$; 10^{-5} ; $10^{23,1}$

b) $\frac{1}{10^9}$; $0,0001$; $\sqrt[3]{10000}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{1000}}$

Rép. a) 4 ; 6 ; -3 ; -5 ; 23,1 b) -9 ; -4 ; $\frac{4}{3}$; $-\frac{3}{5}$

28. En tâtonnant ("essais-corrections"), calculer avec deux décimales exactes :

a) $\log_{15}(1291)$

b) $\log_{1291}(15)$.

Rép. a) 2,64... b) 0,37...

29. Avec la machine, calculer :

1) $\log_7(12)$

2) $\log_{12}(7)$

3) $\log_5(8)$

4) $\log_7(-56)$

Rép. 1) 1,276989 2) 0,78309 3) 1,2920297 4) n'existe pas

30. Résoudre les équations suivantes :

a) $3^x = 19$

b) $5^{2x-1} = 127$

c) $3 \cdot 7^{x+3} - 12 = 0$

d) $6^{2x+2} - 9 \cdot 6^{x+1} + 14 = 0$

Rép. a) 2,68014 b) 2,0049 c) -2,2876 d) -0,613 ou 0,086

30 BIS. Résoudre les équations suivantes :

a) $3^{x-5} = 10$

b) $2^{2x+1} - 15 = 0$

c) $x^4 = 7$

d) $x^5 = 20$

e) $(x-1)^{13} = 120$

f) $7 \cdot 5^x - 22 = 0$

Rép. a) 7,0959 b) 1,45345 c) $\pm 1,6266$ d) 1,8206 e) 2,4452 f) 0,7115

31. Le nombre de bactéries d'une culture double toutes les 10 secondes. Au début de l'expérience, il y a 500 bactéries.

- Trouver une fonction $N(t)$ donnant le nombre de bactéries après t secondes.
- Au bout de combien de secondes y aura-t-il 10'000 bactéries ?

Rép. a) $N(t) = 500 \cdot 2^{t/10}$ b) 43,2 secondes

32. Soient les fonctions $f : x \mapsto 2^x$ et $g : x \mapsto \log_2(x)$.

Sur un même graphique, dessiner les graphes de f et g . Unité sur les axes : 5 carrés.

Pour f , se limiter à des valeurs de x comprises entre -4 et $2,2$.

Pour g , se limiter à des valeurs de x comprises entre $0,1$ et 5 .

Quelle est la relation géométrique entre les deux courbes ?

33. Résoudre les équations suivantes :

- $3^x = 177147$
- $2^x = 100$
- $10^{3x} = 14,87$
- $3 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{-x} = 7$
- $2^{2x} - 14 \cdot 2^x - 15 = 0$
- $9^x \cdot 4^x = \frac{1}{200}$

Rép. a) 11 b) 6,64 c) 0,39077 d) 0,431 ; $-0,683$ e) 3,9 f) $-1,479$

34. Mettre sous forme " $\alpha \log_2(a) + \beta \log_2(b) + \gamma \log_2(c)$ " :

- $\log_2(a^2 bc)$
- $\log_2\left(\frac{ab}{c}\right)$
- $\log_2\left(\frac{a^3}{\sqrt{b} c}\right)$
- $\log_2\left(\frac{a^2 \sqrt[5]{b}}{\sqrt{c^3}}\right)$

- Rép. 1. $2 \log_2(a) + \log_2(b) + \log_2(c)$ 2. $\log_2(a) + \log_2(b) - \log_2(c)$
 3. $3 \log_2(a) - \frac{1}{2} \log_2(b) - \log_2(c)$ 4. $2 \log_2(a) + \frac{1}{5} \log_2(b) - \frac{3}{2} \log_2(c)$

35. Mettre sous forme " $\log_2(\dots)$ " :

- $3 \log_2(a) - 2 \log_2(b)$
- $\frac{1}{2} \log_2(a) + 5 \log_2(b)$
- $\frac{1}{3} \log_2(a) - \frac{3}{2} \log_2(b)$
- $3 \log_2(a) + \frac{1}{5} \log_2(b) - \frac{7}{3} \log_2(c)$

Rép. 1) $\log_2\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$ 2) $\log_2(\sqrt{a} b^5)$ 3) $\log_2\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3}}\right)$ 4) $\log_2\left(\frac{a^3 \sqrt[5]{b}}{\sqrt[3]{c^7}}\right)$

36. Démontrer les formules suivantes : ($a, x, y > 0$; $a \neq 1$)

- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

37. Mettre sous forme $\alpha \log_{10}(2) + \beta \log_{10}(5)$:

- | | |
|-------------------------|--|
| a) $\log_{10}(10)$ | b) $\log_{10}(125)$ |
| c) $\log_{10}(0,00128)$ | d) $\log_{10}(3,2)$ |
| e) $\log_{10}(62500)$ | f) $\log_{10}\left(\sqrt[3]{\frac{16}{25}}\right)$ |

Rép. a) $\log_{10}(2) + \log_{10}(5)$ b) $3\log_{10}(5)$ c) $2\log_{10}(2) - 5\log_{10}(5)$
d) $4\log_{10}(2) - \log_{10}(5)$ e) $2\log_{10}(2) + 6\log_{10}(5)$ f) $\frac{4}{3}\log_{10}(2) - \frac{2}{3}\log_{10}(5)$

38. Résoudre :

- | | |
|---|--|
| a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ | b) $3^{2x} - 3^x - 12 = 0$ |
| c) $2 \cdot 5^{2x} - 11 \cdot 5^x = -5$ | d) $2 \cdot 7^{2x} - 12 = 5 \cdot 7^x$ |

Rép. a) 1 ; 1,585 b) 1,262 c) 1 ; -0,4307 d) 0,7124

39. Mettre sous forme " $\log_{10}(\dots)$ " :

- | | |
|-----------------------|---------------------------------------|
| a) 2 | b) 1 |
| c) -2 | d) $\log_{10}(2) + \log_{10}(7)$ |
| e) $1 + \log_{10}(x)$ | f) $3\log_{10}(x) - \log_{10}(7) + 2$ |

Rép. a) $\log_{10}(100)$ b) $\log_{10}(10)$ c) $\log_{10}(0,01)$
d) $\log_{10}(14)$ e) $\log_{10}(10x)$ f) $\log_{10}\left(\frac{100x^3}{7}\right)$

40. Résoudre les équations suivantes, en donnant d'abord la condition d'existence.

Indication : commencer par mettre l'équation sous la forme $\log_{10}(\dots) = \log_{10}(\dots)$ à l'aide des formules du § 8.

- | | |
|--|--|
| 1. $\log_{10} x = \frac{1}{2} \log_{10} 7$ | 2. $\log_{10} x = 3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 5$ |
| 3. $\log_{10}\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \log_{10} 5$ | 4. $\log_{10}(x+1) = 2 \log_{10} a$ |
| 5. $\log_{10}(x-15) = 3 \log_{10} 3 - \log_{10} 5$ | 6. $\log_{10} x = 1 + \log_{10} 7$ |

Rép. 1) $\sqrt{7}$ 2) 200 3) $\frac{1}{125}$ 4) $a^2 - 1$ 5) $\frac{102}{5}$ 6) 70

41. Résoudre les équations en x suivantes, en donnant d'abord la condition d'existence :

1. $\log_{10} x = \frac{1}{2} \log_{10} a$
2. $\log_{10} x = 3 \log_{10} a + 2 \log_{10} b$
3. $\log_{10} \left(\frac{1}{x} \right) = 3 \log_{10} (a + b)$
4. $\log_{10} (x + 1) = 2 \log_{10} (a - 1)$

Rép. 1) $\sqrt{a}$ 2) $a^3 b^2$ 3) $\frac{1}{(a+b)^3}$ 4) $a^2 - 2a$

42. Un capital de 1000 fr est placé à la banque début janvier. Chaque année, il augmente, grâce aux intérêts, du 4% de sa valeur au début de l'année ("intérêts composés").

- a) Calculer la valeur du capital après 1 an ; 2 ans ; 3 ans.
- b) Exprimer la valeur du capital au bout de n années.
- c) En combien d'années cette valeur atteint-elle 10'000 fr ?

Rép. a) 1040 ; 1081,6 ; 1124,86 b) $1000(1,04)^n$ c) 59

43. Résoudre : a) $120(1,06)^n = 1856$ b) $120(1+T)^8 = 140,6$

Rép. a) 47 b) 0,02 ; -2,02

44. Un capital de 20'000 fr placé à intérêts composés a atteint la valeur de 29'549,10 fr en 8 années.

- a) Quel est le taux du placement ?
- b) Combien de temps faut-il encore le placer pour qu'il se monte à 36'000 fr ?

Rép. a) 5% b) encore 4 ans

45. Résoudre : (la base est 10)

1. $\log x = 0$
2. $\log x = -10$
3. $\log x = 2 + \log 7$
4. $\log x = 1 - \log 2$
5. $\log(x+1) = 3$
6. $\log(x+1) - \log(x-1) = 1$

Rép. 1) 1 2) 10^{-10} 3) 700 4) 5 5) 999 6) $\frac{11}{9}$

46. Un corps radioactif de masse initiale 10 kg se désintègre. Sa masse après t années est donnée par :

$$m(t) = 10 \cdot 2^{-\frac{t}{103}}$$

- a) Quelle sera la masse dans 103 ans ? dans 206 ans ? dans 309 ans ?
- b) En combien d'années la masse se réduira-t-elle à 1kg ?
- c) Esquisser le graphe de la fonction $m(t)$ pour t compris entre -206 et 309 .

Rép. a) 5 kg ; 2,5 kg ; 1,25 kg b) 342 ans

47. Combien de temps faut-il pour qu'un capital de 20'000 fr placé à intérêts composés au taux de 6% devienne 37'966 fr ?

Rép. 11 ans

48. En première approximation, la pression atmosphérique à l'altitude x est donnée par la fonction

$$x \mapsto 76 \cdot 2^{-\frac{x}{5500}}$$

(pression en centimètres de mercure ; altitude en mètres)

- a) Que vaut la pression au niveau de la mer ? à 5500 m ? à 11000 m ? à 16500 m ?
- b) A quelle altitude la pression se réduit-elle à 5 cm de mercure ?

Rép. a) 76 ; 38 ; 19 ; 9,5 b) 21'593 m

49. Un capital de 5000 fr placé à intérêts composés est devenu 9676,40 fr après 15 ans. Trouver le taux.

Rép. 4,5%

50. Déterminer l'ensemble de définition de f :

- a) $f(x) = \log(x)$ b) $f(x) = \log(x+5)$ c) $f(x) = \log\left(\frac{x+3}{x-4}\right)$

Rép. a) $\mathbb{R}_+^*$ b) $] -5 ; +\infty [$ c) $] -\infty ; -3 [\cup] 4 ; +\infty [$

51. Un pays a été soumis à une forte inflation entre 1950 et 1985 : le coût de la vie s'y est multiplié par 10 tous les 5 ans.

- a) Trouver la fonction donnant le coût de la vie à partir du numéro de l'année (entre 1950 et 1985), le coût étant posé égal à 100 en 1950.
- b) Quels sont les coûts de la vie en 1965 et en 1972 ?
- c) Quand le coût de la vie a-t-il été de 2000 ? de 12000 ?

Rép. a) $t \mapsto 100 \cdot 10^{(t-1950)/5}$ b) 100'000 ; $2,512 \cdot 10^6$ c) 1956,5 ; 1960,4

52. Résoudre : (inconnue : x)

1. $\frac{4}{3}\pi x^3 = V$

2. $3^{-\frac{x}{5}} = a$

3. $x^{12} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$

4. $4\log_2(x) = \log_2(x^2 + 2)$

5. $x^6 = 3x$

6. $7^{\log_7(x)} + 3x = 3$

Rép. 1) $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ 2) $-5\log_3(a)$ 3) $\pm \sqrt[72]{a}$ 4) $\sqrt{2}$ 5) $0 ; 1,246$ 6) $\frac{3}{4}$

53. Résoudre :

1) $5^{x-3} = 9$

2) $2 \cdot 7^{2x-1} = 13$

3) $5 \cdot 2^{5x+4} = 25$

4) $(1+x)^{35} = 128$

5) $(x-3)^{14} = 349$

6) $3 \cdot (2x-1)^5 = 17$

7) $2 \cdot 4^{1-x} - 14 = 0$

8) $\frac{4}{5} \cdot 2^{5x-6} - \frac{13}{10} = 0$

Rép. 1) 4,365
3) -0,3356
5) 4,519 ; 1,481
7) -0,404

2) 0,981
4) 0,1487
6) 1,2074
8) 1,3401

54. Résoudre les équations suivantes en appliquant la fonction logarithme aux deux membres :

a) $2^x = 3^{x+1}$

b) $(1,02)^x = 3 \cdot 7^x$

c) $2^x = 5 \cdot 3^x$

d) $2 \cdot 3^x = 7 \cdot 5^x$

Rép. a) -2,7095 b) -0,57038 c) -3,9694 d) -2,4524

55. La population d'une culture de bactéries augmente de 26% par jour.

- a) Par quel multiplicateur passe-t-on de la population un jour donné à la population le jour suivant ?
b) Un certain lundi, à midi, la population est de 600 bactéries. Quelle sera-t-elle le lundi suivant, à midi ?
c) Aujourd'hui, les bactéries sont au nombre de 7200. Dans combien de jours y en aura-t-il 100 fois plus ?

Rép. a) 1,26 b) 3025,137 c) 20 jours

60. Posons, pour tout entier positif n , $s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

Calculer $s_3 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$, $s_4 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$, s_5 et s_6 .

Rép. $2,\overline{6}$; $2,708\overline{3}$; $2,71\overline{6}$; $2,7180\overline{5}$

61. Résoudre les équations suivantes :

a) $e^x = 5$

b) $e^x = 1$

c) $e^x = 0$

d) $e^{2x+1} = 2$

e) $\frac{1}{e^x - 3} = 2$

f) $e^{2x} - e^x - 2 = 0$

Rép. a) $\ln 5$ b) 0 c) $\emptyset$ d) $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$ e) $\ln 7 - \ln 2$ f) $\ln 2$

62. Mettre sous forme " $\alpha \ln a + \beta \ln b + \gamma \ln c$ " :

1) $\ln\left(\frac{a^2 b}{c}\right)$

2) $\ln\left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3}\right)$

Rép. 1) $2\ln a + \ln b - \ln c$

2) $\ln a + \frac{1}{2}\ln b - 3\ln c$

63. Mettre sous forme " $\ln(\dots)$ " :

1) $3\ln a - 2\ln b$

2) $\frac{1}{2}\ln a + 5\ln b$

3) $\frac{1}{3}\ln a - \frac{3}{2}\ln b$

4) $3\ln a + \frac{1}{5}\ln b - \frac{7}{3}\ln c$

Rép. 1) $\ln\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$ 2) $\ln(\sqrt{a} b^5)$ 3) $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3}}\right)$ 4) $\ln\left(\frac{a^3 \sqrt[5]{b}}{\sqrt[3]{c^7}}\right)$

63 BIS. Résoudre les équations suivantes :

a) $2e^{5x} - 7 = 0$

b) $\frac{3}{5}e^{2x+1} = 25$

c) $\frac{1}{e^{-2x}} - 36 = 0$

d) $\frac{1}{7^{5x-1}} - 540 = 0$

Rép. a) $0,2506$ b) $1,365$ c) $1,792$ d) $-0,4466$

64. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- | | | | |
|---------------|----------------------|---|--------------------------------------|
| 1) $\ln(x+3)$ | 2) $\ln(x^2-4)$ | 3) $\ln(\ln x)$ | 4) $\ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$ |
| 5) e^{x+2} | 6) $\frac{1}{\ln x}$ | 7) $\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ | 8) $\ln x $ |

Rép. 1) $] -3; +\infty[$ 2) $] -\infty; -2[\cup] 2; +\infty[$ 3) $] 1; +\infty[$
 4) $] -\infty; 1[- \{0\}$ 5) $\mathbb{R}$ 6) $] 0; +\infty[- \{1\}$
 7) $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$ 8) $\mathbb{R}^*$

65. Dans un même repère Oxy , dessiner les graphes de $\exp : x \mapsto e^x$ et $\ln : x \mapsto \ln(x)$.
 (Unité sur les deux axes : 2 carrés ; x et y compris entre -6 et 6 .)

66. Résoudre les équations :

- | | |
|------------------------|---------------------------------|
| 1. $e^{2x} + e^x = 2$ | 2. $e^{-x} = 3e^{2x}$ |
| 3. $e^x - e^{x/2} = 6$ | 4. $e^{3x} - e^{2x} - 2e^x = 0$ |

Rép. 1) 0 2) $-\frac{1}{3}\ln 3$ 3) $2\ln 3$ 4) $\ln 2$

67. Mettre sous forme " $\alpha \ln a + \beta \ln b - \gamma \ln c$ " :

- | | | | |
|------------------|-----------------------------------|---|---|
| 1) $\ln(a^2 bc)$ | 2) $\ln\left(\frac{ab}{c}\right)$ | 3) $\ln\left(\frac{a^3}{\sqrt{b} c}\right)$ | 4) $\ln\left(\frac{a^2 \sqrt[5]{b}}{\sqrt{c^3}}\right)$ |
|------------------|-----------------------------------|---|---|

Rép. 1) $2\ln a + \ln b + \ln c$ 2) $\ln a + \ln b - \ln c$
 3) $3\ln a - \frac{1}{2}\ln b - \ln c$ 4) $2\ln a + \frac{1}{5}\ln b - \frac{3}{2}\ln c$

67 BIS. Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| a) $e^{\ln x} = 7$ | b) $\ln(e^3) + e^{-x} - 50 = 0$ |
| c) $2e^{2x} - 13e^x = -15$ | d) $\frac{1}{e^{4x+1}} = \ln(e^{25})$ |

Rép. a) 7 b) $-3,85$ c) $\ln 5; \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ d) $-1,0547$

68. Résoudre les équations suivantes : (chercher d'abord la condition d'existence)

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| a) $\ln x = 3$ | b) $\ln(x+1) = 7$ |
| c) $\ln x = 2$ | d) $\ln(x-1) = 5$ |
| e) $1 + \ln x = 3 + \ln 2$ | f) $\ln(x+1) = 1$ |
| g) $\ln x + \ln(2x) = 3$ | h) $1 - \ln x = \ln 5$ |

Rép. a) e^3 b) $e^7 - 1$ c) e^2 d) $e^5 + 1$
 e) $2e^2$ f) $e - 1$ g) $\sqrt{\frac{e^3}{2}}$ h) $\frac{e}{5}$

69. Etudier le signe de la fonction f :

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| 1) $f(x) = 3\ln x - 1$ | 2) $f(x) = (\ln(3x) - 5)(x + 3)$ |
| 3) $f(x) = 2x - x\ln x$ | 4) $f(x) = e^x - 1$ |
| 5) $f(x) = (x+1)(e^{x-2} - 5)$ | 6) $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^3}$ |

Rép. 1. $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|c} 0 & \sqrt[3]{e} \\ \hline & - \quad 0 \quad + \end{array}$ 2. $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{3}e^5 \\ \hline & - \quad 0 \quad + \end{array}$
 3. $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|c} 0 & e^2 \\ \hline & + \quad 0 \quad - \end{array}$ 4. $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & - \quad 0 \quad + \end{array}$
 5. $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|ccc} -1 & 2+\ln 5 & & \\ \hline & + & 0 & - \quad 0 \quad + \end{array}$ 6. $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|ccc} -3 & -2 & 0 & \\ \hline & + & 0 & - \quad 0 \quad + \end{array}$

70. Un corps radioactif de masse initiale m_0 se désintègre. Sa masse après le temps t est donnée par

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t} \quad (\alpha = \text{constante} > 0).$$

- a) Calculer la période T de ce corps, c'est-à-dire le temps au bout duquel la masse est réduite à la moitié de sa valeur initiale.
 b) Montrer que, pour tout t , $m(t+T) = \frac{1}{2} m(t)$.

Rép. a) $T = \frac{\ln 2}{\alpha}$

71. Un flux radioactif de mesure b aborde un écran. Sachant que chaque fois qu'il a traversé une épaisseur a de l'écran, il devient 3 fois plus petit, établir l'expression donnant la mesure du flux en fonction de l'épaisseur x traversée.

72. En chimie, le "pH" d'une solution est défini comme

l'opposé du logarithme en base 10 de la concentration en ions H^+ ,

la concentration étant exprimée en moles par litre.

Le pH d'une solution *A* est 8, celui d'une solution *B* est 6. Quelle est la solution la plus concentrée en ions H^+ ?