

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

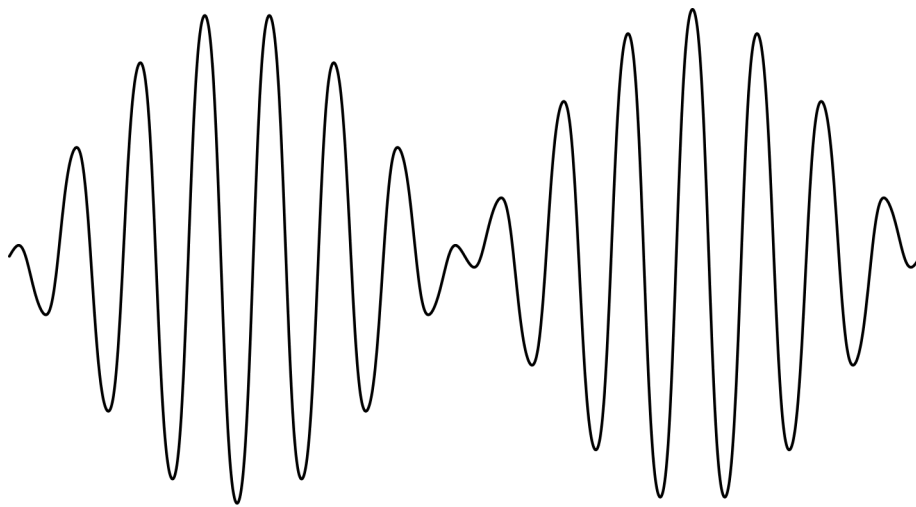


TABLE DES MATIÈRES

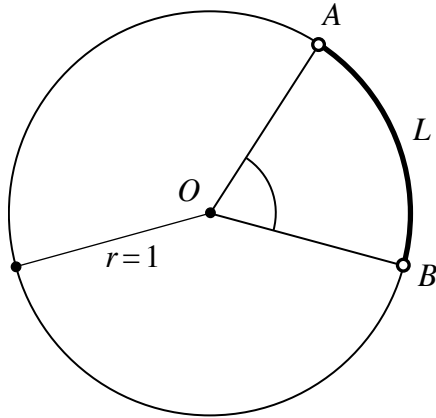
Radians	10
Le cercle trigonométrique	11
Relations trigonométriques fondamentales	12
Formules de réduction	13
Formules d'addition	14
Graphes des fonctions trigonométriques	15
Limite en 0 de $(\sin x)/x$	21
Dérivée des fonctions trigonométriques	22
Dérivée d'une fonction composée	23
Périodicité	24
Parité d'une fonction	25
Variations sur le graphe d'une fonction	26

EXERCICES

§ 10. RADIANS

Définition

La mesure d'un angle en radians est la longueur de l'arc qu'il intercepte sur un cercle de rayon 1 centré au sommet de l'angle.



$$\begin{aligned} L &= \text{longueur de l'arc } \widehat{AB} \\ &= \text{mesure de l'angle } \widehat{AOB} \text{ en radians} \end{aligned}$$

Formules de conversion

Soit d la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en degrés. Le périmètre du cercle de rayon 1 valant 2π , on a :

$$\frac{L}{2\pi} = \frac{d}{360} \Leftrightarrow \frac{L}{\pi} = \frac{d}{180} \Leftrightarrow \frac{L}{d} = \frac{\pi}{180}$$

Ainsi :

$\frac{\text{mesure en radians}}{\text{mesure en degrés}} = \frac{\pi}{180}$
--

Angles particuliers

degrés	180	90	60	45	30	~57
radians	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	1

§ 11. LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

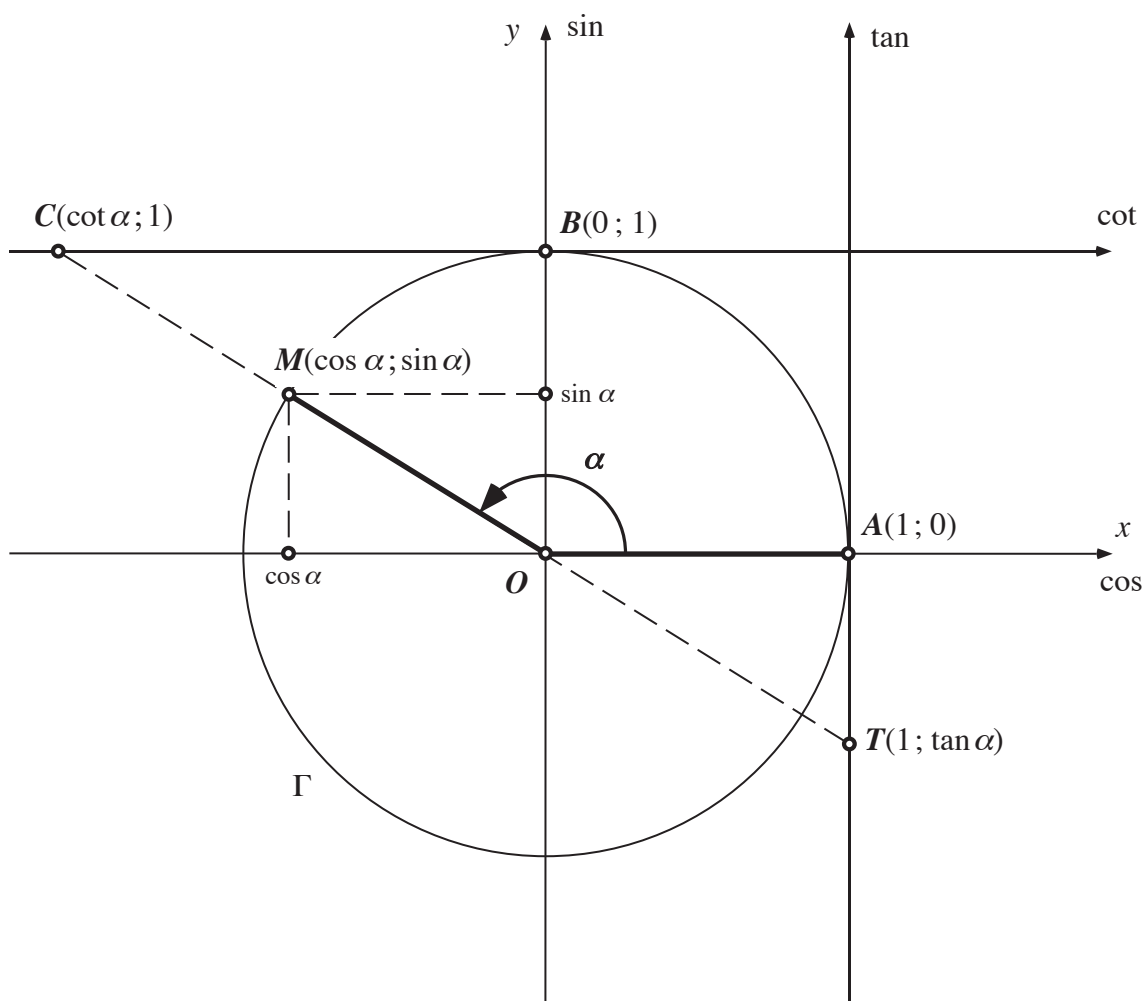
Dans un repère orthonormé Oxy , on considère le cercle Γ de centre O et de rayon 1. A tout angle orienté α , on associe le point M de Γ défini par :

$M = \text{image de } A(1; 0) \text{ par la rotation d'angle } \alpha \text{ autour de } O.$

Soit encore T le point d'intersection de la droite OM avec la verticale passant par A , et C le point d'intersection de la droite OM avec l'horizontale passant par $B(0; 1)$. On définit alors le cosinus, le sinus, la tangente et la cotangente de l'angle orienté α comme suit :



$\cos \alpha$	=	abscisse de M
$\sin \alpha$	=	ordonnée de M
$\tan \alpha$	=	ordonnée de T
$\cot \alpha$	=	abscisse de C



Le cercle Γ , muni des axes $\sin$, $\cos$, $\tan$ et $\cot$, est appelé *cercle trigonométrique*.

§ 12. RELATIONS TRIGONOMETRIQUES FONDAMENTALES

Théorème

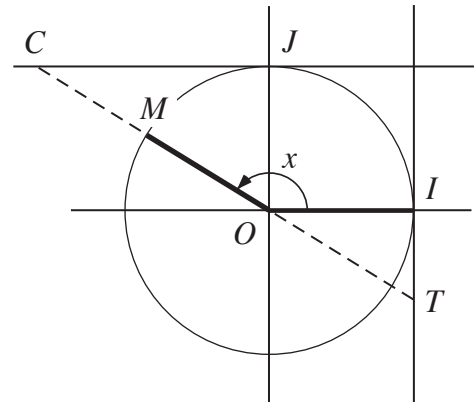
Les fonctions trigonométriques satisfont, partout où elles sont définies, les relations suivantes :

$(1) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$	
$(2) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $(3) \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $(4) \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(5) \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$	

Preuve

Relativement à la base orthonormée $(\vec{OI}, \vec{OJ})$, et par définition des fonctions trigonométriques, on a : (cf. figure)

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}; \quad \vec{OT} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan x \end{pmatrix}; \quad \vec{OC} = \begin{pmatrix} \cot x \\ 1 \end{pmatrix}$$

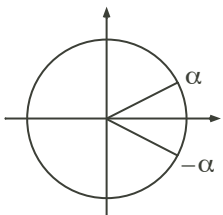
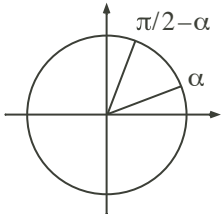
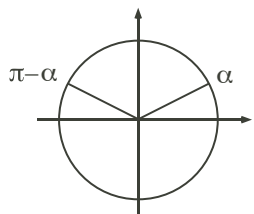
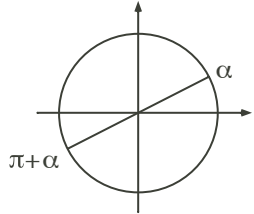
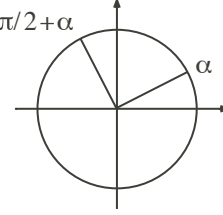


Il en résulte ce qui suit :

1. $\|\vec{OM}\|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$; or $\|\vec{OM}\| = 1$; d'où la relation (1).
2. Les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{OT}$ sont colinéaires ;
 $\Rightarrow \cos x \tan x = \sin x$ (produits croisés égaux) ; $\Rightarrow$ (2).
3. Comme ci-dessus, mais à partir des vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{OC}$.
4. Divisant la relation (1) par $\cos^2 x$, on obtient :

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} ; \Rightarrow \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
5. Comme ci-dessus, mais en divisant (1) par $\sin^2 x$.

§ 13. FORMULES DE RÉDUCTION

$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$ $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$ $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$ $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$	Les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques Les fonctions tan et cot sont π-périodiques
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$	
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$	

§ 14. FORMULES D'ADDITION

Théorème

$$(A) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$(B) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$(C) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Démonstration

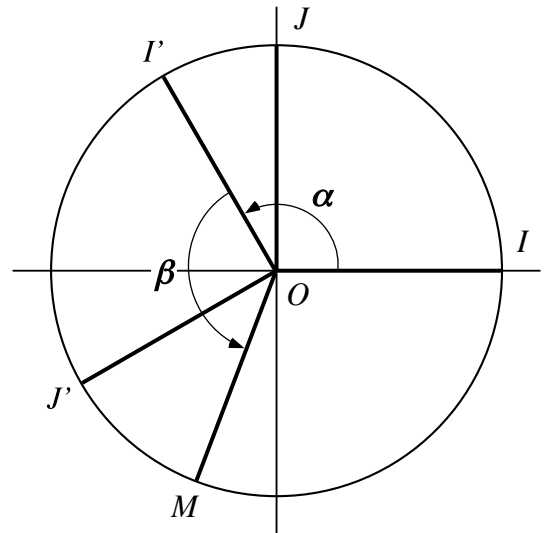
Soit M le point du cercle trigonométrique associé à l'angle $\alpha + \beta$, et (O, I', J') le repère obtenu par rotation d'angle α autour de O du repère (O, I, J) . On a, par définition des fonctions trigonométriques :

$$(1) \quad \overrightarrow{OM} = \cos(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{OI} + \sin(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{OJ}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OM} = \cos \beta \cdot \overrightarrow{OI'} + \sin \beta \cdot \overrightarrow{OJ'}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{OI'} = \cos \alpha \cdot \overrightarrow{OI} + \sin \alpha \cdot \overrightarrow{OJ}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{OJ'} &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overrightarrow{OI} + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overrightarrow{OJ} \\ &= -\sin \alpha \cdot \overrightarrow{OI} + \cos \alpha \cdot \overrightarrow{OJ} \end{aligned}$$



On remplace alors dans (2) $\overrightarrow{OI'}$ et $\overrightarrow{OJ'}$ par leurs expressions (3) et (4) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \cos \beta \cdot (\cos \alpha \cdot \overrightarrow{OI} + \sin \alpha \cdot \overrightarrow{OJ}) + \sin \beta \cdot (-\sin \alpha \cdot \overrightarrow{OI} + \cos \alpha \cdot \overrightarrow{OJ}) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cdot \overrightarrow{OI} + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cdot \overrightarrow{OJ} \end{aligned}$$

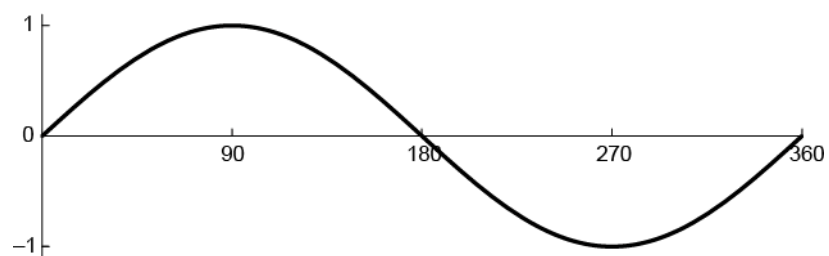
D'où les formules (A) et (B), en comparant avec (1).

La formule (C) s'établit comme suit :

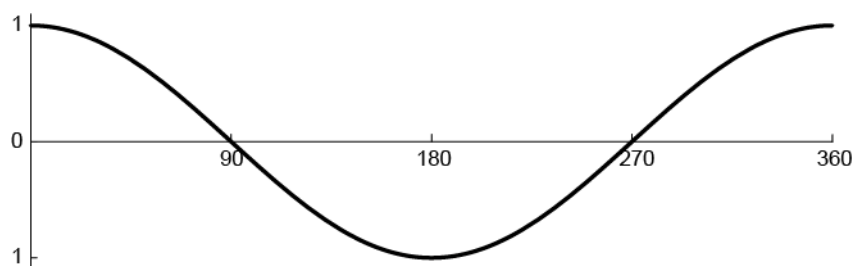
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

§ 15. GRAPHES DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

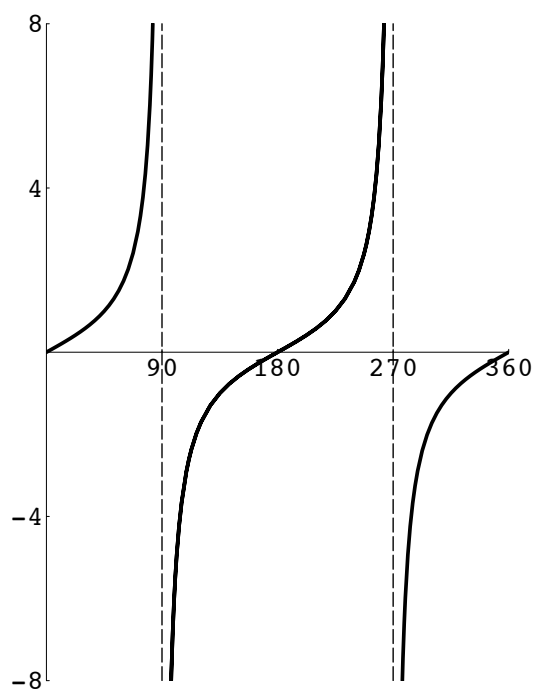
- Fonction $\sin x$



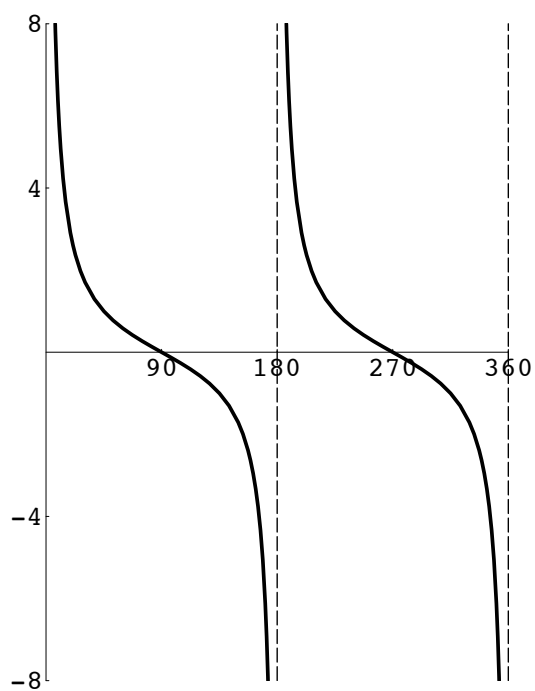
- Fonction $\cos x$



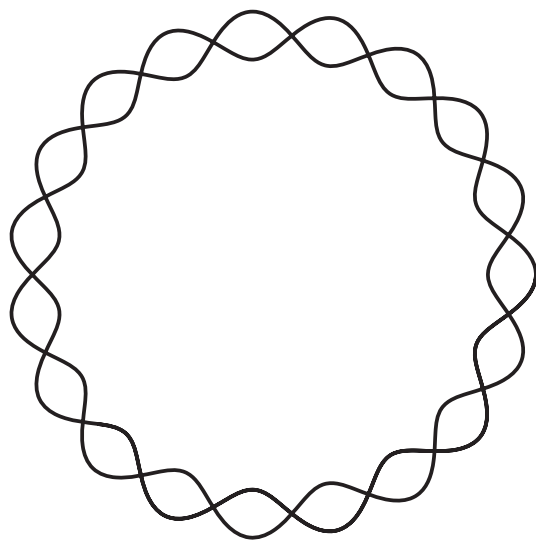
- Fonctions $\tan x$ et $\cot x$



$\tan x$



$\cot x$



$$r = \cos(9,5t) + 10$$

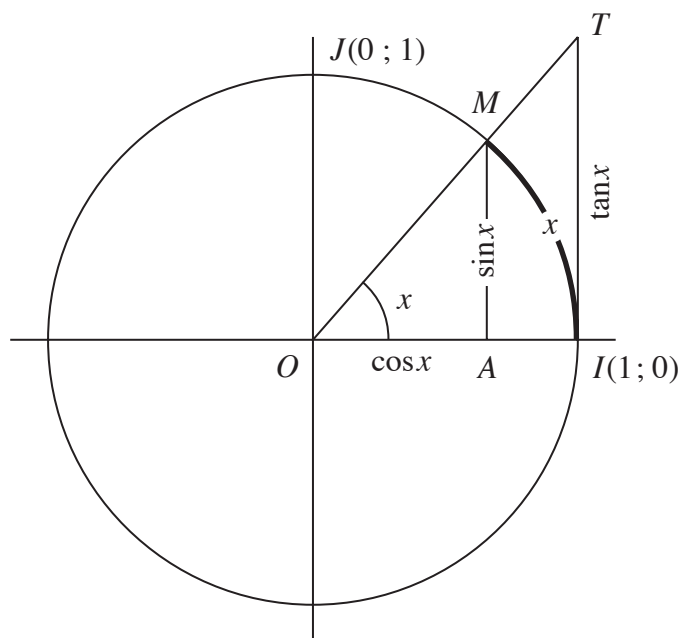
§ 21. LIMITE EN 0 DE $\frac{\sin x}{x}$

Théorème

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(où $\sin x$ désigne le sinus d'un angle dont x est la mesure en *radians*)

Preuve



Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. On peut écrire, en considérant les triangles OAM , OIT et le secteur circulaire S déterminé par les points O , I et M :

$$\text{Aire}(OAM) < \text{Aire}(S) < \text{Aire}(OIT) ;$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1 \cdot \tan x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos x < x < \tan x .$$

En divisant par $\sin x$, on trouve :

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} .$$

Or $\cos x$ et $\frac{1}{\cos x}$ tendent tous deux vers 1 lorsque x approche 0. Ainsi, le valeur $\frac{x}{\sin x}$ est coincé

entre les deux gendarmes $\cos x$ et $\frac{1}{\cos x}$; il tend donc également vers 1. On en déduit que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\sin x} = 1 . \text{ De plus, comme } \frac{-x}{\sin(-x)} = \frac{x}{\sin x}, \text{ on a aussi } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{\sin x} = 1 .$$

$$\text{D'où finalement : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

§ 22. DÉRIVÉE DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Théorème

Les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ et $\cot x$ sont dérivables sur leurs ensembles de définition, et l'on a :

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

Comme toujours en analyse, $\sin x$ désigne le sinus d'un angle dont x est la mesure en **radians**.
Même remarque pour $\cos x$, $\tan x$ et $\cot x$.

Preuve

Nous allons utiliser l'identité $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$.

Calculons :

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{2x+h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos \frac{2x+h}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2} = \cos x,$$

$$\text{puisque } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1.$$

On procède de même pour calculer la dérivée de la fonction $\cos x$. Pour $\tan x$:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Idem pour la dérivée de la cotangente.

§ 23. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Théorème

On considère deux fonctions $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow A$, A et B désignant des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On suppose f dérivable sur A et g dérivable sur B .

Alors, la fonction composée $f(g(x))$ est dérivable sur B , et sa dérivée est égale à

$$f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Remarque : Dans ce contexte, le facteur $g'(x)$ est souvent appelé *dérivée intérieure*.

Exemples

- $(x^5)' = 5x^4$ implique $(g^5)' = 5g^4 \cdot g'$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ implique $(\sqrt{g})' = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot g'$
- $(\sin x)' = \cos x$ implique $(\sin(g))' = \cos(g) \cdot g'$
- $(e^x)' = e^x$ implique $(e^g)' = e^g \cdot g'$ [e = base du logarithme naturel]
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ implique $(\ln(g))' = \frac{1}{g} \cdot g'$ [$\ln$ = logarithme naturel]
- $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ implique $(\sqrt[3]{g})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{g^2}} \cdot g'$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ implique $(\tan(g))' = \frac{1}{\cos^2(g)} \cdot g'$

N.B. Pour alléger l'écriture, on a noté " g " au lieu de " $g(x)$ " et " g' " au lieu de " $g'(x)$ ".

§ 24. PÉRIODICITÉ

Définition

Soit f une fonction et D son ensemble de définition. f est dite **périodique** s'il existe $p > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, $x + p \in D$ et

$$f(x + p) = f(x)$$

Le nombre p est, par définition, une **période** de f .

La plus petite période de f — si elle existe — s'appelle **la** période de f .

Exemples

Les fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ et $\cot(x)$ sont périodiques.

La période de $\sin(x)$ et celle de $\cos(x)$ est 2π .

La période de $\tan(x)$ et celle de $\cot(x)$ est π .

Théorèmes

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si p est une période de f , kp en est également une.

Si p est **la** période de f , toute période de f est du type kp , avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Il en résulte que si q est une période de f , alors $p \in \left\{ q ; \frac{1}{2}q ; \frac{1}{3}q ; \frac{1}{4}q ; \dots \right\}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Si p est une période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est une période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.

Si p est **la** période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est **la** période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.

§ 25. PARITÉ D'UNE FONCTION

Définition

- Une fonction réelle f définie sur D est dite **paire** si son graphe est symétrique relativement à l'axe Oy , autrement dit si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = f(x)$$

- Une fonction réelle f définie sur D est dite **impaire** si son graphe est symétrique relativement à l'origine O , autrement dit si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = -f(x)$$

Exemples

Les fonctions x^2 , $\cos(x)$ et $\sqrt{x^4 - x^2}$ sont paires.

Les fonctions x^3 , $\sin(x)$ et $\frac{x}{x^2 + 4}$ sont impaires.

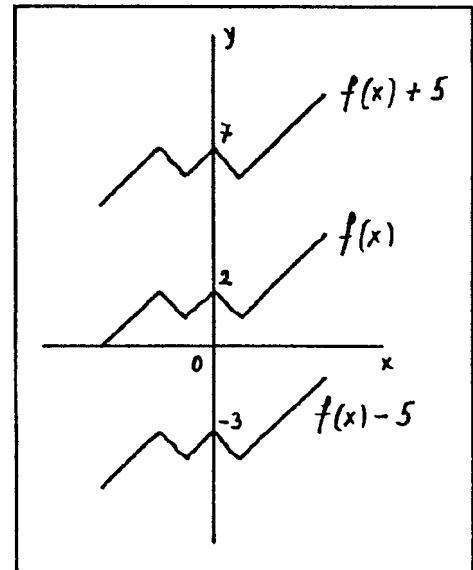
N.B. Il y a beaucoup de fonctions qui ne sont ni paires ni impaires...

§ 26. VARIATIONS SUR LE GRAPHE D'UNE FONCTION

Soit f une fonction réelle.

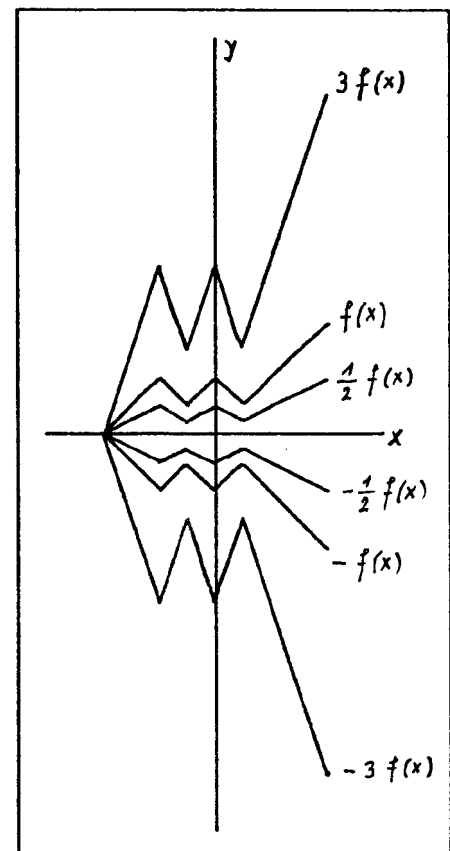
1. Graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + k$

Le graphe de $x \mapsto f(x) + k$ s'obtient à partir de celui de f au moyen d'une translation de direction Oy , vers le haut si $k > 0$, vers le bas si $k < 0$.



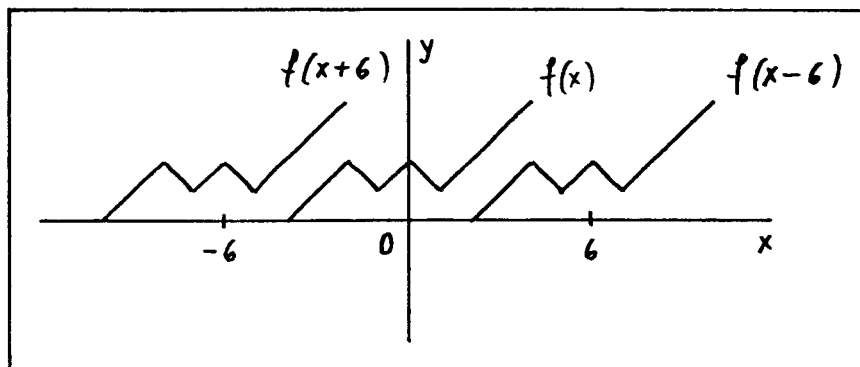
2. Graphe de la fonction $x \mapsto k \cdot f(x)$

Il s'obtient à partir du graphe de f au moyen d'une affinité de direction Oy , d'axe Ox et de rapport k . L'affinité dilate verticalement si $|k| > 1$ et contracte verticalement si $|k| < 1$; c'est une symétrie d'axe Ox si $k = -1$.



3. Graphe de la fonction $x \mapsto f(x+k)$

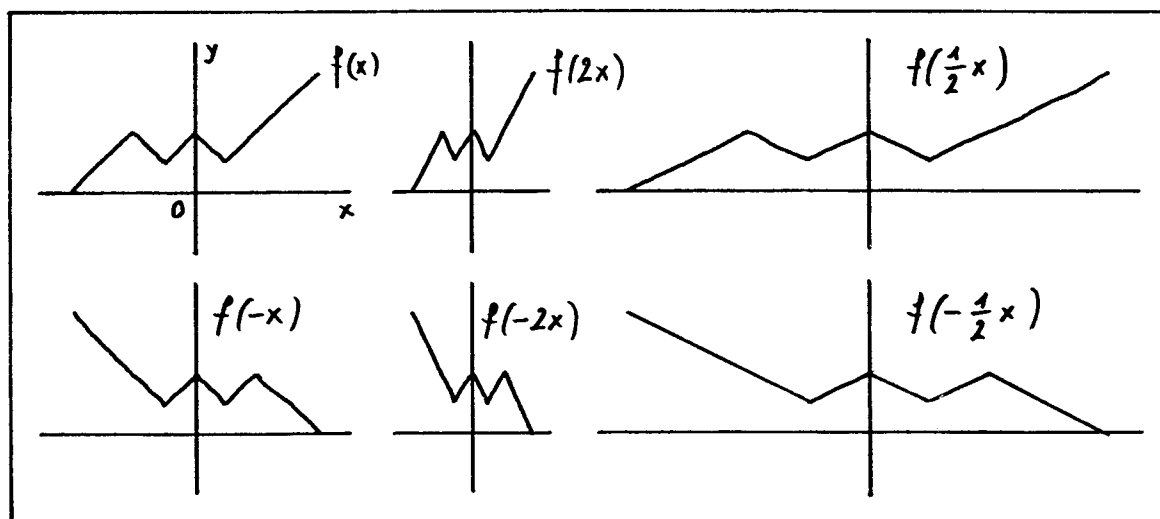
C'est le transformé du graphe de f par une translation de direction Ox , vers la gauche si $k > 0$, vers la droite si $k < 0$.



4. Graphe de la fonction $x \mapsto f(k \cdot x)$

On l'obtient en appliquant au graphe de f une affinité de direction Ox , d'axe Oy et de rapport $1/k$. Il y a dilatation horizontale si $|k| < 1$, contraction horizontale si $|k| > 1$.

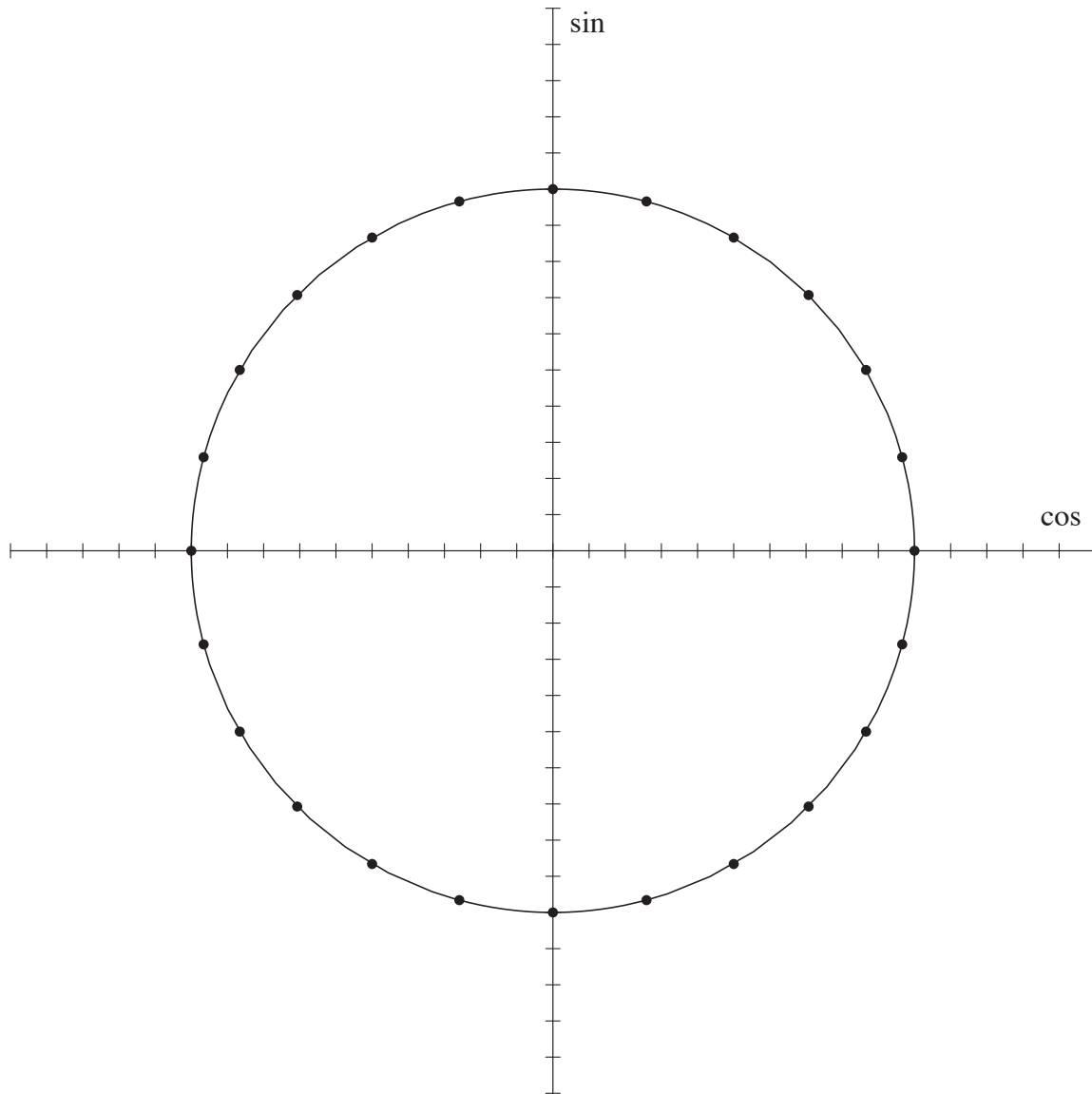
Si $k = -1$, l'affinité est une symétrie d'axe Oy .



Exercices

10. Déterminer graphiquement $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ pour les valeurs suivantes de α : (contrôler avec la calculatrice)

- | | | | |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1) 30° | 4) -60° | 7) 90° | 10) 0° |
| 2) -45° | 5) 270° | 8) -180° | 11) 360° |
| 3) 150° | 6) -210° | 9) 135° | 12) 300° |



11. Trouver tous les angles compris entre 0° et 360° dont :

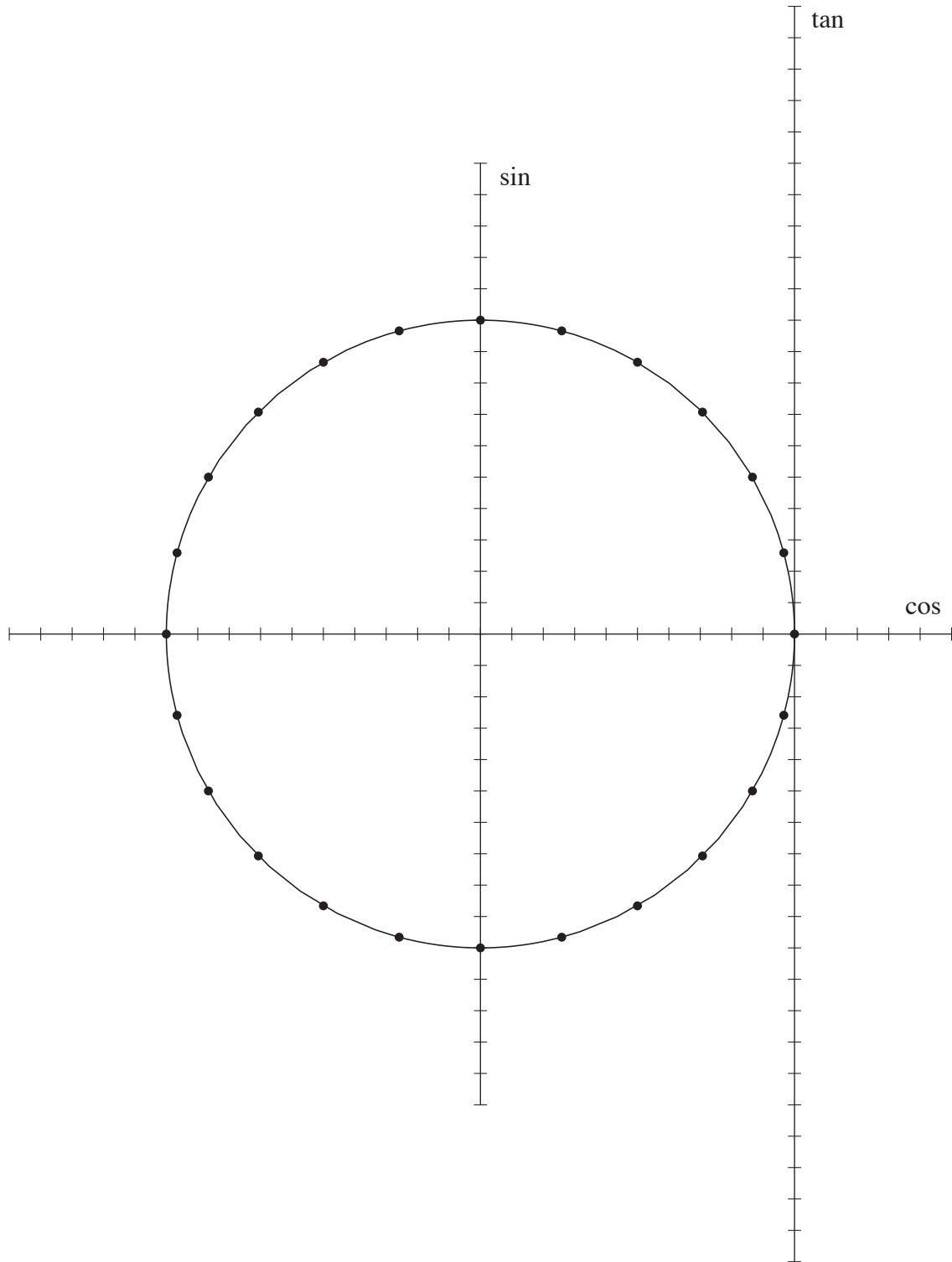
- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) le sinus égale 0,25 ; $-0,25$; 1 | b) le sinus égale -1 ; $-0,5$; 0 |
| c) le cosinus égale 0,5 ; $-0,3$; 0 | d) le cosinus égale 1 ; $-0,5$; 1,5 |

Rép. a) $14,5^\circ$; $165,5^\circ$ / $194,5^\circ$; $345,5^\circ$ / 90° b) 270° / 210° ; 330° / 0° ; 180° ; 360°
 c) 60° ; 300° / $107,5^\circ$; $252,5^\circ$ / 90° ; 270° d) 0° ; 360° / 120° ; 240° / impossible

Exercices

12. Déterminer graphiquement $\tan \alpha$ pour les valeurs suivantes de α : (contrôler avec la calculatrice)

- | | | | |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1) 30° | 4) -60° | 7) 90° | 10) 0° |
| 2) -45° | 5) 270° | 8) -180° | 11) 360° |
| 3) 150° | 6) -210° | 9) 135° | 12) 300° |



Exercices

13. Trouver tous les angles compris entre 0° et 360° dont la tangente égale 1 ; 2 ; $-1,2$; 0.

Rép. 45° ; 225° / $63,4^\circ$; $243,4^\circ$ / $129,8^\circ$; $309,8^\circ$ / 0° ; 180° ; 360°

14. Dessiner le graphe des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ pour x compris entre 0° et 360° .

Unité sur l'axe Ox : 1 carré = 10° ; sur l'axe Oy : 1 carré = 0,1.

15. Dessiner le graphe de la fonction $\tan x$ pour x compris entre 0° et 360° .

Unité sur l'axe Ox : 1 carré = 10° ; sur l'axe Oy : 5 carrés = 1.

20. Convertir en degrés les angles donnés ci-dessous par leur mesure en radians :

- 1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{2\pi}{3}$ 3) 2π 4) $\frac{\pi}{10}$ 5) $\frac{7\pi}{10}$ 6) $\frac{3\pi}{4}$
7) 0,28421 8) 1,43216 9) 3,14 10) $\frac{\pi}{3}$ 11) $\frac{6\pi}{5}$ 12) 6,2

Rép. 1) 30° 2) 120° 3) 360° 4) 18° 5) 126° 6) 135° 7) $16,28^\circ$
8) $82,06^\circ$ 9) $179,91^\circ$ 10) 60° 11) 216° 12) $355,23^\circ$

21. Convertir en radians les angles donnés ci-dessous par leur mesure en degrés :

- 1) 45° 2) 150° 3) 75° 4) 315° 5) 240°
6) $22,43^\circ$ 7) $124,35^\circ$ 8) 270° 9) 300° 10) 225°

Rép. 1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{5\pi}{6}$ 3) $\frac{5\pi}{12}$ 4) $\frac{7\pi}{4}$ 5) $\frac{4\pi}{3}$ 6) 0,3915 7) 2,1703
8) $\frac{3\pi}{2}$ 9) $\frac{5\pi}{3}$ 10) $\frac{5\pi}{4}$

22. Au moyen du cercle trigonométrique, sans calculatrice, déterminer :

- 1) $\cos(\pi)$ 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ 3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 4) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$
5) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 6) $\tan(3\pi)$ 7) $\sin(3\pi)$ 8) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

Rép. 1) -1 2) -1 3) -1 4) 1 5) -1 6) 0 7) 0 8) 0

23. Simplifier les expressions suivantes :

- a) $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + t\right) + \cos(\pi + t)$ b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + \cos(\pi - t) - \cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$

Rép. a) $-2\cos t$ b) $\sin t$

Exercices

24. Etablir les identités suivantes à partir des relations trigonométriques fondamentales :

a) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

b) $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

c) $3\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha = 3 - \sin^2 \alpha$

d) $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

e) $\tan x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos x} + \cos x$

f) $\tan x = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$

25. Etablir les identités suivantes :

1) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \beta} = \tan^2 \alpha - \tan^2 \beta$

2) $\sin x \cos x (1 + \tan x)(1 - \cot x) = 1 - 2\cos^2 x$

3) $(\cos x + \sin x)^2 = 2 - (\cos x - \sin x)^2$

26. Résoudre les équations :

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$

2) $\sin x = 0,8473$

3) $\tan x = -0,9042$

4) $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $\cos(2x) = -0,2$

6) $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rép. 1) $\pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

2) $57,92^\circ + k \cdot 360^\circ ; 122,08^\circ + k \cdot 360^\circ$

3) $-42,12^\circ + k \cdot 180^\circ$

4) $-\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$

5) $\pm 50,77^\circ + k \cdot 180^\circ$

6) $-\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$

27. Résoudre les équations :

1) $\sin\left(\frac{t}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

2) $\cot\left(\frac{3t}{7}\right) = -4,892$

3) $\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\cos\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

Rép. 1) $-90^\circ + k \cdot 1080^\circ ; 630^\circ + k \cdot 1080^\circ$

2) $-26,96^\circ + k \cdot 420^\circ$

3) $270^\circ + k \cdot 720^\circ ; 450^\circ + k \cdot 720^\circ$

4) $247,5^\circ + k \cdot 540^\circ ; -112,5^\circ + k \cdot 540^\circ$

28. Pour les équations suivantes, déterminer la plus petite solution supérieure à 1000° .

1) $\sin x = 0,5$

2) $\cos x = 0,5$

3) $\tan x = -1$

Rép. 1) 1110°

2) 1020°

3) 1035°

Exercices

29. Résoudre :

1) $3\sin^2 x - \cos^2 x = 1$

2) $\frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x - 3}{\cos x} = \frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{\cos^2 x} + 3 = 2\tan^2 x$

4) $\sin x = \sqrt{3}\cos x$

5) $\cos x - 3\sin x = 0$

6) $3\cos x + 2\sin x = 0$

Rép. 1) $45^\circ + k \cdot 90^\circ$ 2) $\pm 109,5^\circ + k \cdot 360^\circ$ 3) $\pm 63,4^\circ + k \cdot 180^\circ$
4) $60^\circ + k \cdot 180^\circ$ 5) $18,4^\circ + k \cdot 180^\circ$ 6) $-56,31^\circ + k \cdot 180^\circ$

30. Résoudre :

1) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

2) $\cot^2(2x) + 1 = 0$

3) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

4) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

5) $3\sin^2 t + \cos^2 t - 2 = 0$

6) $\tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0$

Rép. 1) $\pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$; $\pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ 2) $\emptyset$
3) $k \cdot 2\pi$; $\pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ 4) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$; $\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$
5) $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ 6) $\pm \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $\pm \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$

31. Déterminer les zéros et les pôles des fonctions suivantes, entre 0 et 2π :

a) $f(x) = \sin x \cos x$

b) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

c) $f(x) = \frac{3\sin x}{(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2}$

d) $f(x) = \cos(2x)$

e) $f(x) = \sin(2x)$

f) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Rép. a) zéros : 0 ; $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{3\pi}{2}$; 2π b) zéros : 0 ; π ; 2π / pôles : $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$
c) zéros : 0 ; π ; 2π / pôles : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$ d) zéros : $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$
e) zéros : 0 ; $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{3\pi}{2}$; 2π f) zéros : 0 ; 2π / pôle : π

Exercices

40. A l'aide des formules d'addition et connaissant les valeurs exactes des rapports trigonométriques de 30° et 45° , déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques de 75° .

Rép. $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ / $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ / $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

41. Au moyen des formules d'addition, établir les *formules de duplication* :

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

42. Etablir les *formules de bisection* :

$$\sin^2(t/2) = \frac{1 - \cos t}{2}$$

$$\cos^2(t/2) = \frac{1 + \cos t}{2}$$

$$\tan^2(t/2) = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$$

Indication : faire $t = 2x$ dans la formule $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

43. Etablir l'identité suivante :

$$\tan(t/2) = \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{1 - \cos t}{\sin t}$$

Indication : faire $t = 2x$ dans la formule $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, puis utiliser la formule

$$\tan^2(t/2) = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}.$$

44. Montrer que dans tout triangle ABC , on a la relation :

$$\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma$$

Exercices

45. Résoudre les équations suivantes :

1) $\sin(2x) = \tan x$

2) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) = 3$

3) $\cos(2x) - \sin^2 x = 0$

4) $\cos(2x)\tan(2x) - \tan x \cos(2x) = 8$

Rép. 1) $k\pi ; \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

2) $\frac{\pi}{3} + k\pi$

3) $\pm 35,26^\circ + k \cdot 180^\circ$

4) $82,87^\circ + k \cdot 180^\circ$

46. Partager un angle de 30° en deux parties telles que le sinus de la première soit le triple de celui de la seconde.

Rép. $22,63^\circ / 7,37^\circ$

47. Partager un angle de 45° en deux parties telles que leurs tangentes soient dans le rapport 5 à 6.

Rép. $20,657^\circ / 24,343^\circ$

48. Etablir les identités suivantes :

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \sqrt{2} \sin t$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right) = \sqrt{3} \sin t$

3) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$

4) $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

5) $\frac{1}{\sin(2x)} + \cot(2x) = \cot x$

6) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

49. A l'aide des formules d'addition, démontrer l'identité suivante :

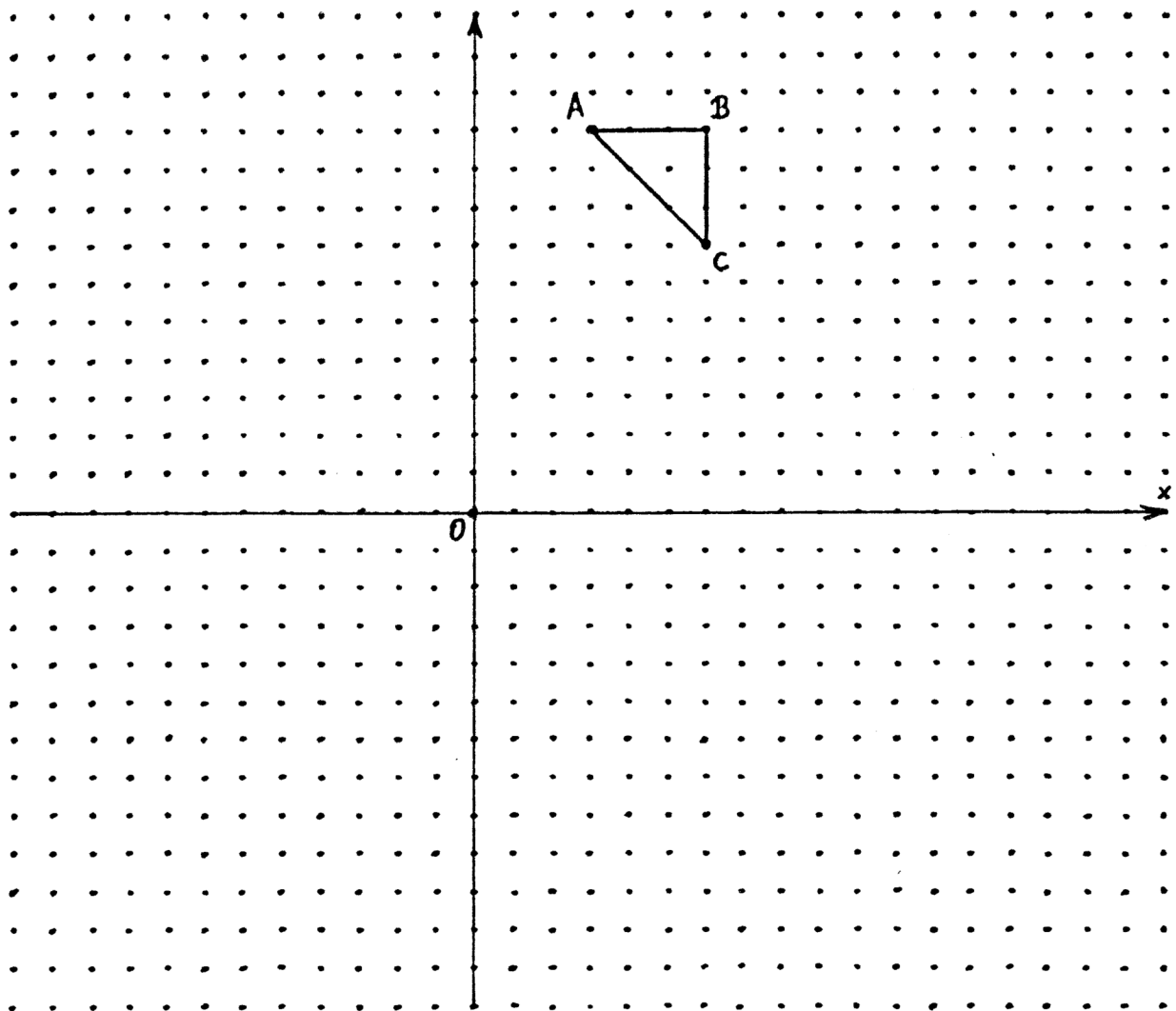
$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

Exercices

60. On appelle **affinité** de direction Ox , d'axe Oy et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) la transformation du plan Oxy définie par $(x, y) \mapsto (kx, y)$. De même, on définit l'affinité de direction Oy , d'axe Ox et de rapport k par $(x, y) \mapsto (x, ky)$.

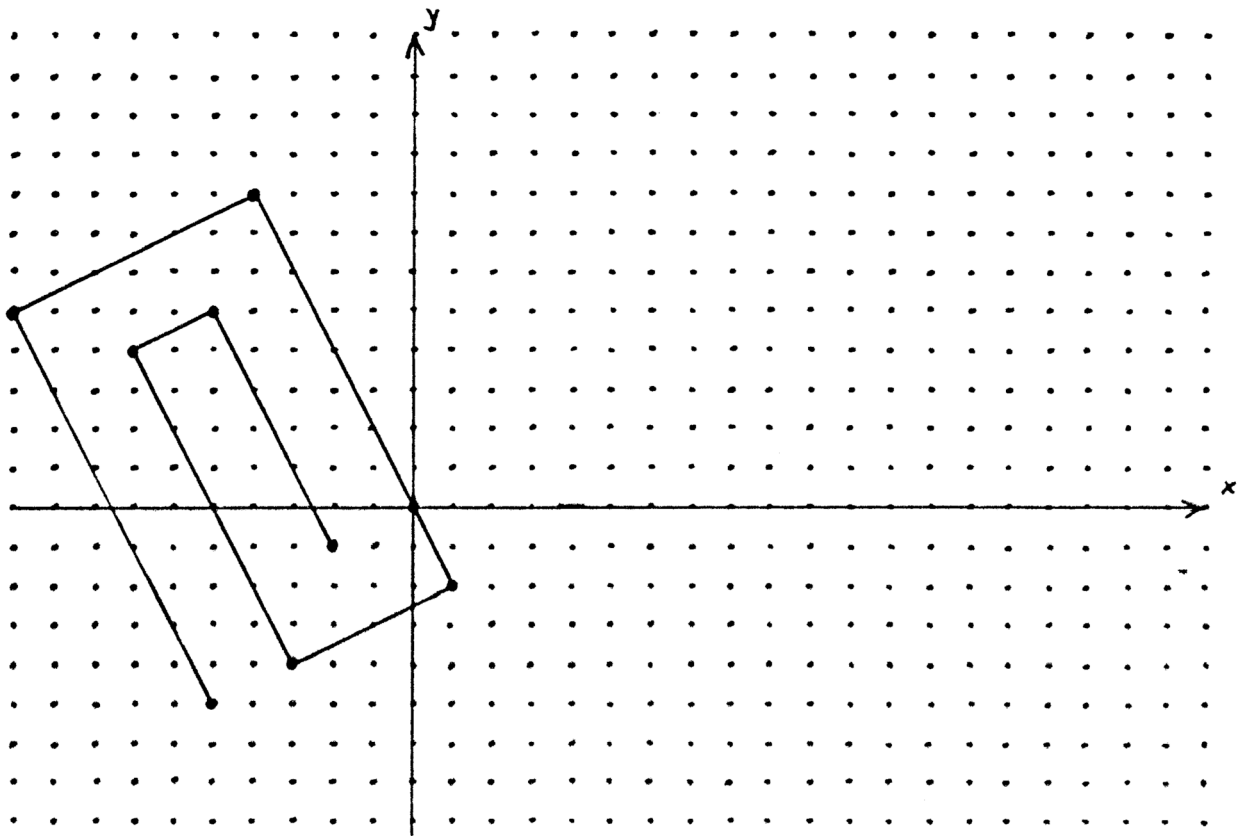
Dessiner l'image du triangle ABC par :

- 1) l'affinité de direction Ox , d'axe Oy et de rapport 3.
- 2) l'affinité de direction Ox , d'axe Oy et de rapport $1/3$.
- 3) l'affinité de direction Ox , d'axe Oy et de rapport -2 .
- 4) l'affinité de direction Oy , d'axe Ox et de rapport $1/2$.
- 5) l'affinité de direction Oy , d'axe Ox et de rapport -1 .



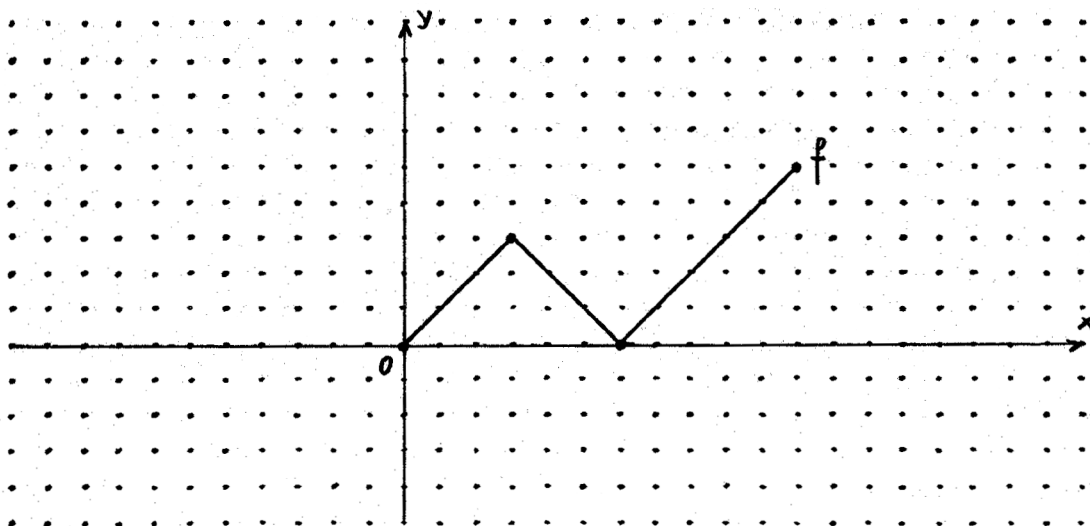
Exercices

61. Dessiner l'image de l'escargot par l'affinité de direction Ox , d'axe Oy et de rapport -2 .



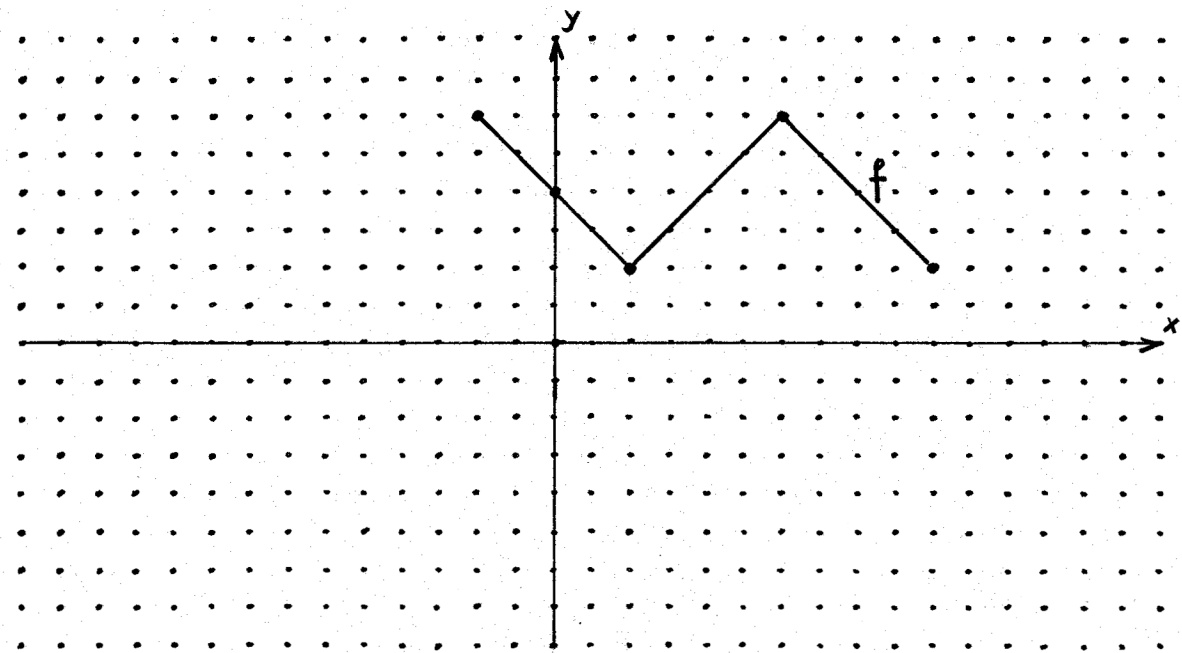
62. On donne le graphe d'une fonction f . Dessiner celui des fonctions suivantes :

$g: x \mapsto f(x) + 3$; $h: x \mapsto f(x) - 4$; $i: x \mapsto f(x - 8)$; $k: x \mapsto f(x + 11)$

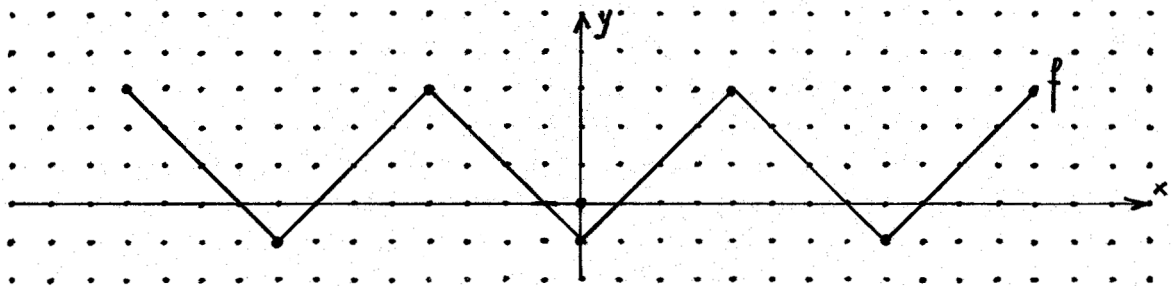


Exercices

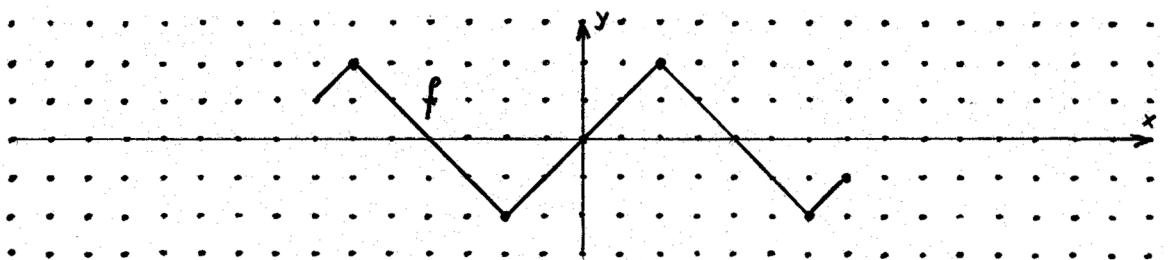
63. On donne le graphe de la fonction f . Dessiner celui de $g: x \mapsto -f(x)$, $h: x \mapsto f(-x)$ et $k: x \mapsto -f(-x)$.



64. Dessiner le graphe $g: x \mapsto f(2x)$.

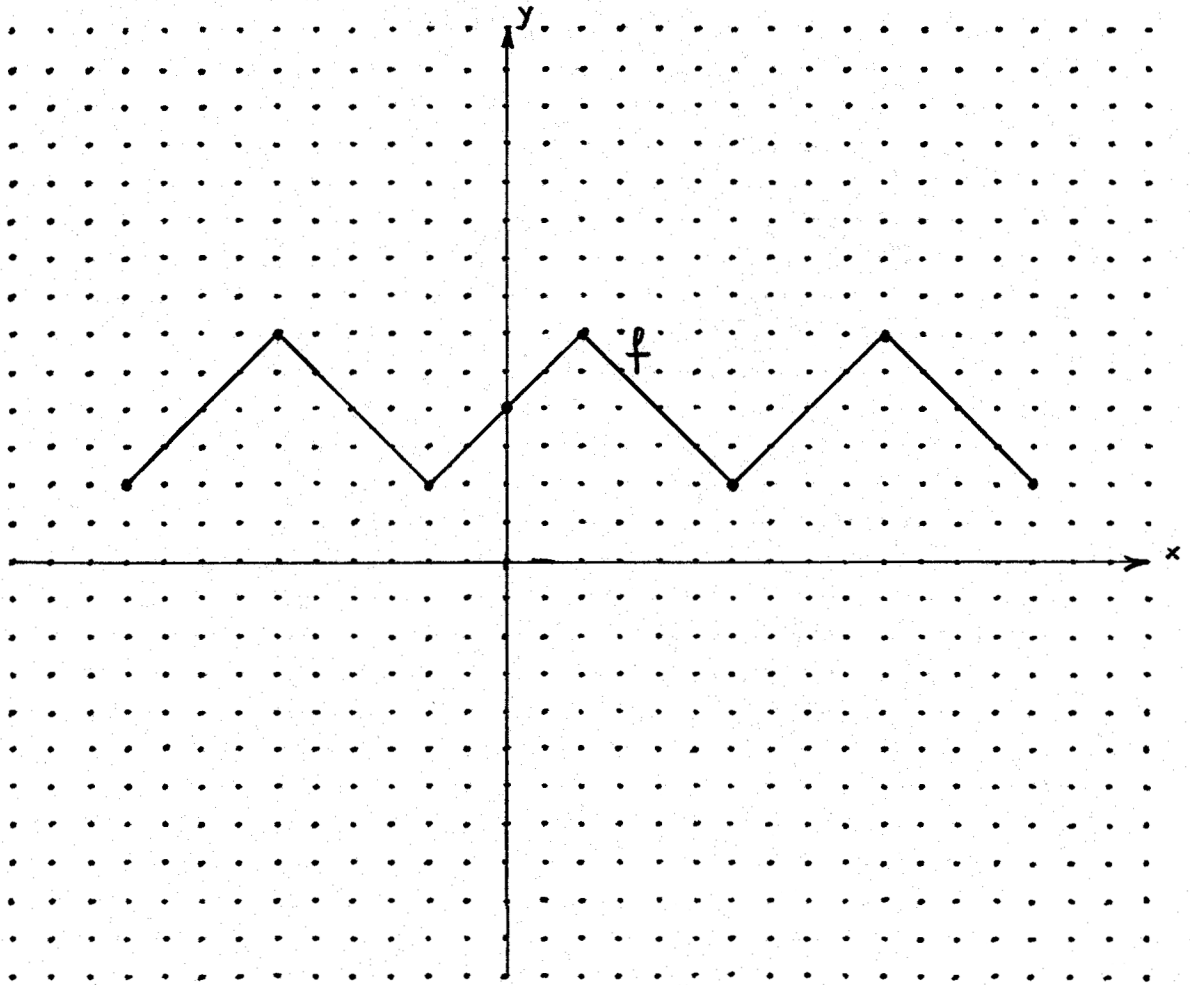


65. Dessiner le graphe de $g: x \mapsto f\left(\frac{1}{2}x\right)$.



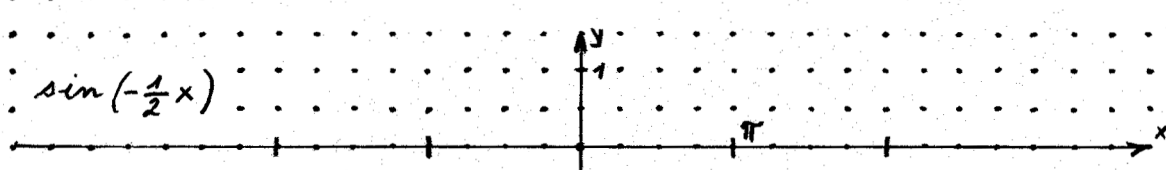
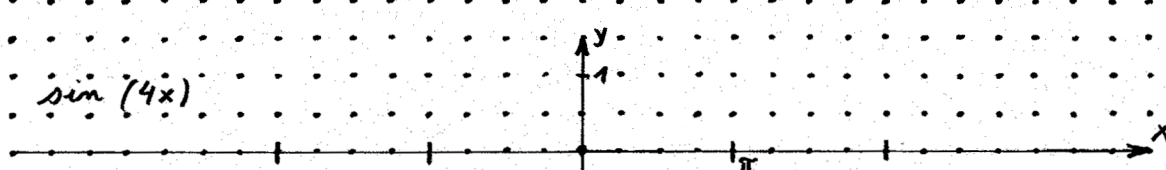
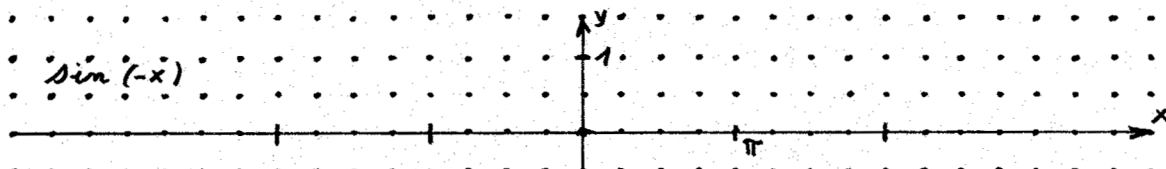
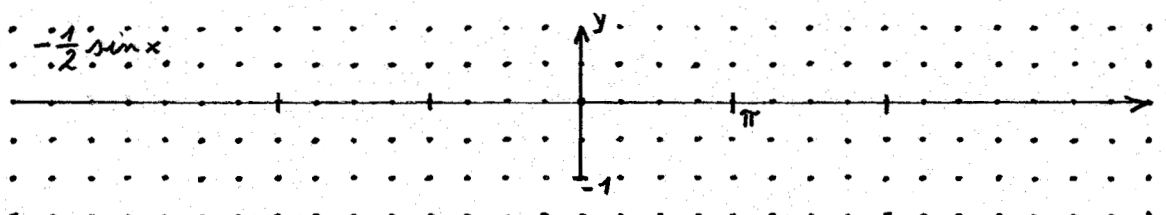
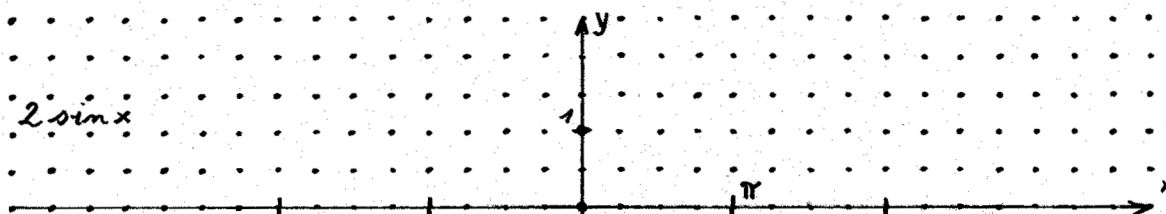
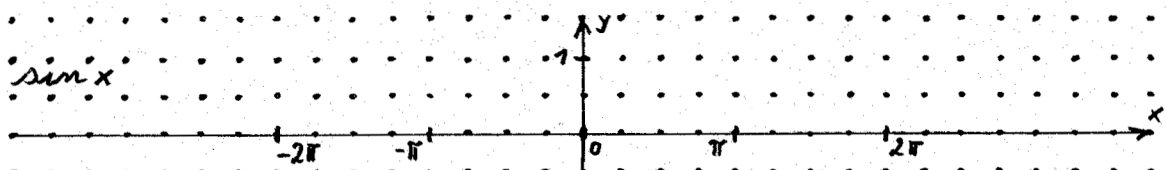
Exercices

66. On donne le graphe de la fonction f . Tracer celui de $g: x \mapsto 2 \cdot f(x)$, $h: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot f(x)$ et $k: x \mapsto -\frac{3}{2} \cdot f(x)$.



Exercices

67. Dessiner le graphe des fonctions indiquées, pour $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.



Exercices

69. Dériver :

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1) $2 \sin x$ | 2) $\sin x + \cos x$ |
| 3) $\sin x \cos x$ | 4) $x \sin x$ |
| 5) $\frac{\sin x}{\cos x}$ | 6) $2 + \tan x$ |
| 7) $\frac{2}{\tan x}$ | 8) $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$ |

- Rép.*
- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1) $2 \cos x$ | 2) $\cos x - \sin x$ | 3) $\cos^2 x - \sin^2 x$ | 4) $\sin x + x \cos x$ |
| 5) $\frac{1}{\cos^2 x}$ | 6) $\frac{1}{\cos^2 x}$ | 7) $\frac{-2}{\sin^2 x}$ | 8) $\frac{1}{\cos x - 1}$ |

70. Dériver :

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| 1) $3 \cos x + 2 \sin x$ | 2) $x^2 \cos x$ |
| 3) $\frac{x}{\cos x}$ | 4) $(\cos x)^3$ |
| 5) $(\sin x + 1)^3$ | 6) $\sin^4 x$ |
| 7) $2 \sin^2 x + \cos x$ | 8) $2 \cos^2 x - \cos x + 1$ |

- Rép.*
- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|---|
| 1) $-3 \sin x + 2 \cos x$ | 2) $2x \cos x - x^2 \sin x$ | 3) $\frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$ |
| 4) $-3 \cos^2 x \sin x$ | 5) $3(\sin x + 1)^2 \cos x$ | 6) $4 \sin^3 x \cos x$ |
| 7) $\sin x (4 \cos x - 1)$ | 8) $\sin x (-4 \cos x + 1)$ | |

71. Sachant que $(\sin x)' = \cos x$ et que $(\cos x)' = -\sin x$, démontrer que $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

72. Etudier le signe des fonctions suivantes entre 0 et 2π :

- | | | |
|---------------------------|---|-----------------------------------|
| 1) $f(x) = \sin x \cos x$ | 2) $f(x) = \cos(2x)$ | 3) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ |
| 4) $f(x) = \sin(2x)$ | 5) $f(x) = \frac{3 \sin x}{(\sin x - \sqrt{3} \cos x)^2}$ | 6) $f(x) = \tan(x/2)$ |

- Rép.*
1. zéros et pôles de f : 0 ; $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{3\pi}{2}$; 2π / signe de f : $0 + 0 - 0 + 0 - 0$
 2. zéros et pôles de f : $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$ / signe de f : $+ 0 - 0 + 0 - 0 +$
 3. zéros et pôles de f : 0 ; $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{3\pi}{2}$; 2π / signe de f : $0 + \parallel - 0 + \parallel - 0$
 4. zéros et pôles de f : 0 ; $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{3\pi}{2}$; 2π / signe de f : $0 + 0 - 0 + 0 - 0$
 5. zéros et pôles de f : 0 ; $\frac{\pi}{3}$; π ; $\frac{4\pi}{3}$; 2π / signe de f : $0 + \parallel + 0 - \parallel - 0$
 6. zéros et pôles de f : 0 ; π ; 2π / signe de f : $0 + \parallel - 0$

Exercices

73. Dériver :

- | | | |
|-----------------------|--------------------------|---------------------|
| 1) $\sin x - \cos x$ | 2) $3 \cos x + 2 \sin x$ | 3) $2 \tan x + 3$ |
| 4) $\frac{1}{\sin x}$ | 5) $\sin(3x)$ | 6) $\sin(x^2 + 3x)$ |
| 7) $\cos(x^3 + 1)$ | 8) $\cos(-2x^2)$ | |

Rép. 1) $\cos x + \sin x$ 2) $-3 \sin x + 2 \cos x$ 3) $2 + 2 \tan^2 x$ 4) $\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$
 5) $3 \cos(3x)$ 6) $(2x + 3) \cos(x^2 + 3x)$ 7) $-3x^2 \sin(x^3 + 1)$ 8) $4x \sin(-2x^2)$

74. Dériver :

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1) $\tan(3x + \frac{\pi}{2})$ | 2) $\sin(2x) - \cos(3x)$ | 3) $\frac{1}{\cos(3x)}$ |
| 4) $(\sin x)^7$ | 5) $\sin^3 x$ | 6) $\cos^2 x$ |
| 7) $\sin^2 x + \cos x$ | 8) $\sqrt{\sin x}$ | 9) $\cos^5(3x)$ |

Rép. 1) $3 + 3 \tan^2(3x + \frac{\pi}{2})$ 2) $2 \cos(2x) + 3 \sin(3x)$ 3) $\frac{3 \sin(3x)}{\cos^2(3x)}$ 4) $7(\sin x)^6 \cos x$
 5) $3 \sin^2 x \cos x$ 6) $-2 \cos x \sin x$ 7) $\sin x(2 \cos x - 1)$ 8) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$
 9) $-15 \cos^4(3x) \sin(3x)$

75. Dériver : 1) $\tan\left(\frac{x+\pi}{2}\right)$ 2) $\sin\left(\frac{x}{7}\right)$ 3) $\sqrt{\sin(2x)}$
 4) $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 5) $\sin(\cos x)$ 6) $\frac{1}{\sin(2x)}$

Rép. 1) $\frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \left(\frac{x+\pi}{2} \right) \right)$ 2) $\frac{1}{7} \cos\left(\frac{x}{7}\right)$ 3) $\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$
 4) $\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 5) $-\sin x \cos(\cos x)$ 6) $\frac{-2 \cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

Exercices

76. Soit f une fonction et D son ensemble de définition. f est dite **périodique** s'il existe $p > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, $x + p \in D$ et

$$f(x + p) = f(x)$$

Le nombre p est, par définition, une **période** de f .

On donne un nombre $p > 0$ et une fonction f . Montrer que p est une période de f :

- | | |
|--|---|
| 1) $p = 1$; $f(x) = \sin(2\pi x + 1)$ | 2) $p = 2\pi$; $f(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$ |
| 3) $p = \pi$; $f(x) = \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$ | 4) $p = 8\pi$; $f(x) = \sin(x/4) + \cos(x/2)$ |
| 5) $p = \pi$; $f(x) = \sin^2(x)$ | 6) $p = 12\pi$; $f(x) = \sin(x/3) - \cos(x/2)$ |

77. On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si p est une période de f , kp en est également une.
- b) Démontrer que si p est **la** période de f , toute période de f est du type kp , avec $k \in \mathbb{N}^*$.

78. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- a) Démontrer que si p est une période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est une période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.
- b) Démontrer que si p est **la** période de f , alors $\frac{p}{|\alpha|}$ est **la** période de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$.

79. Montrer que p est **la** période de la fonction f :

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) $p = \pi$; $f(x) = \sin^2(x)$ | b) $p = 12\pi$; $f(x) = \sin(x/3) - \cos(x/2)$ |
|-----------------------------------|---|

80. Trouver une période de la fonction f :

- | | |
|---|--|
| 1) $f(x) = \sin(3x + \pi)$ | 2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ |
| 3) $f(x) = \tan\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ | 4) $f(x) = 7 \sin\left(\pi - \frac{2x}{5}\right)$ |

Rép. 1) $\frac{2\pi}{3}$ 2) 4π 3) $\frac{2\pi}{3}$ 4) 5π

Exercices

81. Etudier la *croissance* de f entre 0 et 2π :

- 1) $f(x) = \cos x$
- 2) $f(x) = \sin(2x + \pi)$
- 3) $f(x) = \sin^2 x - 1$
- 4) $f(x) = \cos^2 x + \sin x + 17$

Rép. 1. $f'(x) = -\sin x$ / zéros et pôles de f' : 0 ; π ; 2π / signe de f' : 0 - 0 + 0
croissance de f : $M \searrow m \nearrow M$

2. $f'(x) = 2 \cos(2x + \pi)$ / zéros et pôles de f' : $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$
signe de f' : - 0 + 0 - 0 + 0 - / croiss. de f : $\searrow m \nearrow M \searrow m \nearrow M \searrow$

3. $f'(x) = 2 \sin x \cos x$ / zéros et pôles de f' : 0 ; $\frac{\pi}{2}$; π ; $\frac{3\pi}{2}$; 2π
signe de f' : 0 + 0 - 0 + 0 - 0 / croiss. de f : $m \nearrow M \searrow m \nearrow M \searrow m$

4. $f'(x) = \cos x(1 - 2 \sin x)$ / zéros et pôles de f' : $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$
signe de f' : + 0 - 0 + 0 - 0 + / croiss. de f : $\nearrow M \searrow m \nearrow M \searrow m \nearrow$

82. Etudier entre 0 et 2π le *signe* et la *croissance* des fonctions suivantes, puis esquisser le *graphe*.

- 1) $f(x) = \sin x$
- 2) $f(x) = \sin(2x)$
- 3) $f(x) = \cos(x/2)$

Rép. 1.

x	0	π	2π
$f(x)$	0	+	0

x	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π
$f'(x)$	+	0	-	0

2.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x)$	0	+	0	-	0

x	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	$5\pi/4$	$7\pi/4$	2π
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0

3.

x	0	π	2π
$f(x)$	+	0	-

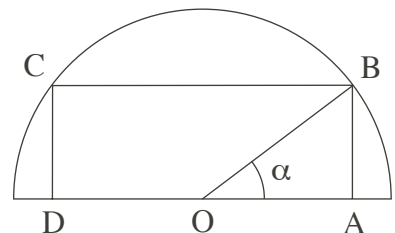
x	0	2π
$f'(x)$	0	-

83. Etudier entre 0 et 2π le *signe* et la *croissance* de la fonction $f(x) = \cos x - \cos^2 x$, puis esquisser le *graphe*.

Rép. zéros de f : 0 ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 2π / $f'(x) = \sin x(2 \cos x - 1)$
minimums : (0 ; 0) , (π ; -2) , (2π ; 0) / maximums : ($\frac{\pi}{3}$; $\frac{1}{4}$) , ($\frac{5\pi}{3}$; $\frac{1}{4}$)

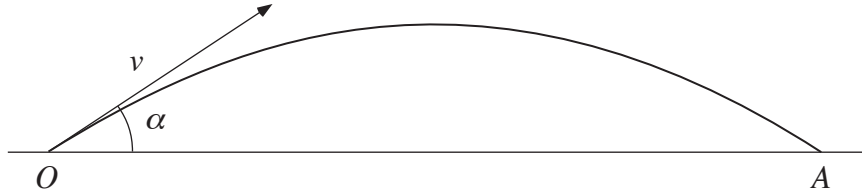
84. Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer α afin que l'aire du rectangle soit maximale.

Rép. aire du rectangle : $S(\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $S'(\alpha) = 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$
l'aire est maximale quand $\alpha = \frac{\pi}{4}$



Exercices

85. La portée $p = OA$ d'un projectile lancé (dans le vide) avec une vitesse initiale v et un angle d'élévation α est donnée par $p = \frac{v}{g} \sin(2\alpha)$, g désignant l'accélération de la pesanteur. Pour une vitesse initiale donnée, déterminer la valeur de l'angle α maximisant la portée.



Rép. 45°

86. On donne $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$. Etudier cette fonction *entre $-\pi$ et 3π* . (Signe, croissance, extremums, asymptotes verticales, graphe.)

Rép. zéros et pôles de f : $-\frac{\pi}{2}$; 0 ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 2π ; $\frac{5\pi}{2}$ / $f'(x) = \frac{-\sin x}{(1 - \cos x)^2}$

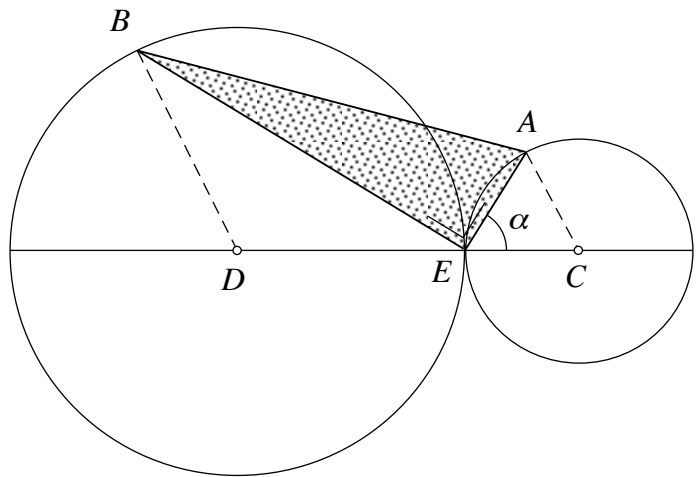
signe de f : $-$ 0 $+$ $||$ $+$ 0 $-$ 0 $+$ $||$ $+$ 0 $-$ / zéros et pôles de f' : $-\pi$; 0 ; π ; 2π ;

3π

signe de f' : 0 $+$ $||$ $-$ 0 $+$ $||$ $-$ 0 / asymptotes verticales : $x = 0$; $x = 2\pi$

87. Les cercles de la figure ci-contre sont tangents en E . On donne les rayons $CE = 2$ et $DE = 3$.

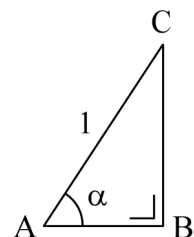
Déterminer α (entre 0° et 90°) afin que l'aire du triangle AEB soit maximale.



Rép. aire(AEB) = $12 \cos \alpha \sin \alpha$;
maximale lorsque $\alpha = 45^\circ$

88. Un triangle ABC rectangle en B engendre un cône par rotation autour de BC . Etudier la variation du volume de ce cône en fonction de $\alpha = \widehat{BAC}$, le côté AC restant constamment égal à 1.

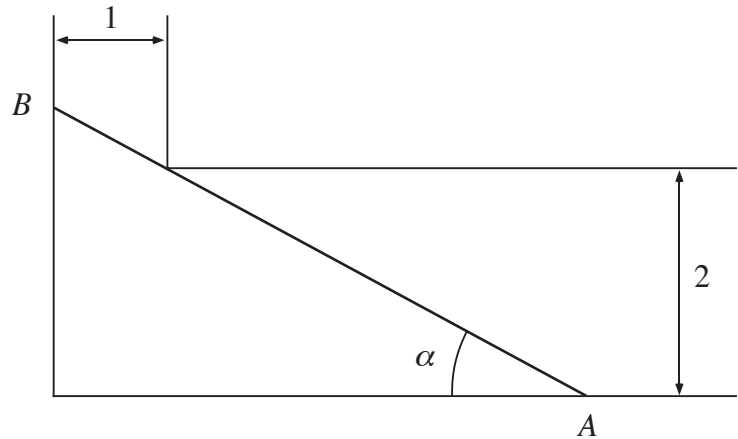
Rép. le volume est maximal lorsque $\alpha = 35,26^\circ$.



Exercices

89. Deux couloirs de largeur 1 et 2 respectivement se rencontrent à angle droit. On transporte une barre rigide parallèlement au sol. Quelle est la longueur maximale que peut avoir cette barre si l'on veut pouvoir la transporter d'un couloir à l'autre ?

Indication. Etudier la variation de AB en fonction de α .



Rép. la longueur AB est minimale lorsque $\alpha = 51,56^\circ$ / longueur maximale de la barre : 4,16

90. Etudier la croissance des fonctions suivantes sur l'intervalle $[0; 2\pi]$:

1) $f(x) = \cos x + \sin x$

2) $f(x) = \sin^3 x$

Rép.

1. $f'(x) = -\sin x + \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	↗	M	↘	m

2. $f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	p	↗	M	↘	p

91. On donne $f(x) = \sin x - \sin^2 x$. Etudier cette fonction entre 0 et 2π . (Signe, croissance, extremums, graphe.)

Rép.

$f(x) = \sin x (1 - \sin x)$; $f'(x) = \cos x (1 - 2 \sin x)$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$f(x)$	0	+	0	-

;

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	↗	M	↘	m	↗	M

$\max : (\frac{\pi}{6} ; \frac{1}{4}) , (\frac{5\pi}{6} ; \frac{1}{4})$; $\min : (\frac{\pi}{2} ; 0) ; (\frac{3\pi}{2} ; -2)$

Exercices

92. Dériver :

- | | | |
|--------------------|-----------------------|------------------------------------|
| 1. $\sin(3x)$ | 9. $(2x+1)^7$ | 17. $\frac{1}{\sin x}$ |
| 2. $\sin(x^2+3x)$ | 10. $(-6x^2+x)^{15}$ | 18. $\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| 3. $\cos(x^3+1)$ | 11. $(\sin x)^{13}$ | 19. $\sin(\sqrt{x})$ |
| 4. $\cos(-2x^2)$ | 12. $(\tan x)^2$ | 20. $\tan(3x+1)$ |
| 5. $\sqrt{2x}$ | 13. $(5x^4+2)^9$ | 21. x^{-3} |
| 6. $\sqrt{3x+1}$ | 14. $\frac{1}{x}$ | 22. $(3x+1)^{-3}$ |
| 7. $\sqrt{\sin x}$ | 15. $\frac{1}{2x+1}$ | 23. $(x^5+1)^{-5}$ |
| 8. $\sqrt{-3x^5}$ | 16. $\frac{1}{x^4+9}$ | 24. $(\sin x)^{-9}$ |

Réponses

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|---|
| 1. $3 \cos(3x)$ | 9. $14(2x+1)^6$ | 17. $\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$ |
| 2. $\cos(x^2+3x) \cdot (2x+3)$ | 10. $15(-12x+1)(-6x^2+x)^{14}$ | 18. $\frac{-1}{x^2 \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$ |
| 3. $-3x^2 \sin(x^3+1)$ | 11. $13(\sin x)^{12} \cdot \cos x$ | 19. $\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ |
| 4. $4x \sin(-2x^2)$ | 12. $\frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$ | 20. $\frac{3}{\cos^2(3x+1)}$ |
| 5. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ | 13. $180x^3(5x^4+2)^8$ | 21. $-3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$ |
| 6. $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ | 14. $-\frac{1}{x^2}$ | 22. $\frac{-9}{(3x+1)^4}$ |
| 7. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ | 15. $\frac{-2}{(2x+1)^2}$ | 23. $\frac{-25x^4}{(x^5+1)^6}$ |
| 8. $\frac{-15x^4}{2\sqrt{-3x^5}}$ | 16. $\frac{-4x^3}{(x^4+9)^2}$ | 24. $\frac{-9 \cos x}{\sin^{10} x}$ |

