
FORMULAIRE

DE *MATHÉMATIQUES*

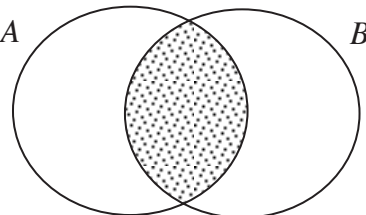
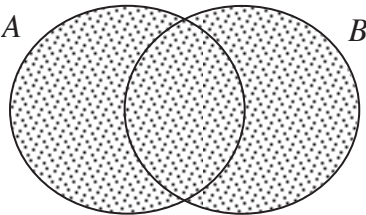
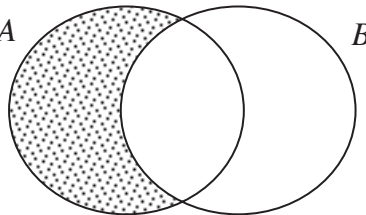
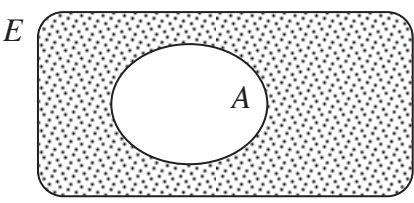
2012

TABLE DES MATIÈRES

Ensembles	2
Fonctions	3
Algèbre	6
Logarithmes	8
Analyse	10
Géométrie	16
Géométrie analytique plane	20
Trigonométrie	23
Combinatoire	26
Probabilités	28
Statistique	29

ENSEMBLES

Opérations

	<i>Intersection</i> $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$
	<i>Réunion</i> $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$
	<i>Différence</i> $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \notin B \}$
	<i>Complémentaire</i> $\mathbf{C}_E A = \bar{A} = \{ x \mid x \in E \text{ et } x \notin A \}$

Ensembles particuliers

Ensemble des nombres <i>naturels</i> :	$\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \}$
Ensemble des nombres <i>entiers</i> :	$\mathbb{Z} = \{ \dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \}$
Ensemble des nombres <i>rationnels</i> :	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$
Ensemble des nombres <i>réels</i> :	$\mathbb{R}$

FONCTIONS

Soit f une fonction (ou application) de l'ensemble A (départ) vers l'ensemble B (arrivée).

Par définition, chaque élément a de A possède exactement une image par f dans B : $f(a)$.

Injectivité. Surjectivité

f est *injective* si chaque élément de B possède au plus une préimage par f

f est *surjective* si chaque élément de B possède au moins une préimage par f

f est *bijective* si chaque élément de B possède exactement une préimage par f

Une fonction bijective f a une *reciproque* f^{-1} qui est aussi bijective.

Composition de fonctions

Soit $g: A \rightarrow B$ et $f: B \rightarrow C$ deux fonctions. La fonction composée $f \circ g: A \rightarrow C$ est définie par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Parité. Périodicité

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

f est *paire* si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$

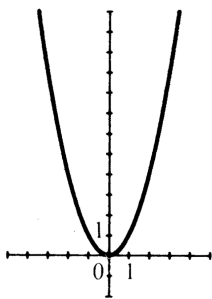
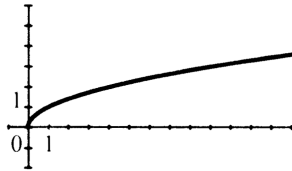
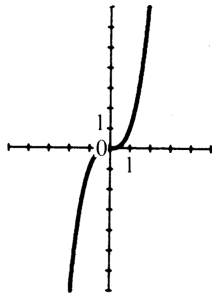
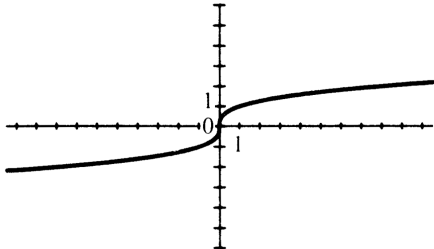
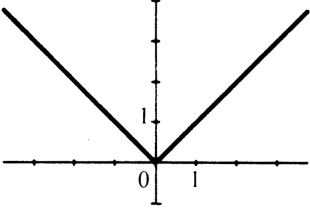
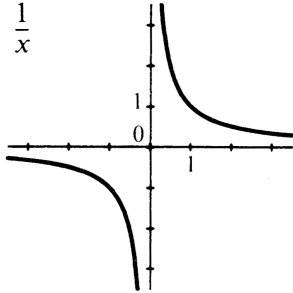
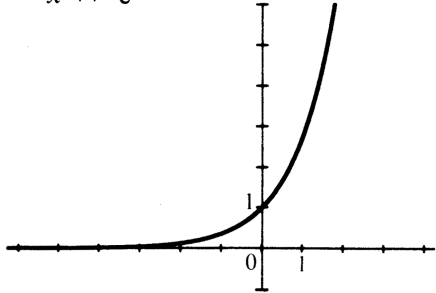
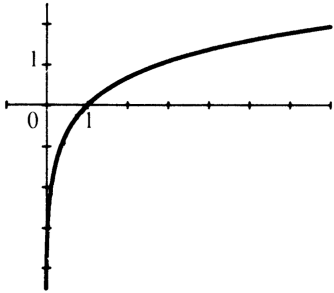
f est *impaire* si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$

f est *périodique* s'il existe $p > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, $x + p \in D$ et

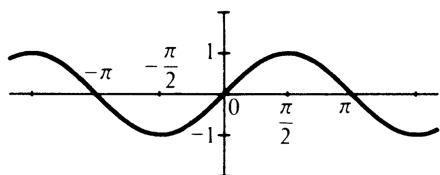
$$f(x + p) = f(x)$$

Le nombre p est une *période* de f . La plus petite période de f (si elle existe), s'appelle *la période* de f

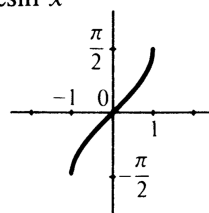
Représentation graphique de quelques fonctions

$x \mapsto x^2$ 	$x \mapsto \sqrt{x}$ 
$x \mapsto x^3$ 	$x \mapsto \sqrt[3]{x}$ 
$x \mapsto x $ 	$x \mapsto \frac{1}{x}$ 
$x \mapsto e^x$ 	$x \mapsto \ln x$ 

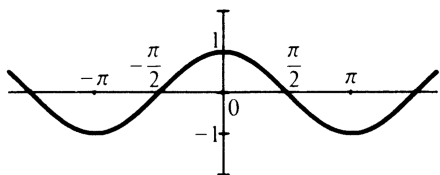
$$x \mapsto \sin x$$



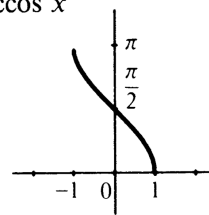
$$x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$$



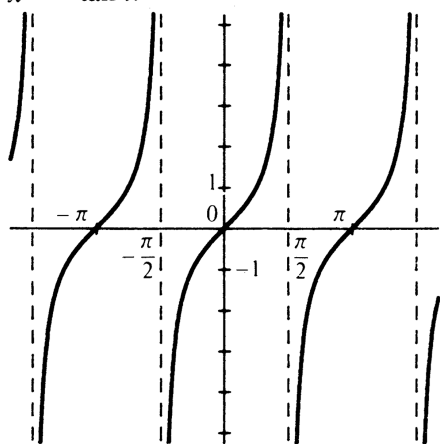
$$x \mapsto \cos x$$



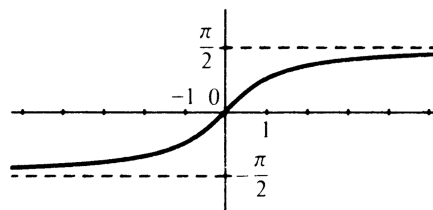
$$x \mapsto \operatorname{Arccos} x$$



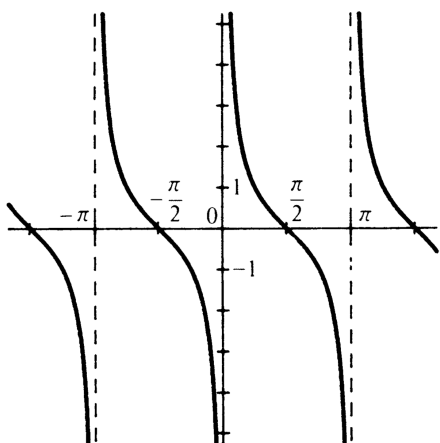
$$x \mapsto \tan x$$



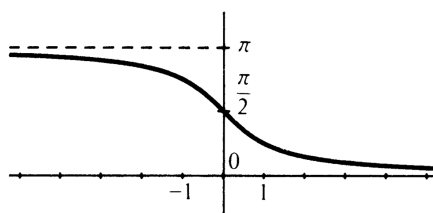
$$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$$



$$x \mapsto \cot x$$



$$x \mapsto \operatorname{Arccot} x$$



ALGÈBRE

Identités remarquables

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	
$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

Puissances et racines

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$a^1 = a$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
$a^m a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

Equation du deuxième degré

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c$ admet deux solutions :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c$ admet une solution : $x_1 = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c$ n'a aucune solution

Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$:

Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

Si $\Delta < 0$: le trinôme ne se factorise pas

Division euclidienne des polynômes

$$(\text{Dividende}) = (\text{Diviseur}) \cdot (\text{Quotient}) + (\text{Reste})$$

$$\text{avec } \text{degré}(\text{Reste}) < \text{degré}(\text{Diviseur})$$

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D} \quad \text{avec } \text{degré}(R) < \text{degré}(D)$$

Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par $(x - a)$ est égal à $P(a)$

a est un zéro de $P(x)$ $\Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x)$ est divisible par $(x - a)$
 $\Leftrightarrow$ Il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$

LOGARITHMES

Définition : $u = \log_a x \Leftrightarrow x = a^u \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$

u est l'exposant d'une puissance de base a égale à x

Formules diverses :

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\log_a(x^n) = n \log_a x$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Passage de la base a à la base b :

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Logarithme naturel

Définition : $\ln x = \log_e x \quad (x > 0)$, où $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \approx 2,718$

$$u = \ln x \Leftrightarrow x = e^u$$

Formules diverses :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

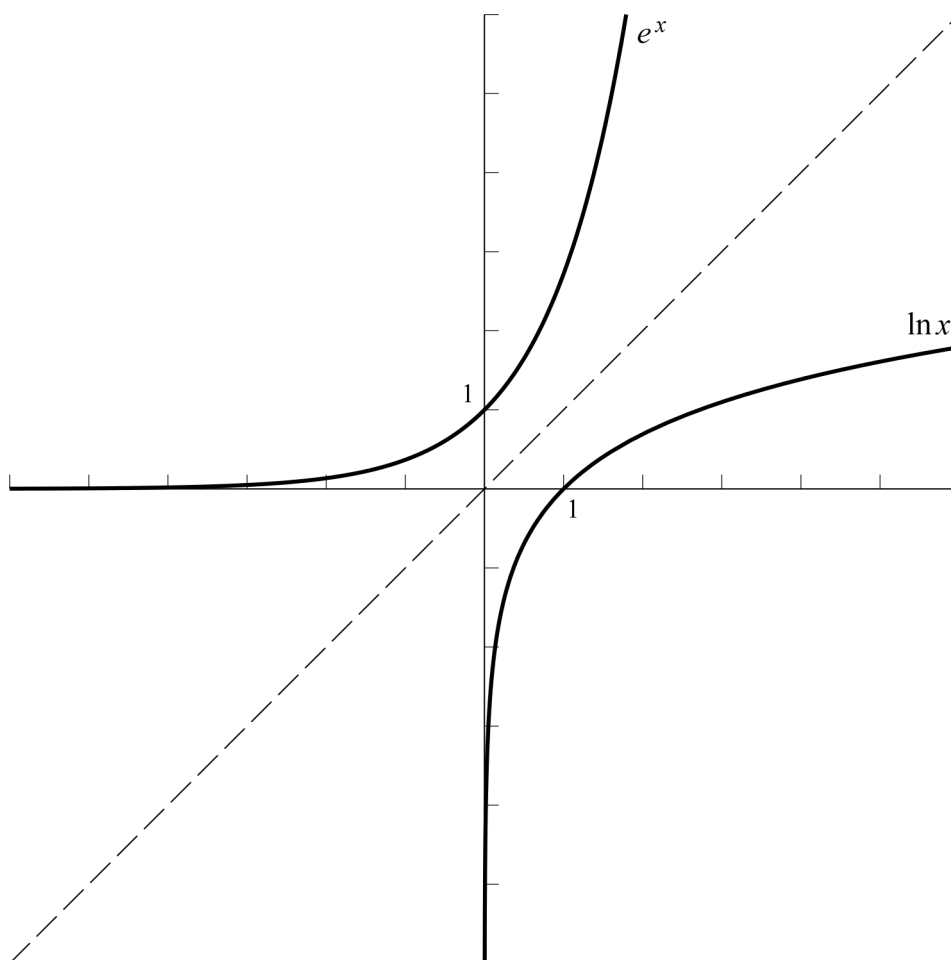
$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

Formules de passage :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad ; \quad a^x = e^{(\ln a)x}$$

Graphes des fonctions e^x et $\ln x$



Intérêts et annuités

Intérêts composés :

$$C_n = C_0(1+t)^n$$

Annuités :

$$V_n = a \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

t = taux d'intérêt / n = nombre d'années / C_0 = capital initial / C_n = capital final

a = annuité / V_n = capital acquis au versement de la n -ième annuité

ANALYSE

LIMITES

Quelques formes indéterminées

$$\left[\frac{0}{0} \right] ; \left[\frac{\infty}{\infty} \right] ; [\infty - \infty] ; [0 \cdot \infty] ; [0^0] ; [1^\infty]$$

Limites de fonctions rationnelles

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{N(x)}{D(x)} = \begin{cases} \frac{N(a)}{D(a)} & \text{si } D(a) \neq 0 \\ +\infty \text{ ou } -\infty & \text{si } D(a)=0 \text{ et } N(a) \neq 0 \end{cases}$$

Si $N(a) = D(a) = 0$, il faut simplifier la fraction par $(x - a)$ pour calculer la limite

La limite de $\frac{N(x)}{D(x)}$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré de $N(x)$ et $D(x)$

Limites de fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

Pour tout réel $n > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0 \quad (n > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ASYMPTOTES

Asymptotes verticales

La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale de f si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm \infty$$

Asymptotes horizontales

La droite d'équation $y = h$ est asymptote horizontale à droite de f si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = h$$

De même à gauche ($x \rightarrow -\infty$)

Asymptotes obliques

La droite d'équation $y = mx + h$ est asymptote oblique à droite d'une fonction f si

$$f(x) = (mx + h) + \delta(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0$$

De même à gauche ($x \rightarrow -\infty$)

Cas des fonctions rationnelles

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle.

La droite d'équation $y = mx + h$ est asymptote oblique de f si $mx + h$ est le quotient de la division euclidienne de $N(x)$ par $D(x)$.

Si $R(x)$ désigne le reste de la division de $N(x)$ par $D(x)$, le signe de la fonction

$\delta(x) = \frac{R(x)}{D(x)}$ donne la position du graphe de f relativement à l'asymptote oblique.

Dans le cas d'une asymptote horizontale $y = h$, on prend $\delta(x) = f(x) - h$.

DÉRIVÉES

Définition

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$f'(a)$ est la pente du graphe de f au point $(a, f(a))$

$f' : x \mapsto f'(x)$ est la fonction *dérivée* de f

Autres notations pour $f'(x)$: y' ; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d}{dx} f(x)$

Tangentes au graphe d'une fonction

Equation de la tangente au graphe de f en $P(a, f(a))$: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Croissance

f croissante sur l'intervalle $I \iff f'$ est positive sur I
 f décroissante sur l'intervalle $I \iff f'$ est négative sur I

Règles de dérivation

$(cf)' = c f' \quad [c = \text{constante}]$	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$(fg)' = f'g + fg'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Fonctions composées

La dérivée de $[g(x)]^n$ est $n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$

La dérivée de $f(g(x))$ est $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Dérivée de quelques fonctions

<i>Fonction $f(x)$</i>	<i>Dérivée $f'(x)$</i>	<i>Fonction $f(x)$</i>	<i>Dérivée $f'(x)$</i>
c (constante)	0	e^x	e^x
x	1	a^x	$a^x \ln a$
x^n ($n \in \mathbb{R}$)	$n x^{n-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{Arcsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{Arccos} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\operatorname{Arctan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$\operatorname{Arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$

PRIMITIVES

Définition

F est une primitive de f sur l'intervalle I si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Les autres primitives de f sur I sont $F + c$, où c est une constante.

Propriétés

$$P(f + g) = P(f) + P(g) \quad P(cf) = c P(f) \quad P(f(g(x)) \cdot g'(x)) = F(g(x))$$

Primitives de quelques fonctions

Fonction	Primitive
c (constante)	cx
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$[g(x)]^n \cdot g'(x)$	$\frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln g(x) $
e^x	e^x
$e^{g(x)} \cdot g'(x)$	$e^{g(x)}$
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$f(ax + b)$	$\frac{1}{a} F(ax + b)$

INTÉGRALES

Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on partage l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, et d'extrémités $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ telles que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \text{aire algébrique sous } f \text{ de } a \text{ à } b$$

Théorème fondamental

Si F est une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^b c f = c \int_a^b f \quad (c = \text{constante})$$

$$\int_b^a f = - \int_a^b f$$

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

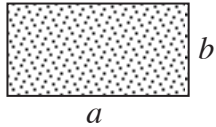
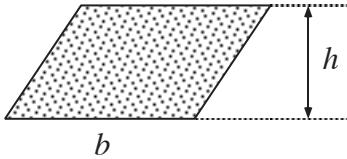
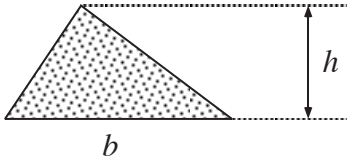
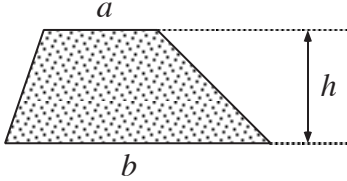
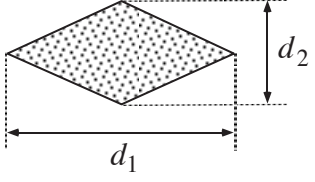
Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Aires et volumes

Aire du domaine limité par les graphes de f et g et les verticales d'abscisses a et b , lorsque $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$	$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$
Volume d'un solide dont les sections perpendiculaires à l'axe Ox sont connues [$S(x)$ = aire de la section d'abscisse x]	$\int_a^b S(x) dx$
Volume du solide engendré par révolution autour de l'axe Ox du domaine compris entre le graphe de f , l'axe Ox et les verticales d'abscisses a et b	$\int_a^b \pi f^2(x) dx$

GÉOMÉTRIE

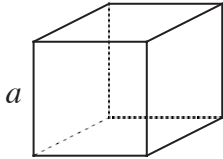
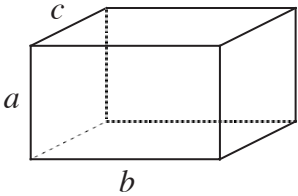
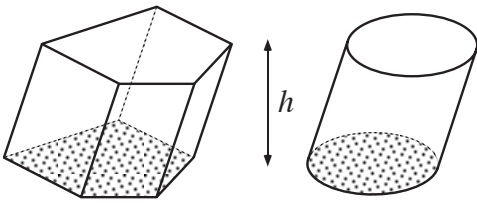
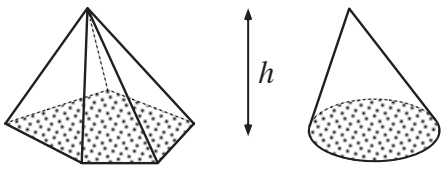
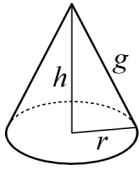
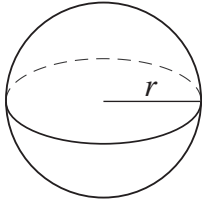
Aire de quelques polygones

Rectangle	ab	
Parallélogramme	bh	
Triangle	$\frac{1}{2}bh$	
Trapèze	$\frac{1}{2}(a+b)h$	
Losange	$\frac{1}{2}d_1d_2$	

Cercle

Aire d'un cercle de rayon r :	πr^2
Circonférence d'un cercle de rayon r :	$2\pi r$

Volume de quelques solides

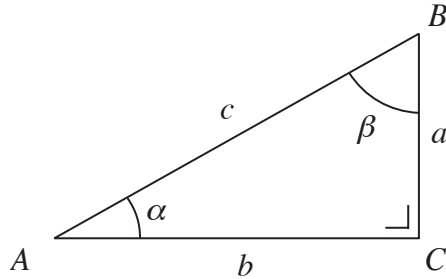
Cube	a^3	
Parallélépipède rectangle	abc	
Prisme / Cylindre	Bh	
Pyramide / Cône	$\frac{1}{3}Bh$	
Cône circulaire droit	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$ [Aire latérale : $\pi r g$]	
Sphère	$\frac{4}{3}\pi r^3$ [Aire : $4\pi r^2$]	

Triangle isocèle, équilatéral

Un triangle est *isocèle* s'il a une paire de côtés (ou d'angles) égaux

Un triangle est *équilatéral* si ses trois côtés (ou trois angles) sont égaux

Triangle rectangle



Théorème de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$

Angles : $\alpha + \beta = 90^\circ$

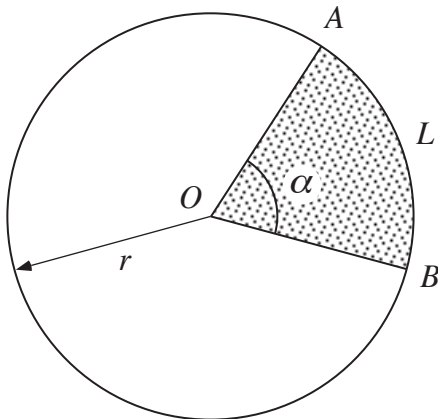
Aire : $\frac{1}{2}ab$

Somme des angles

La somme des angles d'un triangle vaut 180°

La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés vaut $(n - 2) \cdot 180^\circ$

Arcs et secteurs circulaires



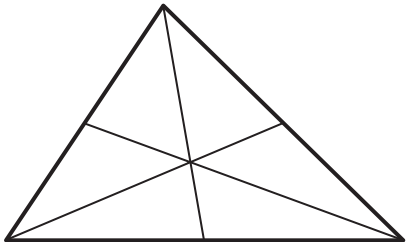
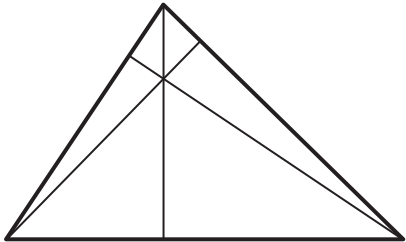
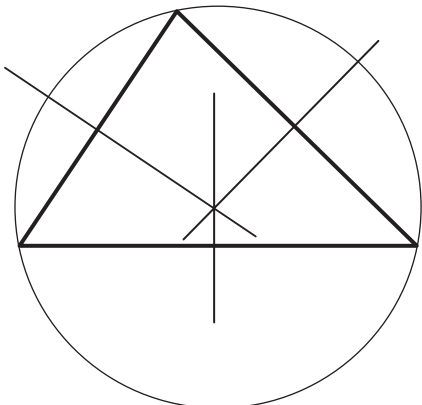
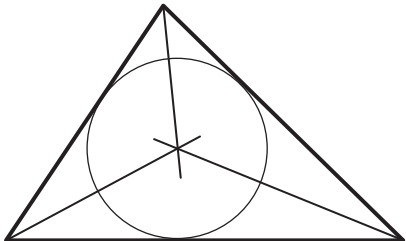
$$\frac{L}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360}$$

L = longueur de l'arc $\widehat{AB}$
(α exprimé en degrés)

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360}$$

S = aire du secteur circulaire OAB
(α exprimé en degrés)

Lignes principales du triangle

	Une médiane joint un sommet et le milieu du côté opposé. Les médianes se coupent au centre de gravité du triangle. Le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane, à partir du sommet.
	Une hauteur passe par un sommet du triangle et est perpendiculaire au côté opposé. Les hauteurs se coupent en un point appelé orthocentre du triangle.
	Une médiatrice passe par le milieu d'un côté et est perpendiculaire à ce côté. Les médiatrices se coupent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.
	Une bissectrice divise un angle en deux parties égales. Les bissectrices se coupent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE

Règle de Chasles

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Vecteurs colinéaires

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ colinéaire à } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow ad = bc$$

Coordonnées

$$P(p_1 ; p_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Point milieu

Le point milieu du segment AB est

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Centre de gravité

Le centre de gravité du triangle ABC est

$$G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$$

Norme

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$$

Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \varphi$$

Angle de deux vecteurs

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Vecteurs perpendiculaires

$$\vec{u} \text{ perpendiculaire à } \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Rotation de 90°

Les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\pm \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires et de même norme

Rapport de section

$$(AB, P) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} = k \overrightarrow{PB}$$

Droites

Pente d'une droite de vecteur directeur $\vec{d}$	$m = \frac{d_2}{d_1} \quad \left(= \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$
Pente de la droite AB	$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$
Equation d'une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine h	$y = mx + h$
Equation d'une droite perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$ax + by = c$
Pente d'une droite d'équation $ax + by = c$	$m = -\frac{a}{b}$
Equation d'une droite de pente m passant par le point P	$y - p_2 = m(x - p_1)$
Equation d'une droite de pente $\frac{p}{q}$	$px - qy = c$
Equation paramétrique d'une droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$
Condition de perpendicularité pour deux droites de pentes m et m'	$mm' = -1 \quad \Leftrightarrow \quad m' = -\frac{1}{m}$
Angle orienté de deux droites, la première de pente m_1 , la deuxième de pente m_2	$\tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

Projection d'un vecteur

Projection (orthogonale) du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{a}$	$\vec{p} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\ \vec{a}\ ^2} \right) \vec{a}$
Norme de la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{a}$	$\ \vec{p}\ = \frac{ \vec{v} \cdot \vec{a} }{\ \vec{a}\ }$

Distances

Distance de $A(a_1, a_2)$ à $B(b_1, b_2)$	$\delta(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$
Distance du point $P(p_1, p_2)$ à la droite d d'équation $ax + by + c = 0$	$\delta(P, d) = \frac{ ap_1 + bp_2 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Bissectrices

Bissectrices des droites $d: ax + by + c = 0$ et $d': a'x + b'y + c' = 0$:	
$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$	

Cercle

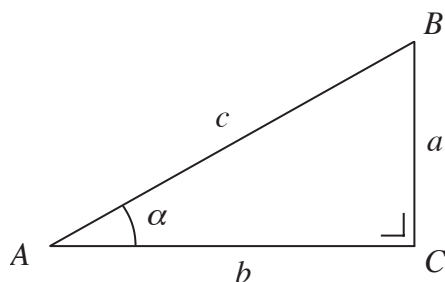
Equation du cercle de centre $C(\alpha, \beta)$ et de rayon r	$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$
Condition de tangence d'une droite t avec un cercle de centre C et de rayon r	$\delta(C, t) = r$
Tangentes de pente m à un cercle de centre $C(\alpha, \beta)$ et de rayon r	$y - \beta = m(x - \alpha) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
Deux cercles de centres C_1 et C_2 et de rayons r_1 et r_2 sont - tangents <i>extérieurement</i> si $\delta(C_1, C_2) = r_1 + r_2$ - tangents <i>intérieurement</i> si $\delta(C_1, C_2) = r_1 - r_2 \neq 0$	

TRIGONOMÉTRIE

Conversion degré-radian

$$\frac{r}{d} = \frac{\pi}{180}$$

Rapports trigonométriques



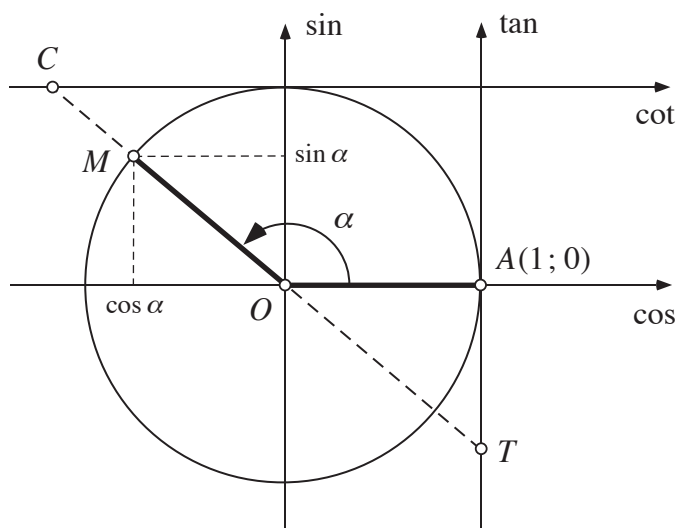
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{adjacent}}{\text{opposé}}$$

Cercle trigonométrique



$\sin \alpha =$ ordonnée de M

$\cos \alpha =$ abscisse de M

$\tan \alpha =$ ordonnée de T

$\cot \alpha =$ abscisse de C

Valeurs exactes

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

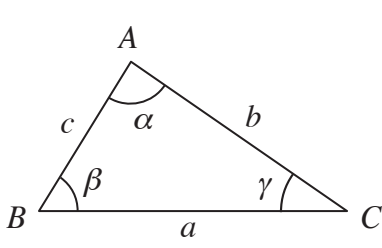
Relations fondamentales

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

Triangle quelconque



Théorème du sinus :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

(r = rayon du cercle circonscrit)

Théorème du cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Aire :

$$\frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Formules de réduction

$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$ $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$ $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$ $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$

Somme et différence d'angles

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$
--	--

Duplication et bissection

$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$
---	---

COMBINATOIRE

Arrangements et combinaisons

<i>Principe de multiplication</i> Nombre d'arrangements p à p, avec n_1 choix pour le 1^{er} objet, n_2 choix pour le 2^e, etc.	$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_p$
<i>Permutations simples</i> Nombre d'arrangements n à n de n objets, sans répétitions	$P_n = n!$ $= n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$
<i>Permutations avec répétitions</i> Nombre de permutations de n objets, dont n_1 objets A, n_2 objets B, n_3 objets C, etc.	$\bar{P}_n = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots}$
<i>Arrangements simples</i> Nombre d'arrangements p à p de n objets, sans répétitions	$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$ $= \underbrace{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$
<i>Arrangements avec répétitions</i>	$\bar{A}_p^n = n^p$
<i>Combinaisons simples</i> Nombre de sous-ensembles de p objets dans un ensemble de n objets Nombre de choix possibles de p objets parmi n	$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ $= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!}$
<i>Combinaisons avec répétitions</i> Nombre d'ensembles de p lettres que l'on peut former à partir de n lettres, chacune de celles-ci pouvant être utilisée jusqu'à p fois	$\bar{C}_p^n = C_p^{n+p-1}$ $= \frac{\overbrace{n(n+1)(n+2) \dots (n+p-1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!}$

Binôme de Newton

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \dots + C_p^n a^{n-p} b^p + \dots + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{p=0}^n C_p^n a^{n-p} b^p$$

Triangle de Pascal

0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							
7	1	7	21	35	35	21	7	1						
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1					
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1			
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1		
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
<i>n</i>														
<i>p</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...

(Le coefficient binomial C_p^n se lit à l'intersection de la n -ième ligne et de la p -ième colonne)

PROBABILITÉS

Univers composé d'un nombre fini de cas équiprobables

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Règle d'addition

Si deux événements A et B sont *incompatibles* ($A \cap B = \emptyset$), alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Formules diverses

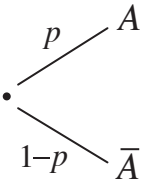
Probabilité du complémentaire	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
Probabilité de la différence	$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$
Probabilité de la réunion	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Probabilité conditionnelle

Probabilité de A sachant B	$p(A B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$
Théorème de multiplication	$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B A)$

Les événements A et B sont *indépendants* si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Processus binomial

	Probabilité d'obtenir exactement k fois A en n épreuves indépendantes : $C_k^n \cdot p^k (1-p)^{n-k}$
---	---

STATISTIQUE

On considère un caractère statistique x défini sur une population de taille n .

Les lettres m , v et s désignent respectivement la *moyenne*, la *variance* et l'*écart type* du caractère x .

Données non groupées

Le caractère prend les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - m^2$$

$$s = \sqrt{v}$$

Données groupées

Le caractère prend n_1 fois la valeur x_1 , n_2 fois la valeur x_2 , ..., n_k fois la valeur x_k
($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$$

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - m)^2 n_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i \right) - m^2$$

$$s = \sqrt{v}$$

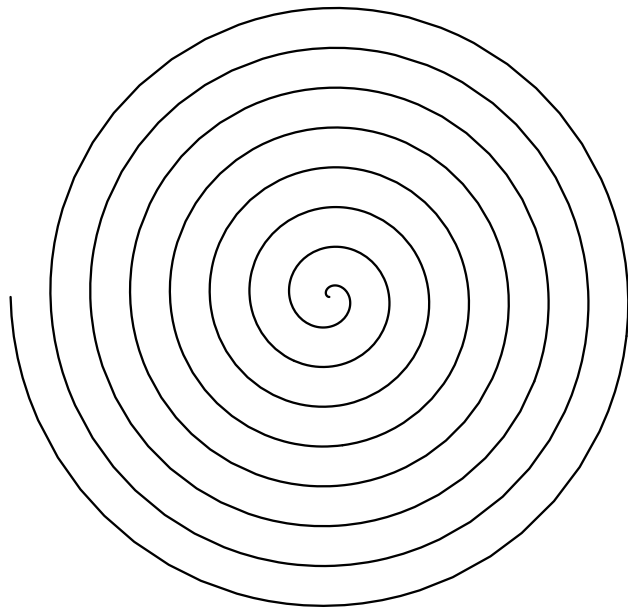
Données groupées par classes

Les valeurs du caractère ont été rangées dans k classes contiguës de même largeur. Ces classes, de centres respectifs $x_1, x_2, \dots, x_k$, contiennent respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ valeurs du caractère ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)

$$m \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$$

$$v \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - m)^2 n_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i \right) - m^2$$

$$s = \sqrt{v}$$



$$t \mapsto (-t \cos t, t \sin t)$$