

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

2009

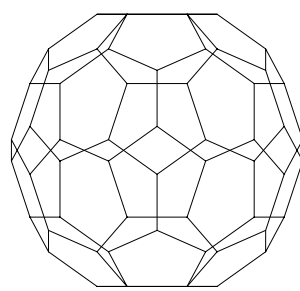
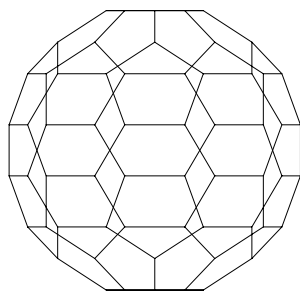
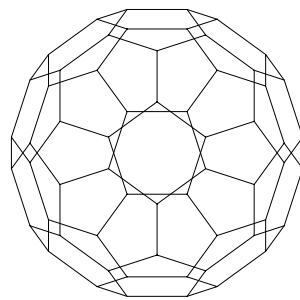
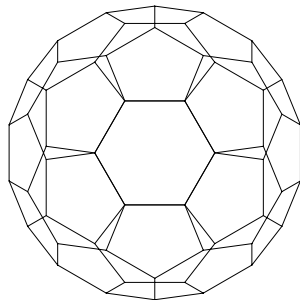
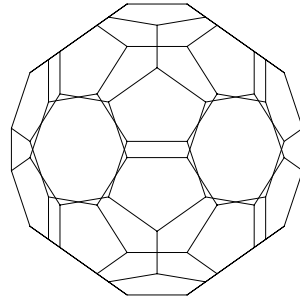
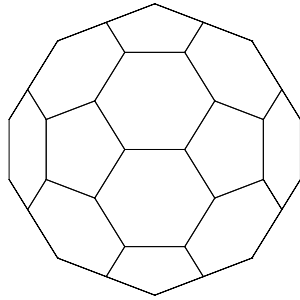


TABLE DES MATIÈRES

Droites et plans dans l'espace	1
Perpendicularité dans l'espace	2
Combinaisons linéaires de vecteurs	3
Vecteurs coplanaires	4
Bases et repères	5
Règle de Chasles	6
Divers	7
Norme. Produit scalaire	8
Equation paramétrique d'une droite.....	9
Equation cartésienne d'un plan	10
Intersection d'une droite et d'un plan.....	11
Intersection de deux plans	12
Angle de deux plans	13
Plan médiateur	14
Plans bissecteurs	15
Produit vectoriel	16
Propriétés algébriques du produit vectoriel.....	17
Produit mixte	18
Signification géométrique du produit mixte.....	19
Distance d'un point à une droite	20
Distance d'un point à un plan	21
Equation d'une sphère.....	22
Plan tangent à un cône de révolution	23

EXERCICES

§ 1. DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

Notion de plan

Toute droite ayant deux points distincts dans un plan est entièrement contenue dans ce plan.

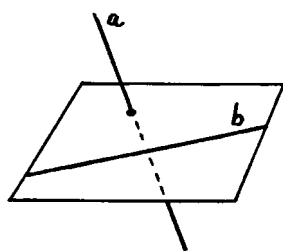
Tout plan de l'espace partage celui-ci en deux régions distinctes appelées demi-espaces, et cela de telle sorte que:

- Tout segment ayant une extrémité dans chacun de ces demi-espaces rencontre le plan en un point unique.
- Tout segment ayant ses extrémités dans le même demi-espace ne rencontre pas le plan.

Figures coplanaires

Plusieurs figures sont dites *coplanaires* quand elles sont contenues dans un même plan.

Position relative de deux droites



a et b gauches

Deux droites sont dites *gauches* lorsqu'elles ne sont pas coplanaires.

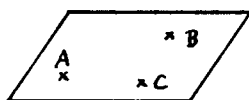
Deux droites sont dites *parallèles* lorsqu'elles sont coplanaires et sans points communs.

Deux droites peuvent donc être *gauches*, *sécantes*, *parallèles* ou *confondues*.

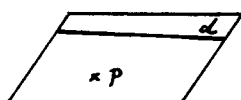
Détermination d'un plan

Un plan est déterminé par:

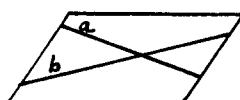
- trois points non alignés;
- une droite et un point extérieur à la droite;
- deux droites sécantes;
- deux droites parallèles.



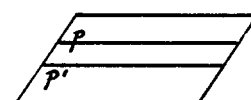
$\pi(ABC)$



$\pi(d ; P)$



$\pi(a ; b)$

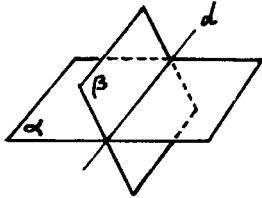


$\pi(p ; p')$

Position relative de deux plans

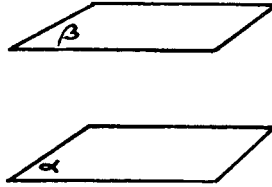
Deux plans peuvent être:

- sécants (leur intersection est une droite);
- parallèles (leur intersection est vide);
- confondus.



$$\alpha \cap \beta = d$$

(d est la **trace** de β sur α)



$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

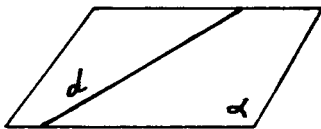


$$\alpha = \beta$$

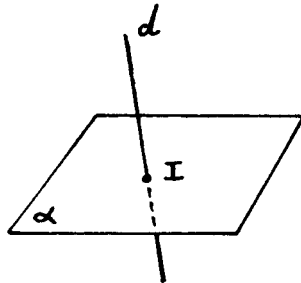
Position relative d'une droite et d'un plan

Trois cas peuvent se présenter:

- la droite est contenue dans le plan;
- la droite et le plan sont sécants (ils n'ont qu'un seul point commun; la droite perce le plan);
- la droite et le plan sont parallèles (leur intersection est vide).

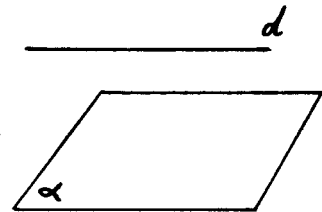


$$d \subset \alpha$$



$$d \cap \alpha = \{ I \}$$

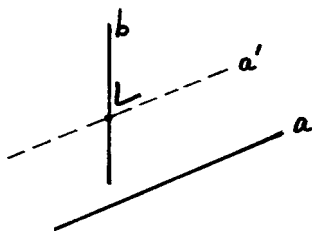
(I est la **trace** de d sur α)



$$d \cap \alpha = \emptyset$$

§ 2. PERPENDICULARITÉ DANS L'ESPACE

Droites orthogonales



Deux droites a et b sont dites orthogonales s'il existe une parallèle à l'une coupant l'autre perpendiculairement.

Cas particulier:

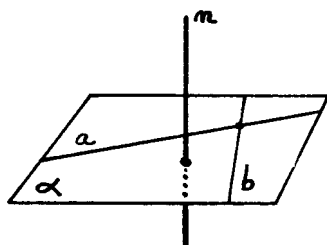
Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

Propriétés

1. Si a et b sont orthogonales, toute parallèle à a coupant b est perpendiculaire à b .
2. La relation d'orthogonalité entre deux droites est conservée lorsqu'on déplace l'une d'elles parallèlement à elle-même.

Droite normale ou perpendiculaire à un plan

Une droite est dite normale ou perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. On dit aussi que le plan est perpendiculaire à la droite.



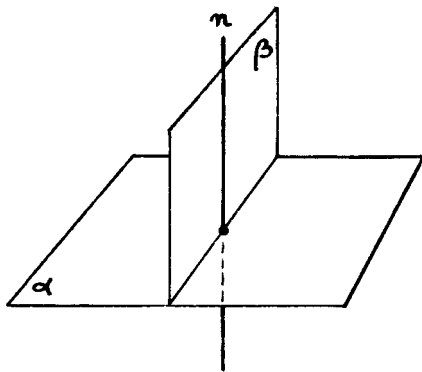
$$\left. \begin{array}{l} n \text{ orthogonale à } a \\ n \text{ orthogonale à } b \end{array} \right\} \Rightarrow n \perp \alpha$$

Propriétés

1. Toute normale à un plan est orthogonale à toutes les droites du plan, ainsi qu'aux parallèles à ce plan. En particulier, la normale est perpendiculaire à toutes les droites du plan qui passent par son pied.
2. Par un point de l'espace, il passe une et une seule normale à un plan donné.
3. Par un point de l'espace, il passe un et un seul plan perpendiculaire à une droite donnée.
4. La relation de perpendicularité entre une droite et un plan est conservée lorsqu'on déplace la droite parallèlement à elle-même. Idem pour un déplacement parallèle du plan.
5. Deux normales distinctes à un même plan sont parallèles.
6. Deux plans distincts admettant la même normale sont parallèles.

Plans perpendiculaires

Deux plans sont dits perpendiculaires *quand l'un contient une normale à l'autre* (ou, de manière équivalente, quand chacun d'eux contient une normale à l'autre).

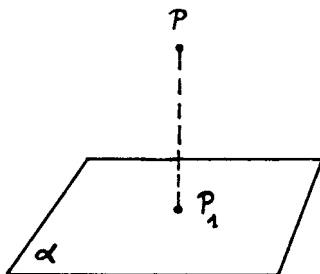


$$\left. \begin{array}{l} n \perp \alpha \\ \beta \supset n \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha$$

Propriétés

1. La relation de perpendicularité entre deux plans est conservée lorsqu'on déplace l'un d'eux parallèlement à lui-même.
2. Par une droite de l'espace non normale à un plan donné α , il passe un et un seul plan perpendiculaire à α .

Projection orthogonale



$$P_1 = \text{proj}_\alpha(P)$$

On appelle projection orthogonale (ou simplement projection) d'un point sur un plan le pied de la normale abaissée du point sur le plan. Le plan en question est le **plan de projection**; la normale en question est la **projetante** du point.

La projection d'une figure sur le plan est l'ensemble des projections des points de la figure sur le plan.

La projection d'une droite sur un plan est une droite, ou, s'il s'agit d'une normale, un point.

Le plan déterminé par une droite et sa projection est le **plan projetant** de la droite.

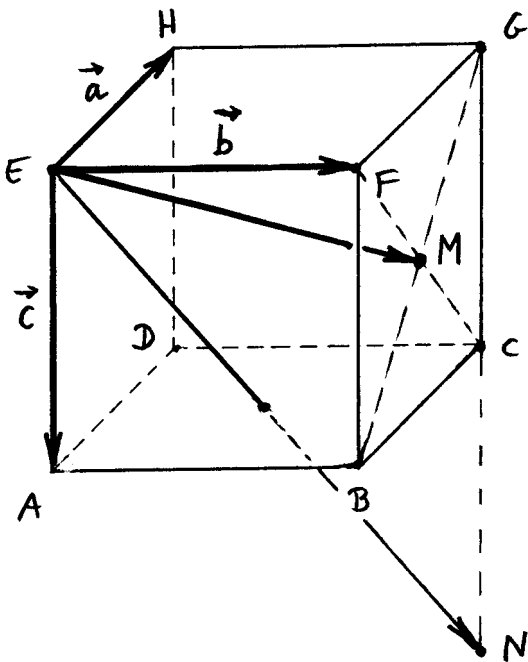
§ 3. COMBINAISONS LINÉAIRES DE VECTEURS

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{l}$ plusieurs vecteurs. On dit que $\vec{v}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{l}$ s'il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ tels que

$$\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + \dots + \lambda \vec{l}$$

Les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ s'appellent les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple



Dans le cube $ABCDEFGH$:

$\vec{EM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$:

$$\vec{EM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

(coefficients: $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$)

$\vec{EN}$ également:

$$\vec{EN} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$$

(coefficients: 1, 1, 2)

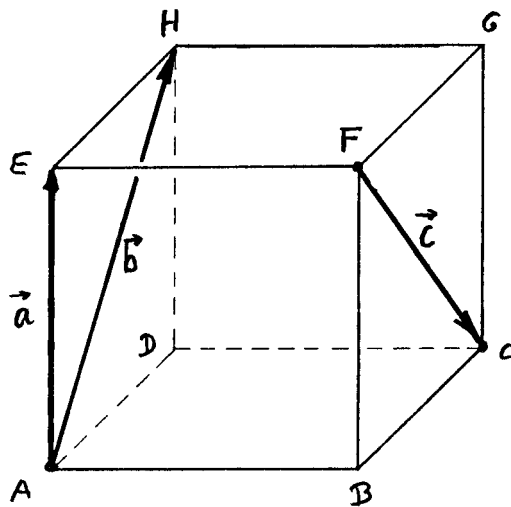
§ 4. VECTEURS COPLANAIRES

Définition

Plusieurs vecteurs sont dits *coplanaires* s'ils peuvent être représentés par des flèches situées dans un même plan.

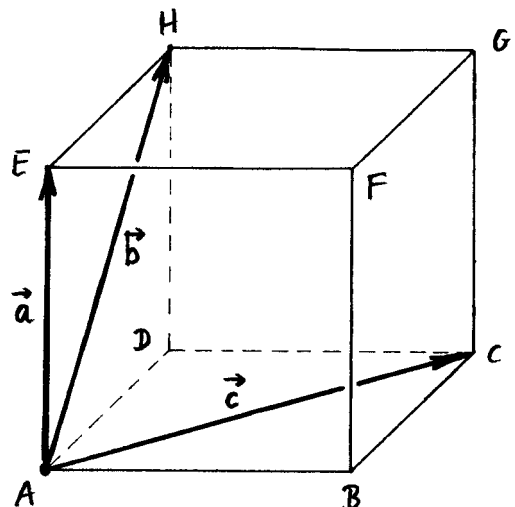
Exemples ($ABCDEFGH$ est un cube)

1.



$\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires ($\vec{c} = \overrightarrow{ED}$)

2.

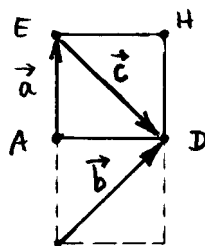


$\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont pas coplanaires

Ainsi:

Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si l'un d'eux au moins peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres.

Dans l'exemple 1 ci-dessus: $\vec{c} = \overrightarrow{ED} = -2\vec{a} + \vec{b}$. En effet:



§ 5. BASES ET REPÈRES

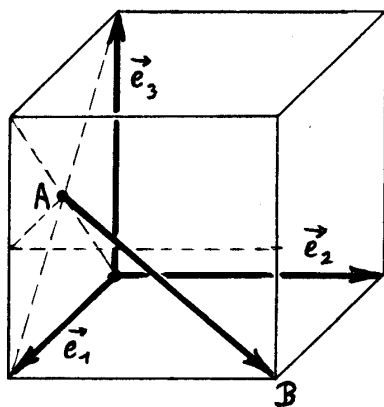
Base

Une *base* est un triplet $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ de vecteurs non coplanaires.

Tout vecteur de l'espace peut s'exprimer, de manière unique, comme combinaison linéaire des trois vecteurs de base.

Les coefficients de la combinaison linéaire sont les *composantes* du vecteur relativement à cette base.

Exemple

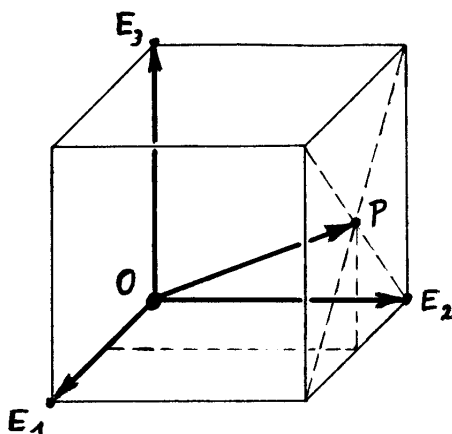


$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Repère

Un *repère* est un quadruplet de points $(O; E_1; E_2; E_3)$ tel que $(\overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2}; \overrightarrow{OE_3})$ soit une base. Le point O s'appelle l'*origine* du repère. Les *coordonnées* d'un point P dans ce repère sont, par définition, les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$ relativement à la base $(\overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2}; \overrightarrow{OE_3})$.

Exemple



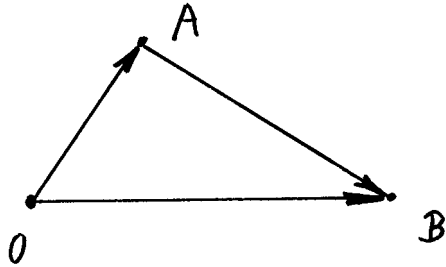
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}; \quad \text{les coordonnées du point } P$$

sont donc: $\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

$$P(\alpha; \beta; \gamma) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

§ 6. RÈGLE DE CHASLES

Relativement à un repère $(O; E_1; E_2; E_3)$, on donne les points $A(a_1; a_2; a_3)$ et $B(b_1; b_2; b_3)$.



Par la "règle du triangle", on a:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

D'où:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

De plus, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Par conséquent:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Exemple

Si $A(2; 1; -1)$ et $B(5; 2; 3)$, alors: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

§ 7. DIVERS

Vecteurs colinéaires

Les propositions (1) , (2) et (3) sont équivalentes:

- (1) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires $(\vec{a} \sim \vec{b})$
- (2) il existe un réel k tel que $\vec{a} = k\vec{b}$ ou $\vec{b} = k\vec{a}$
- (3) les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont proportionnelles

Vecteurs coplanaires

Les propositions (1) , (2) et (3) sont équivalentes:

- (1) les vecteurs $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ sont coplanaires
- (2) les points O , A , B et C sont situés dans un même plan
- (3) l'un au moins des trois vecteurs $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres

Milieu d'un segment

Les propositions (1) , (2) et (3) sont équivalentes:

- (1) M est le milieu du segment AB
- (2) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$
- (3) $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2} ; \frac{a_2 + b_2}{2} ; \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$

Centre de gravité

Les propositions (1) , (2) et (3) sont équivalentes:

- (1) G est le centre de gravité du triangle ABC
- (2) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$
- (3) $G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} ; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} ; \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right)$

§ 8. NORME. PRODUIT SCALAIRE

Les formules vues à ce sujet dans le plan restent valables dans l'espace.

Le repère $(O ; E_1 ; E_2 ; E_3)$ choisi doit être *orthonormé* (c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$ et $\overrightarrow{OE_3}$ doivent être deux à deux perpendiculaires et de longueur unité).

Norme

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Forme trigonométrique du produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos \varphi$$

$$(0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$$

Critère de perpendicularité

$$\vec{u} \text{ perpendiculaire à } \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

§ 9. ÉQUATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE

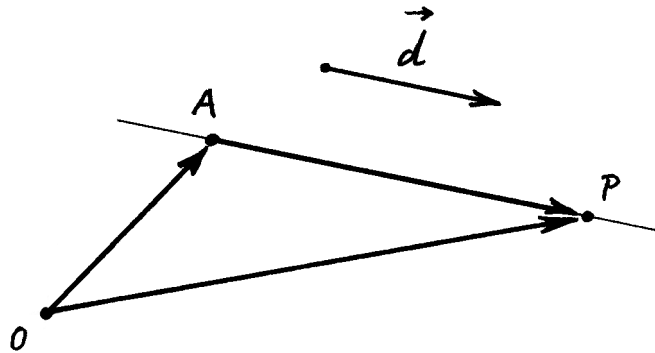
Soit A un point et $\vec{d}$ un vecteur non nul. Notons $\text{dte}(A; \vec{d})$ la droite de direction $\vec{d}$ passant par A .

Théorème

La droite $\text{dte}(A; \vec{d})$ est l'ensemble des points P de l'espace tels que:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{d}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Preuve



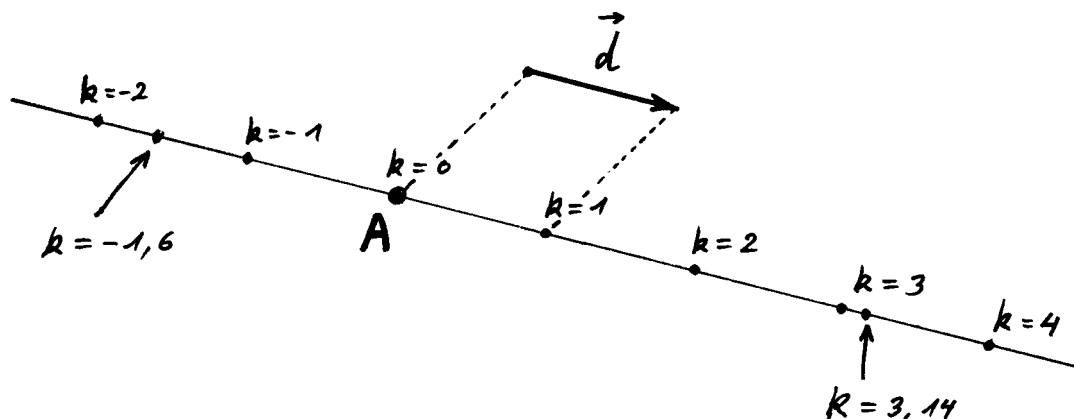
$$\begin{aligned} P \in \text{dte}(A; \vec{d}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \text{ et } \vec{d} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AP} = k\vec{d} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = k\vec{d} \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{d}. \end{aligned}$$

Remarques

1. En passant aux composantes, l'équation $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{d}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + k d_1 \\ y = a_2 + k d_2 \\ z = a_3 + k d_3 \end{cases}$$

2. A chaque valeur du **paramètre** k correspond un unique point de la droite $(A; \vec{d})$, et réciproquement.



Intersection de deux droites

Soit $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Pour déterminer l'intersection $d \cap e$ de

ces droites, il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} k = -7 + 3l \\ 3 - k = -8 + 3l \\ 1 - k = 5 - 2l \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $k = 2$ et $l = 3$. Il reste à contrôler que ces deux nombres vérifient également la troisième équation, ce qui est ici le cas. D'où :

$$d \cap e: (k; 3 - k; 1 - k) \stackrel{k=2}{=} (2; 1; -1)$$

Si le système en k et l n'a pas de solution, c'est que les droites d et e sont gauches ou strictement parallèles.

Si le système est vérifié pour toute valeur de k et l , c'est que les droites d et e sont confondues.

§ 10. ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

Théorème

Soit α un plan, $A(a_1; a_2; a_3)$ un point de α et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal (= perpendiculaire) à α . Le plan α est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace qui vérifient l'équation

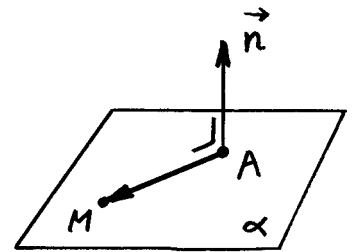
$$ax + by + cz = aa_1 + ba_2 + ca_3$$

Preuve

$$M(x; y; z) \in \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - a_1) + b(y - a_2) + c(z - a_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz = aa_1 + ba_2 + ca_3$$



Corollaire

Toute équation du type

$$ax + by + cz = d$$

(a , b et c non tous nuls)

détermine un plan perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et tout plan admet une équation de ce type (appelée *équation cartésienne* du plan).

§ 11. INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

On donne une droite d et un plan α :

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 3 - 2k \\ z = 7 - 2k \end{cases}$$

$$\alpha : 2x - 3y + z = 14$$

Cherchons à déterminer l'intersection de d et α .

Il suffit de trouver k tel que :

$$2(-1 + k) - 3(3 - 2k) + (7 - 2k) = 14 \quad (*)$$

En résolvant cette équation du premier degré, on trouve $k = 3$, d'où :

$$d \cap \alpha : \begin{cases} x = -1 + 3 = 2 \\ y = 3 - 2 \cdot 3 = -3 \\ z = 7 - 2 \cdot 3 = 1 \end{cases}$$

La droite d perce donc le plan α au point $(2 ; -3 ; 1)$.

Remarque

- Si l'équation (*) ci-dessus n'a pas de solution, c'est que d est parallèle à α .
- Si l'équation (*) possède une infinité de solutions, c'est que d est contenue dans α .

§ 12. INTERSECTION DE DEUX PLANS

Cherchons par exemple la droite d'intersection d des plans $\alpha : x - 2y + z = 1$ et $\beta : 2x + y - z = 2$. Il s'agit de résoudre le système suivant, de 2 équations à 3 inconnues.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$$

Au moyen d'une combinaison linéaire, on élimine une inconnue dans la 2e équation:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Comme il y a "trop" d'inconnues, on peut donner à l'une d'elles une valeur quelconque, disons k , et résoudre le système en fonction de k :

$$\begin{cases} x = 1 + 2y - z = 1 + \frac{6}{5}k - k = 1 + \frac{1}{5}k \\ y = \frac{-3z}{-5} = \frac{3}{5}k \\ z = k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{5}k \\ y = \frac{3}{5}k \\ z = k \end{cases}$$

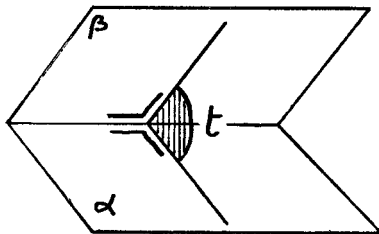
D'où l'équation paramétrique de d :

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

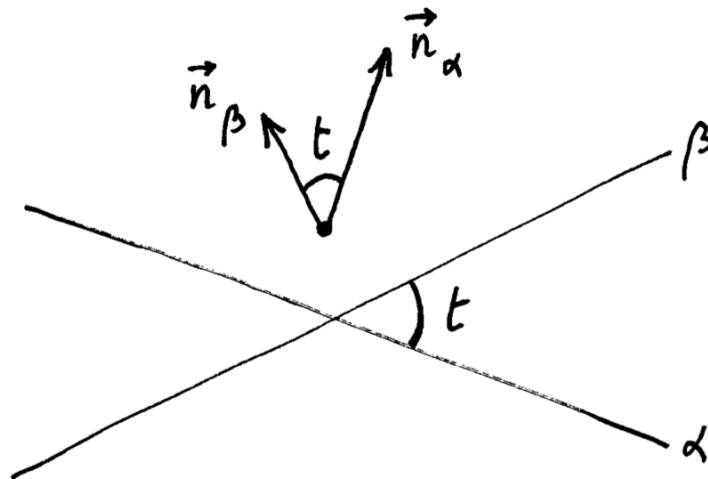
§ 13. ANGLE DE DEUX PLANS

Définition

L'angle de deux plans est l'angle de leurs normales.



Si les deux plans sont sécants, c'est aussi l'angle de deux perpendiculaires à leur intersection, l'une étant contenue dans le premier plan et l'autre dans le second.



Exemple

Soit $\alpha: x - 2y + z = 5$ et $\beta: 3x + y + 2z = 1$. Les vecteurs normaux sont:

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

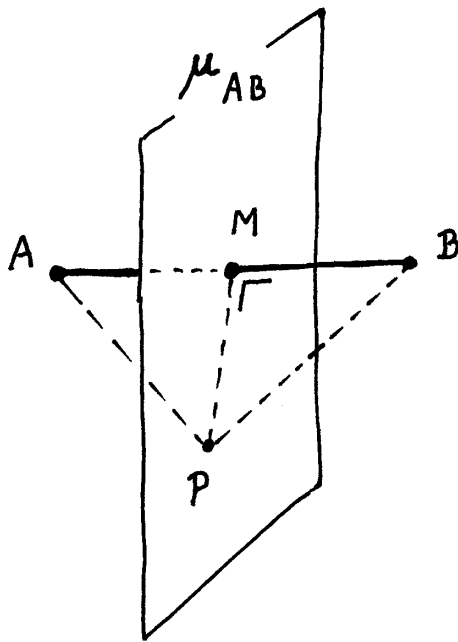
$$\text{Ansi: } \cos(t) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{\|\vec{n}_\alpha\| \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{84}} . \text{ Et donc: } t = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right) \approx 70,89^\circ .$$

§ 14. PLAN MÉDIATEUR

Définition

Le plan médiateur d'un segment AB — noté μ_{AB} — est le plan coupant le segment perpendiculairement en son milieu.

C'est aussi le *lieu géométrique des points situés à égale distance des extrémités A et B du segment*.



$$P \in \mu_{AB} \Leftrightarrow \delta(P; A) = \delta(P; B)$$

Trouver l'équation d'un plan médiateur

Soient par exemple les points $A(2; 3; 6)$ et $B(4; 11; -2)$.

1) Milieu M de AB : $\left(\frac{2+4}{2}; \frac{3+11}{2}; \frac{6+(-2)}{2}\right) = (3; 7; 2)$

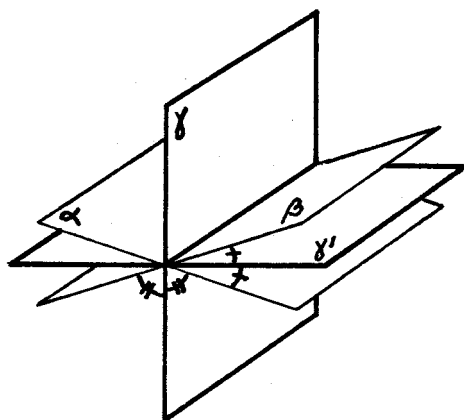
2) Vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal à μ_{AB}

3) Equation de μ_{AB} : $x + 4y - 4z = d$

4) On trouve d en remplaçant x, y et z par les coordonnées de M :

$$\mu_{AB} : x + 4y - 4z = 23$$

§ 15. PLANS BISSECTEURS



On appelle *plan bissecteur* de deux plans sécants α et β chacun des plans γ et γ' constituant le lieu géométrique des points équidistants des plans sécants α et β .

Les deux plans bissecteurs sont perpendiculaires.

§ 16. PRODUIT VECTORIEL

1. Définition du produit vectoriel

Relativement à une base orthonormée, on donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

On définit alors un troisième vecteur $\vec{c}$, noté $\vec{a} \times \vec{b}$, de la manière suivante :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{où } c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

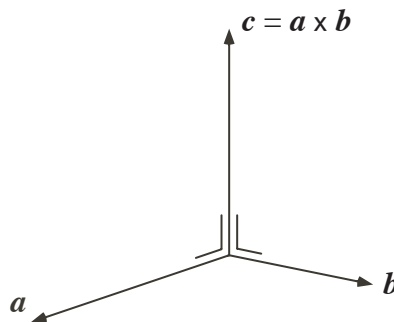
$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ est le *produit vectoriel* de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

On rappelle que le "tableau" $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ désigne le nombre $ad - bc$, et s'appelle un *déterminant*.

2. Direction du produit vectoriel

Le produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

On le vérifie au moyen du produit scalaire: $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$; $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$.



3. Norme du produit vectoriel

Théorème

Quels que soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$,

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi,$$

où φ désigne l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$).

Preuve

Nous partons de l'*identité de Lagrange*, que l'on vérifie sans difficulté en passant aux composantes:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi)^2 =$$

$$\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2 \varphi = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2 \varphi.$$

Ainsi $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2 \varphi$, et donc $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi$, puisque $\sin \varphi \geq 0$.

Corollaires

- $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

4. Sens du produit vectoriel

Soit $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base orthonormée, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires, et $\vec{a} \times \vec{b}$ leur produit vectoriel calculé relativement à B .

Alors $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{a} \times \vec{b})$ est une base de même orientation que B .

Si donc la base $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orientée *positivement*, le sens de $\vec{a} \times \vec{b}$ sera donné par la *règle du tire-bouchon*, ou par la *règle de l'auto-stoppeur droitier*.

Remarque. D'après les numéros 2 et 3, la direction et la norme du produit vectoriel ne dépendent pas de la base orthonormée choisie. Cependant, le sens du produit dépend de l'orientation de cette base.

§ 17. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DU PRODUIT VECTORIEL

Quels que soient les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et le réel λ , on a:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$; $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$
4. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
5. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

Preuves

Au lecteur de se salir les mains!



§ 18. PRODUIT MIXTE

Définition

Soit $(i; j; k)$ une base orthonormée orientée positivement.

On appelle **produit mixte** des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, et l'on note $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$, le nombre réel défini par:

$$[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire et $\times$ le produit vectoriel.

Remarque: On définit le même nombre en posant:

$$[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et les réels λ, μ , on a:

1. $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = [\vec{b}; \vec{c}; \vec{a}] = [\vec{c}; \vec{a}; \vec{b}]$
2. $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = -[\vec{a}; \vec{c}; \vec{b}] = -[\vec{b}; \vec{a}; \vec{c}] = -[\vec{c}; \vec{b}; \vec{a}]$
3. $[\lambda \vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = \lambda [\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$
 $[\vec{a}; \lambda \vec{b}; \vec{c}] = \lambda [\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$
 $[\vec{a}; \vec{b}; \lambda \vec{c}] = \lambda [\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$
4. $[\vec{a} + (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}); \vec{b}; \vec{c}] = [\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$
 $[\vec{a}; \vec{b} + (\lambda \vec{a} + \mu \vec{c}); \vec{c}] = [\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$
 $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c} + (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b})] = [\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$
5. $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ et } \vec{c} \text{ sont coplanaires}$
6. $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) \text{ est une base orientée positivement}$

Preuves: cf. exercices.

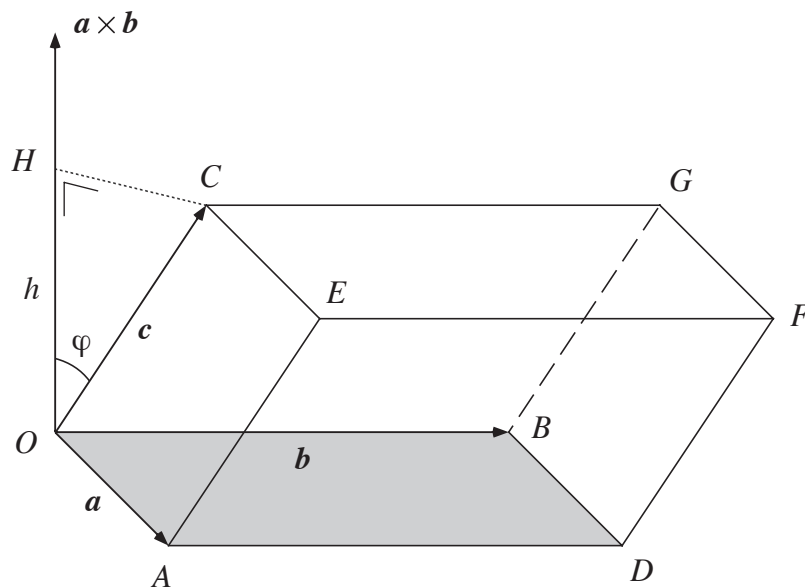
§ 19. SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DU PRODUIT MIXTE

Théorème

La valeur absolue du produit mixte $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$ est égale au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

Preuve

Soit A , B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. On doit montrer que le volume V du parallélépipède $OADBCEFG$ est égal à $|\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}|$.



Nommons H la projection orthogonale de C sur la droite $(O; \vec{a} \times \vec{b})$, φ l'angle des vecteurs $\vec{a} \times \vec{b}$ et $\vec{c}$, et h la distance OH . Alors :

$$\begin{aligned} V &= (\text{aire du parallélogramme } OADB) \cdot h = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot h = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cos \varphi \\ &= \left| \|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\| \cos \varphi \right| = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right| = |\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}|. \end{aligned}$$

Corollaires

1. $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] = 0$ si et seulement si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.
2. Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est égal à $\frac{1}{6} |\vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD}|$.

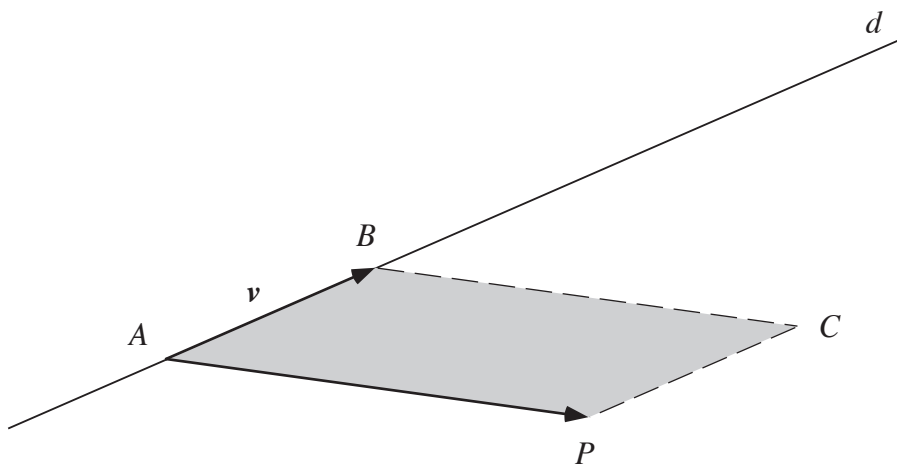
§ 20. DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

Soit d une droite de direction $\vec{v}$ passant par un point A .

La distance d'un point P à la droite d est donnée par:

$$\delta(P; d) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Preuve



Prenons B sur d tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, et C tel que le quadrilatère $ABCP$ soit un parallélogramme.

Dans celui-ci, la hauteur relative à la base AB est égale à la distance de P à d .

L'aire du parallélogramme $ABCP$ vaut donc $\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \delta(P; d) = \|\vec{v}\| \cdot \delta(P; d)$.

D'autre part, on sait que cette aire est égale à $\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|$.

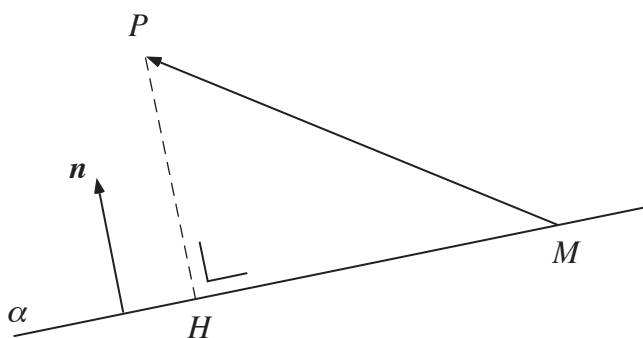
Il en résulte que $\|\vec{v}\| \cdot \delta(P; d) = \|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|$, puis que $\delta(P; d) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$.

§ 21. DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

La distance d'un point $P(p_1; p_2; p_3)$ à un plan α d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule:

$$\delta(P; \alpha) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Preuve



Soit:

H la projection de P sur le plan α ,

$M(x; y; z)$ un point de α ,

et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, vecteur normal à α .

La distance de P à α n'est autre que la norme de la projection du vecteur $\overrightarrow{MP}$ sur le vecteur $\vec{n}$. On peut donc écrire, grâce à une formule connue:

$$\delta(P; \alpha) = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Comme $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} p_1 - x \\ p_2 - y \\ p_3 - z \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a:

$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} = a(p_1 - x) + b(p_2 - y) + c(p_3 - z) = ap_1 + bp_2 + cp_3 - ax - by - cz.$$

Or $-ax - by - cz = d$, puisque $M(x; y; z) \in \alpha$.

D'où: $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} = ap_1 + bp_2 + cp_3 + d$, et enfin

$$\delta(P; \alpha) = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

§ 22. ÉQUATION D'UNE SPHÈRE

Soit Σ la sphère de centre $C(\alpha; \beta; \gamma)$ et de rayon r .

Théorème

La sphère Σ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$$

Preuve

$$M(x; y; z) \in \Sigma \Leftrightarrow \|\overrightarrow{CM}\| = r \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \\ z - \gamma \end{pmatrix} \right\| = r \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2} = r \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2.$$

Remarque

On appelle *équation canonique* de Σ la relation $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$. En développant le premier membre de cette relation, on voit que toute équation d'une sphère peut s'écrire sous la forme

$$ax^2 + ay^2 + az^2 + bx + cy + dz + e = 0 \quad (a \neq 0)$$

Exemples

1) Equation de la sphère de centre $O(0; 0; 0)$ et de rayon 1 :

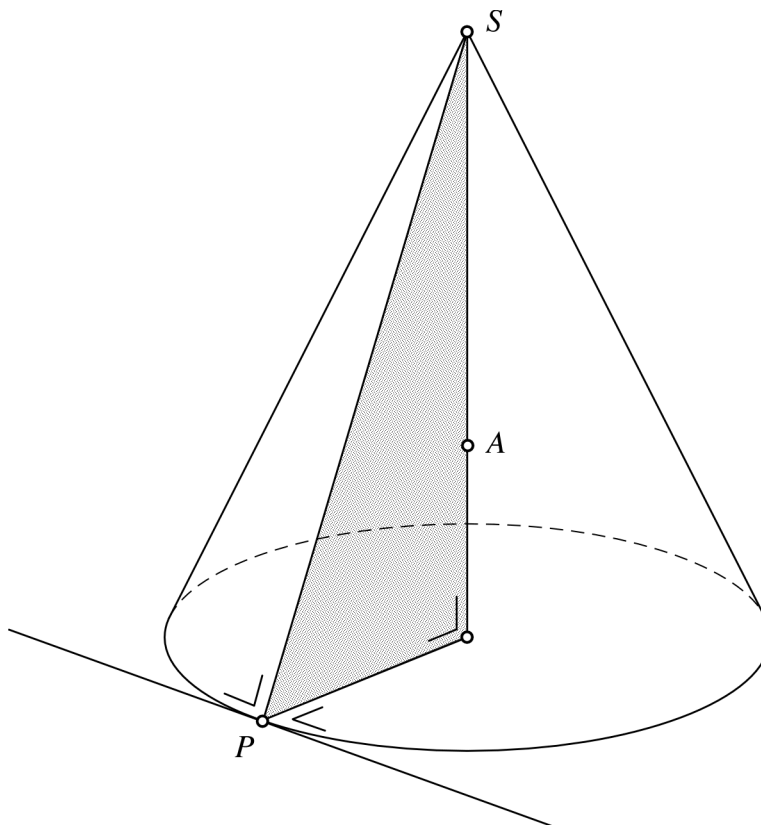
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

2) Equation de la sphère de centre $C(2; 5; -3)$ et de rayon 6 :

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 36$$

§ 23. PLAN TANGENT À UN CÔNE DE RÉVOLUTION

On cherche l'équation du plan tangent en P à un cône de révolution de sommet S et d'axe SA .



Le plan tangent au cône en P contient la droite SP et est perpendiculaire au plan SAP . Il admet donc les vecteurs directeurs $\overrightarrow{SP}$ et $\overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{SA}$ (et aussi $\overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{AP}$). On obtient alors un vecteur normal au plan tangent par un second produit vectoriel : $\overrightarrow{SP} \times (\overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{SA})$.

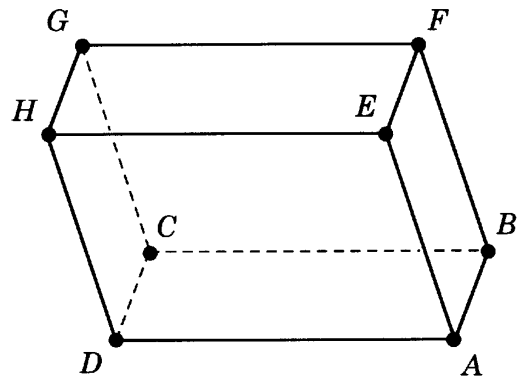
Exemple

Cf. exercice 421.

110. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

Exprimer plus simplement les vecteurs suivants :

- | | |
|--|--|
| 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$ | 2) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$ |
| 3) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$ | 4) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$ |
| 5) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$ | 6) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$ |



111. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-dessus. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{t} = \overrightarrow{AF}$.

- Exprimer, en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, les vecteurs suivants :
 $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EC}$.
- On appelle M le milieu de $[FG]$, N celui de $[HG]$ et P le centre du parallélogramme $ABCD$. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{FN}$, $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{PM}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
- On considère le point J de la face $BCGF$ tel que

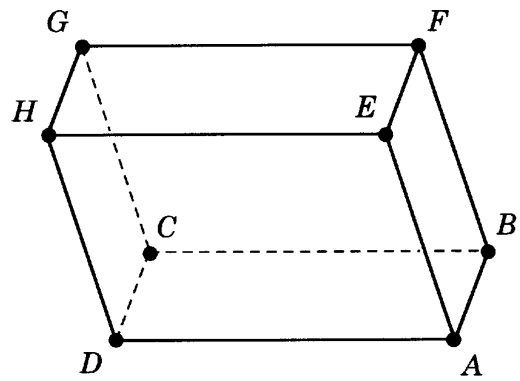
$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BF}.$$
 Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$.

112. Une pyramide de sommet S a pour base un parallélogramme $ABCD$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{SB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{SC}$. Exprimer chacun des vecteurs suivants comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$:
 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$.

113. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres.

- 1) $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DG}$
- 2) $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{CD}$
- 3) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$
- 4) $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{GH}$

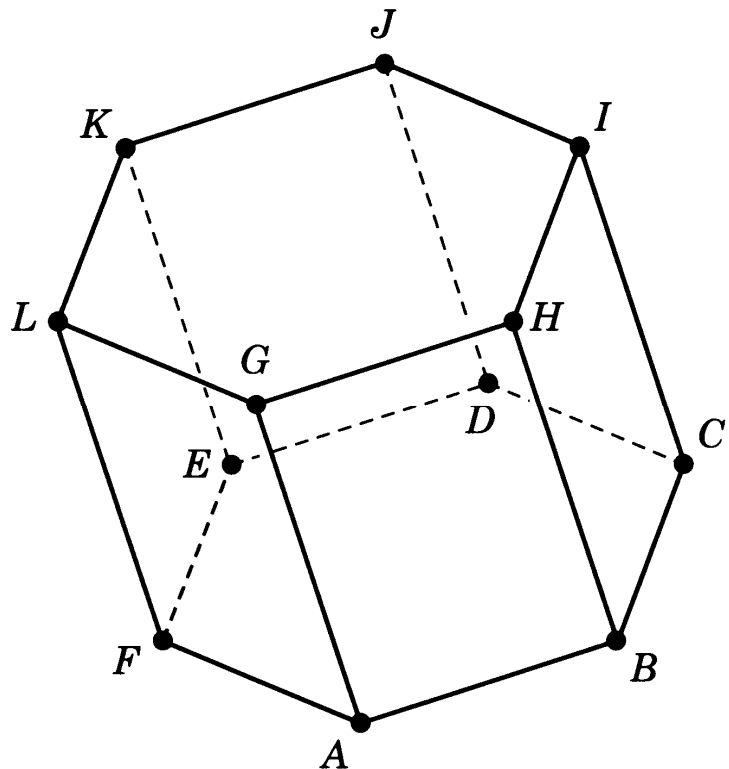


114.—

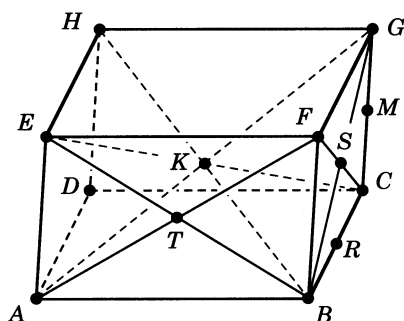
On considère un prisme $ABCDEFGH I J K L$ dont les bases sont des hexagones réguliers.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres.

- 1) $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{BC}$.
- 2) $\overrightarrow{LG}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{KB}$.
- 3) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{HI}$.



115. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ et les points K , M , R , S et T de la figure ci-dessous, M et R étant les milieux respectifs de CG et BC :



- 1) Donner, relativement à la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AK}$.
- 2) Même question relativement à la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{BR})$.

116. On donne les vecteurs suivants :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer les composantes de :

$$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{d}, \quad \vec{v} = -\vec{c} + 3\vec{f}, \quad \vec{w} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c} + 2\vec{d}, \quad t = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}.$$

- 2) Montrer que $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.

117. Relativement à une certaine base, on considère les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -3/2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ -25 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

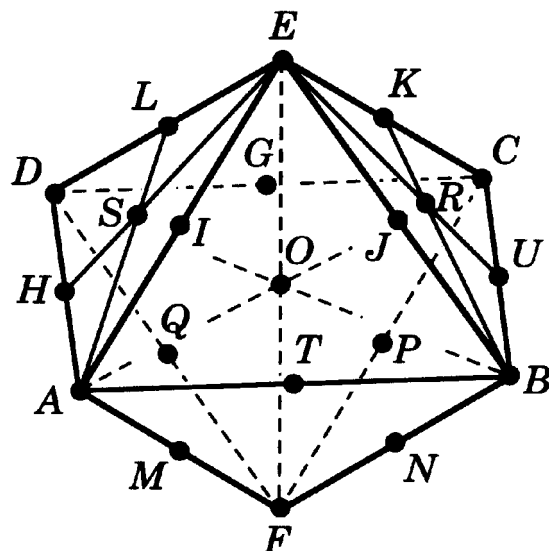
Déterminer, parmi ces vecteurs, ceux qui sont colinéaires.

119. Soit $ABCDEF$ un octaèdre régulier de centre O .

Les points $G, H, I, J, K, L, M, N, P, Q, R, T$ et U sont les milieux des arêtes.

Relativement au repère $(O; A; B; E)$, trouver les coordonnées des points suivants :

$A, B, C, D, E, F, G, H, I, O, R$ et S .



121.—

On donne trois points A, B et C . Calculer les coordonnées du sommet D du parallélogramme $ABCD$, celles des milieux M, N, P et Q des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$ respectivement, ainsi que celles des centres de gravité G_1 et G_2 respectifs des triangles ABC et CDA .

1) $A(-4; 1; 3), B(4; 3; 6), C(4; -6; 3)$.

2) $A(-1; 8; 2), B(4; 5; -1), C(2; 7; 1)$.

122.—

On donne deux sommets A et B d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection P de ses diagonales. Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D .

1) $A(3; -2; 5), B(7; 5; 10), P(5; 4; 6)$.

2) $A(5; 4; -4), B(9; 6; 3), P(6; -1; 0)$.

123.—

On donne les quatre points $A(3; -2; 1), B(1; 5; -2), C(0; -4; 5)$ et $D(-4; -8; 7)$. Calculer les coordonnées des milieux M, N, P et Q des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$ respectivement et montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

124.—

On donne les quatre points $M(0; 8; -2)$, $N(4; 2; 4)$, $P(-2; -1; 7)$ et $H(2; -3; 5)$.

- 1) Trouver les coordonnées des images M' et N' de M et de N par la symétrie centrale de centre P .
- 2) Trouver les coordonnées des images M'' et N'' de M et de N par l'homothétie de centre H et de rapport -2 .

125. On donne les deux points $A(12; -11; 18)$ et $B(-8; 7; -6)$. Calculer les coordonnées des points qui divisent le segment AB en quatre parties égales.

126. Les points M, N et P sont-ils alignés ?

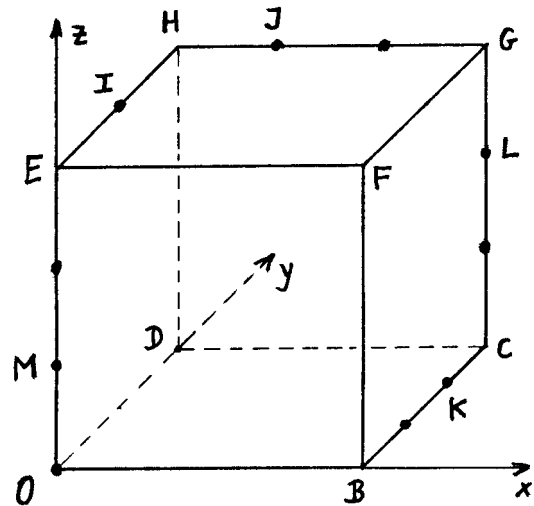
- | | | |
|---------------------------|----------------------------------|------------------------|
| 1) $M(3; 1; -1)$ | $N(2; 0; 4)$ | $P(-3; 2; 5)$ |
| 2) $M(2; -1; 0)$ | $N(1; 1; -2)$ | $P(4; -5; -11)$ |
| 3) $M(3; 1; \frac{1}{2})$ | $N(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ | $P(9; 4; \frac{1}{2})$ |

127. On considère le cube $OBCDEFGH$ défini par $O(0; 0; 0)$, $B(6; 0; 0)$, $D(0; 6; 0)$ et $E(0; 0; 6)$. Les points I, J, K, L et M sont donnés par :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}; \quad \overrightarrow{HJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}; \quad \overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC};$$

$$\overrightarrow{GL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GC}; \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OE}.$$

- a) Les droites IB et JK sont-elles parallèles ?
- b) Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle IJK .
- c) L'angle $\widehat{IJK}$ est-il droit ?
- d) Le quadrilatère $ILKM$ est-il un parallélogramme ?
- e) Trouver M' pour que $ILKM'$ soit un parallélogramme.

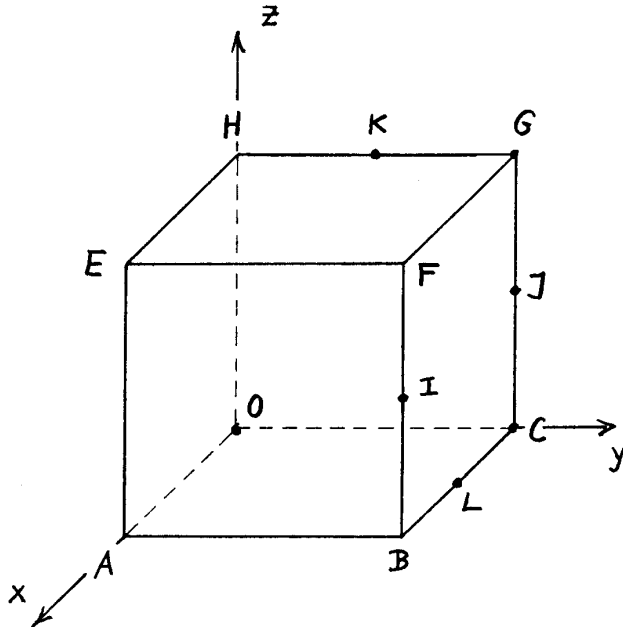


Rép. a) non b) $(\frac{8}{3}; \frac{13}{3}; 4)$ c) non d) non e) $M'(0; 1; 2)$

129.—

On donne les cinq points $A(2; -3; 0)$, $B(4; 2; 5)$, $C(-3; 1; 4)$, $D(5; 3; 12)$ et $E(-8; -22; -43)$. Déterminer les coordonnées des centres de gravité G_1 , G_2 et G_3 des triangles ABC , BCD et CDE respectivement et montrer que ces trois points sont alignés.

130.



Cube $ABCOEFGH$.

$O(0; 0; 0)$ $A(6; 0; 0)$

$C(0; 6; 0)$ $H(0; 0; 6)$

I, J, K, L milieux respectifs de BF, CG, HG, BC .

- L'angle $\widehat{BJH}$ est-il aigu, droit ou obtus ? Le calculer.
- Prouver que les droites AK et EL sont orthogonales.
- Déterminer M sur la droite AB de manière que l'angle $\widehat{HIM}$ soit droit.
- Trouver le point N de la droite AE équidistant de H et I .
- Calculer les côtés et les angles du triangle AHI .

Rép. a) $101,54^\circ$ c) $(6; \frac{9}{2}; 0)$ d) $(6; 0; \frac{9}{2})$
 e) côtés : $9; 3\sqrt{5}; 6\sqrt{2}$ / angles : $71,57^\circ; 45^\circ; 63,43^\circ$

131. Déterminer, dans les cas suivants, si les vecteurs donnés sont coplanaires.

- $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

210. On donne une droite d par la représentation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d ?

- | | | |
|--------------------|---|---|
| 1) $A(6; -10; -8)$ | 2) $B(3; 8; 9)$ | 3) $C(6; -1; 0)$ |
| 4) $D(-6; 35; 36)$ | 5) $E\left(\frac{17}{4}; \frac{17}{4}; \frac{25}{4}\right)$ | 6) $F\left(\frac{27}{5}; \frac{4}{5}; \frac{9}{5}\right)$ |

211.—

a) Déterminer l'équation paramétrique matricielle de la droite passant par $A(1; 2; 3)$ et de

vecteur directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Calculer les coordonnées des intersections de cette droite avec les plans de coordonnées Oyz , Oxz et Oxy .

212. Déterminer l'équation paramétrique matricielle de la droite passant par $A(0; 2; -1)$ et par $B(3; -1; 2)$.

213. On considère les droites $d_1 = (A_1; \vec{v}_1)$ et $d_2 = (A_2; \vec{v}_2)$, avec $A_1(3; -1; 2)$,

$A_2(2; 1; 5)$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Déterminer l'intersection des droites d_1 et d_2 .

214. Former l'équation paramétrique matricielle de la droite qui passe par $M(1; -1; 3)$ et qui est parallèle:

a) au vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) à la droite d'équation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) à la droite d'équation $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = 5t + 2 \end{cases}$.

215. On donne les sommets $A(3 ; 6 ; -7)$, $B(-5 ; 2 ; 3)$ et $C(4 ; -7 ; -2)$ d'un triangle. Trouver l'équation paramétrique matricielle de la médiane du triangle issue de C .

216. Calculer l'angle aigu déterminé par les droites d'équations:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

218. Montrer que les systèmes d'équations suivants déterminent la même droite:

$$(1) \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 9 - t \\ z = -1 + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

219. Donner les composantes d'un vecteur normal à chacun des plans suivants:

- a) $2x - y - 2z + 5 = 0$ b) $x + 5y - z = 0$ c) $3x - 2y - 7 = 0$
d) $5y - 3z = 0$ e) $x + 2 = 0$ f) $3y + 5 = 0$.

220. Déterminer les couples $(\alpha ; \beta)$ de plans parallèles:

- a) $\alpha : 3x - y - 2z = 5$ $\beta : 2x - 3y + 5z + 2 = 0$
b) $\alpha : 2x - 3y + 5z = 7$ $\beta : 2x - 3y + 5z + 3 = 0$
c) $\alpha : 4x + 2y - 4z = -5$ $\beta : 2x + y + 2z - 1 = 0$
d) $\alpha : x - 3y + 2 = 0$ $\beta : 2x - 6y - 7 = 0$
e) $\alpha : 6x - 4y + 2z = 8$ $\beta : 3x - 2y + z = 4$

221. Former l'équation du plan passant par l'origine et parallèle au plan d'équation $5x - 3y + 2z - 7 = 0$.

222.—

- a) Quelle est l'équation du plan α' parallèle au plan $\alpha : 2x - y + 5z = 7$ et passant par l'origine $O(0 ; 0 ; 0)$?
b) Quelle est l'équation du plan β' parallèle au plan $\beta : x - z = 4$ et passant par le point $A(2 ; 3 ; 5)$?

Rép. a) $2x - y + 5z = 0$ b) $x - z = -3$

223. Déterminer une équation paramétrique de la normale au plan d'équation $6x - 3y - 5z + 2 = 0$ issue du point $P(2; -3; -5)$.

224. Démontrer que la droite $d: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = -5 + 4t \end{cases}$ est parallèle au plan $\alpha: 4x - 3y - 6z = 5$.

225. Former l'équation du plan passant par $M(2; 1; -1)$ et normal au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

226. Déterminer l'équation d'un plan α sachant que le point $P(2; -1; -1)$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur α .

227. On donne les points $A(3; -1; 2)$ et $B(4; -2; -1)$. Déterminer l'équation du plan passant par A et perpendiculaire à la droite AB .

228. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite d et du plan α :

a) $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \alpha: 2x + 3y + z - 1 = 0$

b) $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \alpha: x - 2y + z - 15 = 0$

c) $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha: x + 2y - 2z + 6 = 0$

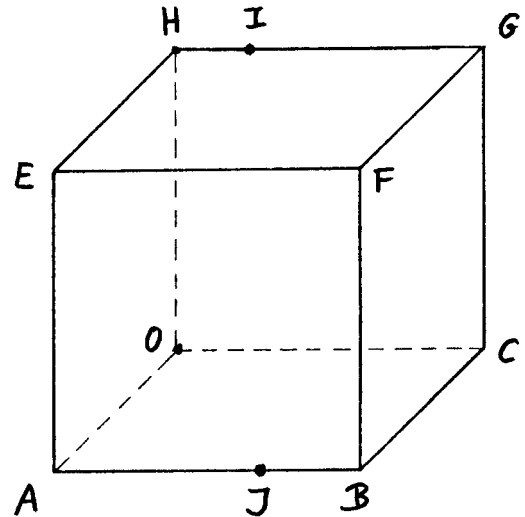
229. On donne un plan $\alpha: 2x + y - z = 1$ et un point $A(0; 3; 4)$.

- Donner l'équation paramétrique de la normale n à α passant par A .
- Déterminer le pied P ($= n \cap \alpha$) de la normale n .

Rép. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } P\left(\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; \frac{11}{3}\right)$

230. On donne un cube $OABCHEFG$ par les points $O(0; 0; 0)$, $A(12; 0; 0)$, $C(0; 12; 0)$ et $H(0; 0; 12)$. Soit encore $I(0; 3; 12)$, $J(12; 8; 0)$ et $K(0; 12; -1)$.

- Les droites EI et JK se coupent-elles?
- Déterminer l'intersection de la droite IJ avec les plans $\alpha(AOH)$ et $\beta(BCF)$.
- Calculer l'angle $\widehat{EIJ}$.
- Déterminer le point L de la droite OA tel que les droites FL et IJ soient concourantes.

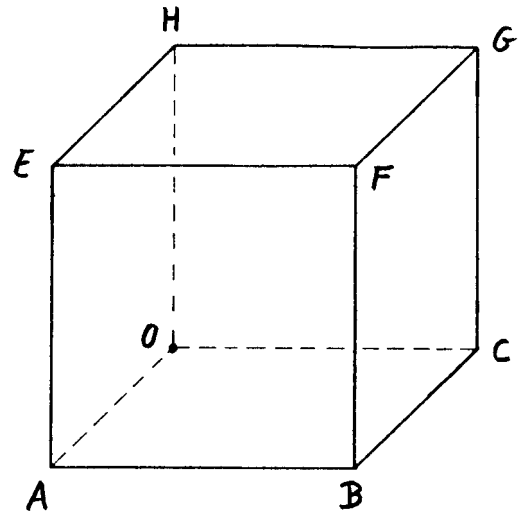


Rép. a) non b) $\left(-\frac{36}{5}; 0; \frac{96}{5}\right)$, $\left(\frac{108}{5}; 12; -\frac{48}{5}\right)$ c) $53,88^\circ$ d) $L\left(\frac{4}{3}; 0; 0\right)$

231. Cube $ABCOEFGH$.

$O(0; 0; 0)$ $A(4; 0; 0)$
 $C(0; 4; 0)$ $H(0; 0; 4)$

- Soit M le milieu de OH . Trouver les coordonnées du pied K de la hauteur issue de A dans le triangle AMC .
- N étant le milieu de AC , montrer que MN est la hauteur issue de M dans le triangle AMC , puis déterminer l'orthocentre R de ce triangle.



Rép. $K\left(0; \frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right)$, $R\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

232. Déterminer les couples $(\alpha; \beta)$ de plans perpendiculaires:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a) $\alpha: 3x - y - 2z = 5$ | $\beta: x + 9y - 3z + 2 = 0$ |
| b) $\alpha: 2x + 3y - z = 3$ | $\beta: x - y - z + 5 = 0$ |
| c) $\alpha: 2x - 5y + z = 0$ | $\beta: x + 2z + 8 = 0$ |

233. Déterminer l'angle des plans α et β :

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\alpha: x - \sqrt{2}y + z = 1$ | $\beta: x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$ |
| b) $\alpha: 3y - z = 0$ | $\beta: 2y + z = 0$ |
| c) $\alpha: 6x + 3y - 2z = 0$ | $\beta: x + 2y + 6z = 0$ |
| d) $\alpha: x + 2y + 2z = 3$ | $\beta: 16x + 12y - 15z = 1$ |

240. Déterminer une équation paramétrique de l'intersection des plans α et β :

- a) $\alpha : x - 2y - 2z = 0$; $\beta : 2x - 3y - 3z = 1$ b) $\alpha : 2x - y + z = 1$; $\beta : x + y - z = 2$
 c) $\alpha : x + 3y - z = 3$; $\beta : 2x + 6y - z = 1$ d) $\alpha : x + 5y - z = 1$; $\beta : x - y = 2$

Rép. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

241. Déterminer une équation paramétrique de chacune des droites suivantes, définie comme intersection de deux plans:

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 3x + 2y - 5z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

242. Calculer les coordonnées du point d'intersection des plans $\alpha : x - 2y + z - 7 = 0$, $\beta : 2x + y - z + 2 = 0$ et $\gamma : x - 3y + 2z - 11 = 0$.

243. Démontrer que les plans $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$ et $x + 2y + 3z - 1 = 0$ ont une droite commune dont on donnera l'équation.

244. Quel est le point de la droite d'équation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui est équidistant des points $P(3; 4; 0)$ et $Q(1; 4; 2)$?

245. On donne les points $A(-6; 9; 5)$, $B(2; 1; 1)$, $P(-3; 11; 13)$ et $Q(7; 6; 3)$. Calculer les coordonnées du point C de la droite PQ tel que le triangle ABC soit isocèle de sommet C .

246. Après avoir vérifié que les plans $\alpha : 2x - 4y - 4z = 24$ et $\beta : x - 2y - 2z + 6 = 0$ sont parallèles, calculer leur distance.

247. Calculer les coordonnées des extrémités du segment de perpendiculaire commune aux deux droites

$d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

248. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point $P(3; 1; -1)$ sur le plan $\alpha : x + 2y + 3z = 30$.

249. Calculer les coordonnées du symétrique de $P(0; -5; 5)$ relativement au plan $\alpha: x + 4y - 3z + 9 = 0$.

250. On considère la droite $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et le plan $\alpha: x - 2y + z = 3$. Déterminer une

équation paramétrique de la droite symétrique de d relativement à α .

251. Un rayon lumineux issu du point $P(4; 5; -1)$ se réfléchit sur un miroir plan d'équation $x + 3y - 2z - 7 = 0$. Le rayon réfléchi passe par le point $Q(-7; 8; -9)$. Calculer les coordonnées du point d'incidence.

300. Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$

On rappelle que $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC$.

Rép. a) 1 b) 5 c) 7 d) 0

301. Calculer les produits vectoriels suivants : (vérifier chaque fois que le vecteur obtenu est perpendiculaire aux deux autres à l'aide du produit scalaire.)

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Rép. a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

302. Déterminer l'équation (cartésienne) du plan passant par $A(3; 4; -5)$ et parallèle aux

vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Rép. $x + 4y + 7z = -16$

303. Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par les points $A(2; -1; 3)$ et

$B(3; 1; 2)$ et qui est parallèle au vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Rép. $9x - y + 7z = 40$

304. Déterminer l'équation paramétrique de la droite d qui passe par le point $A(4; -7; 5)$ et

qui coupe les droites $d_1: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = 1 - s \end{cases}$ et $d_2: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

305. On donne les quatre points $A(1; 1; 2)$, $B(-2; 0; 3)$, $C(3; -1; -2)$ et $D(0; 3; 3)$. Calculer les coordonnées du point appartenant à la normale par A du plan ABC et équidistant des points C et D .

306. Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs quelconques. Développer $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2$, puis $\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$. En déduire l'identité de Lagrange utilisée au § 16.3.

314. On donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer les produits vectoriels : $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$, $(2\vec{a}) \times (-3\vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.
- 2) Le produit vectoriel est-il associatif ?
- 3) Calculer les produits mixtes : $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$, $[\vec{a}; \vec{c}; \vec{b}]$, $[\vec{a}; \vec{c}; \vec{a}]$, $[\vec{a} + \vec{b}; \vec{b} + \vec{c}; \vec{c}]$, $[2\vec{a}; -3\vec{b}; \frac{1}{2}\vec{c}]$, $[\vec{a} \times \vec{b}; 3\vec{a}; \vec{b} \times \vec{c}]$, $[(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}; \vec{b} \times \vec{a}; \vec{a} \times \vec{c}]$.

Rép. 1) $\begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 72 \\ 24 \\ -48 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -36 \\ 52 \\ -28 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 40 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) non 3) $44; -44; 0; 44; -132; -792; -1936$

315. Déterminer l'équation du plan passant par les points $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$ et $C(2; 0; 2)$. Rép. $3x + 3y + z = 8$

316. Déterminer l'équation du plan qui passe par $A(2; -1; 1)$ et qui est perpendiculaire aux plans d'équation $2x - z + 1 = 0$ et $y = 0$.

Rép. $x + 2z = 4$

317. Déterminer l'équation du plan qui passe par $A(1; -1; 2)$, par $B(3; 1; 1)$ et qui est perpendiculaire au plan $\alpha: x - 2y + 3z = 5$.

Rép. $4x - 7y - 6z = -1$

318. Former l'équation du plan qui passe par $M(1; 2; -3)$ et qui est parallèle aux droites

$$d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

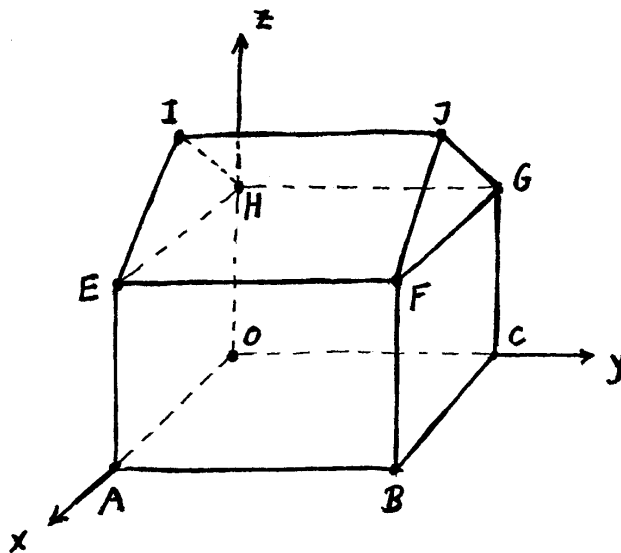
Rép. $9x + 11y + 5z = 16$

319. Déterminer l'équation du plan contenant le point $M(2; -2; 1)$ et la droite

$$d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Rép. $4x + 6y + 5z = 1$

320.—



$O(0; 0; 0)$

$A(2; 0; 0)$

$C(0; 4; 0)$

$H(0; 0; 2)$

$I(1; 0; 3)$

$J(1; 4; 3)$

- Déterminer l'équation du plan $\alpha(IEG)$ et l'intersection de ce plan avec l'axe Oy .
- Les plans IEF et IHG sont-ils perpendiculaires?
- Trouver les coordonnées du point d'intersection K du plan $\beta(HIJ)$ avec la droite AF .
- Trouver les coordonnées du pied P de la perpendiculaire abaissée de B sur la droite EJ .

Rép. a) $y + 4z = 12$; $(0; 12; 0)$ b) oui c) $(2; 8; 4)$ d) $\left(\frac{11}{9}; \frac{28}{9}; \frac{25}{9}\right)$

321. Vérifier que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme et calculer son aire.

- $A(2; 1; -2)$, $B(2; 3; 0)$, $C(6; 6; 5)$, $D(6; 4; 3)$
- $A(5; -1; 7)$, $B(-3; 11; -1)$, $C(-7; 14; -7)$, $D(1; 2; 1)$

Rép. 1) 12 2) 56

322. Calculer l'aire du triangle ABC .

- 1) $A(3; -2; 3)$, $B(4; 0; 3)$, $C(6; 0; -3)$
- 2) $A(-1; 2; -5)$, $B(5; 4; 0)$, $C(11; 8; 3)$

Rép. 1) 7 2) 11

323. Au moyen du produit mixte, déterminer si les points A, B, C et D sont coplanaires.

- a) $A(0; 0; 0)$, $B(8; -2; 4)$, $C(-3; 1; -2)$, $D(10; -3; 6)$
- b) $A(7; 1; -3)$, $B(8; 2; -2)$, $C(4; 4; 4)$, $D(10; 1; -5)$
- c) $A(0; 3; -2)$, $B(1; 2; 2)$, $C(-3; 1; 5)$, $D(12; -3; 5)$
- d) $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{5}{4}; -1; \frac{5}{4}\right)$, $D\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{10}; -\frac{1}{10}\right)$

Rép. 1) oui 2) oui 3) non 4) oui

324. Vérifier que le polyèdre $ABCDEFGH$ est un parallélépipède de base $ABCD$ puis calculer son volume.

- 1) $A(-1; -1; 7)$, $B(-2; 1; 6)$, $C(0; 1; 6)$, $D(1; -1; 7)$
 $E(2; -2; 3)$, $F(1; 0; 2)$, $G(3; 0; 2)$, $H(4; -2; 3)$
- 2) $A(1; 0; 3)$, $B(-1; 4; 2)$, $C(-2; 2; -3)$, $D(0; -2; -2)$
 $E(4; -2; 0)$, $F(2; 2; -1)$, $G(1; 0; -6)$, $H(3; -4; -5)$

Rép. a) 18 b) 72

325. On considère le tétraèdre dont les sommets sont les points $A(2; 1; 0)$, $B(1; 1; 3)$, $C(4; -2; 6)$ et $D(2; -3; 0)$.

- a) Déterminer l'équation du plan ABC et celle de la hauteur issue de D .
- b) Déterminer le pied E de cette hauteur.
- c) Calculer l'aire de la face ABC , la longueur de la hauteur DE et le volume du tétraèdre.

326. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

- a) $A(2; 1; 0)$, $B(1; 1; 3)$, $C(4; -2; 6)$, $D(2; -3; 0)$
- b) $A(0; 2; 3)$, $B(-2; 2; -1)$, $C(4; -2; 2)$, $D(3; 6; 0)$
- c) $A(8; 3; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 1; 1)$, $D(0; 0; 0)$

Rép. a) 8 b) 24 c) $\frac{1}{6}$

327. Calculer l'aire du triangle dont les sommets sont $A(1; -1; 3)$, $B(2; 1; 3)$ et $C(4; 1; -3)$. Rép. 7

328. Un plan α passe par $C(2; 1; 0)$ et a pour vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de $P(2; -1; 5)$ au plan α . *Rép.* $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

329. Déterminer une équation paramétrique de la projection orthogonale de la droite d'équation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ sur le plan d'équation cartésienne $x - 2y + z = 1$.

330. Une droite d est donnée par un point A et un vecteur directeur $\vec{d}$. Calculer la distance du point P à la droite d .

1) $A(1; -1; 2)$; $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P(1; 2; 2)$ 2) $A(1; 0; 0)$; $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $P(3; 1; 4)$

331. On considère le triangle de sommets $O(0; 0; 0)$, $A(2; -2; 3)$ et $B(2; 4; 6)$.

- 1) Trouver le point d'intersection H des hauteurs du triangle OAB et calculer la longueur de ces hauteurs.
- 2) Déterminer le centre C et le rayon r du cercle circonscrit à ce triangle.

Rép. $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$; $h_A = \frac{3}{2}\sqrt{6}$; $h_B = \frac{6}{17}\sqrt{357}$; $h_O = \frac{2}{5}\sqrt{105}$; $C\left(\frac{7}{6}; \frac{5}{3}; \frac{19}{6}\right)$; $r = \frac{1}{6}\sqrt{510}$

332. Déterminer l'équation cartésienne du plan :

1) qui passe par $P(3; 4; 1)$ et a pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2) qui passe par $P(-2; 6; 7)$ et a pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) qui passe par $P(-6; 10; 16)$ et est perpendiculaire à la droite $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

4) qui passe par $P(3; 1; 1)$ et est perpendiculaire à la droite $AB: A(1; 0; 5), B(3; -3; 8)$.

5) qui passe par $P(1; -2; 4)$ et est parallèle au plan $\alpha: 5x + 2y - z + 5 = 0$.

6) qui passe par O et $P(1; 1; 1)$ et est perpendiculaire au plan $\beta: x - y + z = 0$.

7) qui passe par $P(-1; -2; 0)$ et $Q(1; 1; 2)$ et est perpendiculaire au plan $x + 2y + 2z = 4$.

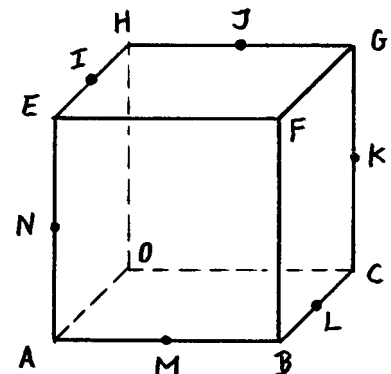
Rép. 1) $5x - 2y + 5z = 12$ 2) $y = 6$ 3) $2x - y - 2z + 54 = 0$ 4) $2x - 3y + 3z = 6$
 5) $5x + 2y - z = -3$ 6) $x - z = 0$ 7) $2x - 2y + z = 2$

333. Cube $ABCOEFGH$ défini par :

$O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $H(0; 0; 2)$.

I, J, K, L, M et N sont les milieux de leurs arêtes.

Déterminer l'équation du plan $\alpha(IJK)$ et montrer que les trois points L, M et N appartiennent à α . Dessiner l'intersection du plan α avec le cube.



334. On donne les équations de deux plans α et β . Déterminer si ces plans sont sécants, strictement parallèles ou confondus.

1) $\alpha: x - \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}z + 1 = 0$	$\beta: -12x + 8y - 10z - 9 = 0$
2) $\alpha: 2x - 8y + 4z - 7 = 0$	$\beta: x - 4y - z + 3 = 0$
3) $\alpha: -\frac{1}{5}x + y - \frac{3}{5}z + 9 = 0$	$\beta: \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y + z - 15 = 0$
4) $\alpha: 3x - 8 = 0$	$\beta: x + 3 = 0$
5) $\alpha: z - 2 = 0$	$\beta: 4y - 5 = 0$
6) $\alpha: 6x + 3z - 4 = 0$	$\beta: 2x + z + 1 = 0$

Rép. 1) str. parallèles 2) sécants 3) confondus
 4) str. parallèles 5) sécants 6) str. parallèles

335.—

- 1) Trouver l'équation du plan donné par le point $A(2; -3; 4)$ et les vecteurs directeurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- 2) Trouver l'équation du plan donné par le point $A(4; \frac{1}{2}; -8)$ et les vecteurs directeurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- 3) Trouver l'équation du plan donné par les points $A(3; 0; 6)$, $B(6; -6; -4)$ et $C(-2; -4; 4)$.

Rép. 1) $27x + 8y + 6z = 54$ 2) $6y + 2z + 13 = 0$ 3) $14x - 28y + 21z = 168$

336. Soit la droite d de représentation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du point P de d équidistant des points $A(3; 4; 0)$ et $B(1; 4; 2)$. *Rép.* $P(1; -4; 0)$

337. Déterminer une représentation paramétrique de la droite

- 1) passant par $P(2; 3; 5)$ et perpendiculaire au plan d'équation $3x - 2y + z = 0$.
- 2) passant par $P(-8; 10; -12)$ et perpendiculaire au plan d'équation $z + 4 = 0$.
- 3) passant par $P(5; 8; -4)$ et perpendiculaire au plan ABC : $A(2; -7; 0)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(5; 2; -3)$.
- 4) passant par $P(1; 0; 3)$ et orthogonale aux droites g et h :

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 5) passant par $P(8; -4; 2)$ et parallèle à la droite d'intersection des plans $\alpha: 3x - y + z = 0$ et $\beta: x - y + z = 0$.

Rép. 1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

339. Au moyen du produit vectoriel, trouver un vecteur directeur de l'intersection des plans α et β :

a) $\alpha : 2x - y = 17$; $\beta : x - y + 2z = 3$

b) $\alpha : x - y + 4z = 1$; $\beta : x - 2y = 0$

Rép. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

340. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans α et β :

1) $\alpha : x + y + z = 0$

$\beta : x - y + 2z = 6$

2) $\alpha : x - 3y + 2z + 6 = 0$

$\beta : 2x + 5y - z - 9 = 0$

3) $\alpha : 6x - 4y - 5z = 8$

$\beta : x + 5y + 2z = 7$

Rép. 1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/11 \\ 21/11 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

341.—

1) Déterminer l'équation du plan passant par O et perpendiculaire aux plans $\alpha : 3x - 2y + 5z = 0$ et $\beta : x - y - z = 0$.

2) Déterminer l'équation du plan passant par $P(2; -1; 1)$ et perpendiculaire aux plans $\alpha : 3x + 2y - z + 4 = 0$ et $\beta : x + y + z = 3$.

Rép. 1) $7x + 8y - z = 0$

2) $3x - 4y + z = 11$

342. Déterminer une représentation paramétrique de la droite n passant par le point

$P(8; -4; 4)$ et perpendiculaire à la droite $d : \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 - k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$.

343. On considère les quatre points $A(3; -1; -2)$, $B(-2; 0; 3)$, $C(1; 1; 2)$ et $D(0; 3; 3)$. Trouver les coordonnées du point M équidistant des points C et D et dont la projection orthogonale sur le plan ABC est le centre de gravité G du triangle ABC .

344. Trouver les coordonnées de la projection orthogonale du point $P(3; 1; -1)$ sur le plan α d'équation $x + 2y + 3z = 30$. Rép. $(5; 5; 5)$

345. Calculer la distance du point P au plan α dans les cas suivants :

- 1) $P(-8; 7; 0)$ $\alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0$
- 2) $P(5; 3; -12)$ $\alpha : 13x + 16y - 4z + 7 = 0$
- 3) $P(15; -2; 5)$ $\alpha : 3x - 2y + z - 12 = 0$
- 4) $P(0; 0; 0)$ $\alpha : x + y + z - \sqrt{3} = 0$
- 5) $P(6; 1; -2)$ $\alpha = \text{plan } ABC : A(3; 2; 1) , B(-1; -1; 4) , C(-5; 0; -5)$

Rép. 1) 8 2) 8 3) $3\sqrt{14}$ 4) 1 5) 3

346. On donne deux droites gauches a et b . Déterminer les coordonnées du point A de a et du point B de b tels que la droite AB soit la perpendiculaire commune à a et à b . En déduire la plus courte distance entre les droites a et b .

- 1) $a : \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = -4 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$ $b : \begin{cases} x = 3 - 6n \\ y = -1 + n \\ z = 4 + 2n \end{cases}$
- 2) $a : \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -k \\ z = 2 + k \end{cases}$ $b : \begin{cases} x = 2 + n \\ y = 1 + 2n \\ z = 2 + n \end{cases}$

347. Calculer les longueurs des hauteurs du tétraèdre de sommets $A(2; 4; 6)$, $B(-4; -4; 4)$, $C(5; 0; 3)$ et $D(-1; 7; 5)$.

Rép. $h_A = \frac{4}{3}\sqrt{2}$; $h_B = \frac{84}{161}\sqrt{322}$; $h_C = \frac{6}{5}\sqrt{10}$; $h_D = 3$

348. Déterminer les équations des plans situés à une distance 6 du plan $\alpha : 9x + 2y - 6z = 8$.

Rép. $9x + 2y - 6z + 58 = 0$; $9x + 2y - 6z - 74 = 0$

349. On donne les plans $\alpha : x - 2y + 2z + 4 = 0$, $\beta : 2x + 3y - 6z - 5 = 0$ et $\gamma : 12x + 2y + 5z = 0$. Déterminer les coordonnées des points situés sur la perpendiculaire n issue du point $P(13; 4; 9)$ au plan γ et équidistants des plans α et β .

Rép. $(-11; 0; -1)$ et $(1; 2; 4)$

350. On considère la sphère Σ de centre O et de rayon 9, ainsi que les points $T\left(\frac{27}{5}; \frac{36}{5}; 0\right)$ et $S\left(\frac{27}{5}; \frac{36}{5}; \frac{108}{5}\right)$.

- a) Montrer que T est sur la sphère Σ et que la droite ST est tangente à Σ .
- b) Soit Ω le cône formé par les tangentes à Σ issues du point S , et soit Γ le cercle de contact de Ω et Σ . Déterminer l'équation du plan du cercle Γ ainsi que le centre C de celui-ci.

Rép. b) $3x + 4y + 12z = 45$; $\frac{45}{169}(3; 4; 12)$

410.—

Que représentent les équations ci-dessous ? Dans les cas où il s'agit d'une sphère, on en donnera le centre C et le rayon r .

- 1) $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$
- 2) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y - 4z + 22 = 0$
- 3) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$
- 4) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 14y - 8z + 69 = 0$
- 5) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 108x + 96y - 144z + 109 = 0$.

411. Déterminer l'équation de la sphère :

- 1) de centre $C(0; 2; -4)$ et de rayon 5 ;
- 2) de centre $C(1; -2; 4)$ et passant par le point $P(3; 2; -1)$;
- 3) de diamètre AB , avec $A(-1; 0; 5)$ et $B(7; 4; -7)$;
- 4) passant par les points $A(4; 2; -3)$ et $B(-1; 3; 1)$ et ayant son centre sur la droite de représentation paramétrique
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ;$$
- 5) centrée à l'origine et tangente à la droite de représentation paramétrique
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ;$$
- 6) de centre $C(4; 1; -5)$ et tangente au plan d'équation $x + 2y + 2z - 4 = 0$;
- 7) passant par les points $M(0; 3; -4)$, $N(2; 2; -3)$ et $P(10; 1; -8)$ et de rayon $5\sqrt{2}$;
- 8) passant par les points $R(-2; 2; 3)$, $S(0; 4; 1)$ et $T(-5; 5; -1)$ et ayant son centre sur le plan d'équation $x + 3y - 2z - 7 = 0$;

412. Déterminer l'équation de la sphère :

- a) passant par les points $E(5; 7; -2)$, $F(3; 1; 0)$, $G(-5; 12; 3)$ et $H(-3; -2; -1)$;
- b) passant par les points $M(8; 8; 9)$, $N(-1; -1; 9)$ et $P(11; 5; 9)$ et tangente au plan Oxy .

413.—

Déterminer les coordonnées des points d'intersection d'une sphère Σ et d'une droite d dans chacun des cas suivants :

$$1) \quad \Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0 \quad d : \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 6 - 2k \\ z = -4 + k \end{cases}$$

$$2) \quad \Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z - 9 = 0 \quad d : \begin{cases} x = -2 - k \\ y = 4 + k \\ z = 4 + k \end{cases}$$

$$3) \quad \Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y + 1 = 0 \quad d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$$

414.—

Le système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$$

détermine un cercle. Calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.

415.—

Former l'équation de la sphère contenant les deux cercles Γ_1 et Γ_2 donnés par les systèmes d'équations :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x^2 + z^2 = 25 \\ y = 2 \end{cases}, \quad \Gamma_2 : \begin{cases} x^2 + z^2 = 16 \\ y = 3 \end{cases}.$$

416. Trouver les équations des plans tangents à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y - 2z - 48 = 0$ en ses points d'intersection avec l'axe Ox .

417.—

On donne une sphère Σ et un plan α . Déterminer les équations des plans parallèles à α et tangents à Σ , ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ .

- 1) $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 216$
 $\alpha : 7x - 2y - z = 0$
- 2) $\Sigma : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 169$
 $\alpha : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$
- 3) $\Sigma : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 8y + 2z - 87 = 0$
 $\alpha : x - y - z + 11 = 0$

418.—

On considère la droite d d'équations $\begin{cases} 8x - 11y + 8z = 30 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ et la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$.

Déterminer les équations des plans contenant la droite d et tangents à la sphère Σ .

419.—

On considère les points $A(5; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(1; 1; \frac{\sqrt{17}}{2})$ et le cercle Γ donné par les équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{25}{4} \\ z = 0 \end{cases}.$$

- 1) Trouver l'équation de la sphère Σ qui passe par le point C et qui contient le cercle Γ .
- 2) Trouver les équations des plans tangents à la sphère Σ et contenant la droite (AB) .

420. Un tétraèdre $ABCD$ a un volume égal à 1. Ses trois premiers sommets sont $A(3; 4; 5)$, $B(1; 2; 1)$ et $C(-1; 6; 2)$. Quel est le quatrième sommet D , sachant qu'il appartient à la droite

$$d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

421. On donne les points $A(1; -4; -5)$, $S(11; -2; -1)$ et $T(-1; 6; -1)$, et l'on considère le cône K de sommet S engendré par la rotation de la droite ST autour de la droite SA . Trouver l'équation du plan tangent en T au cône K .

422. Relativement à un repère orthonormé $Oxyz$, on donne les points $S(6; 7; 10)$, $A(6; 12; 0)$ et $C(6; 7; 0)$. Soit (K) le cône engendré par la rotation du triangle rectangle SAC autour de la verticale SC .

- Déterminer l'équation du plan α tangent au cône (K) en A .
- Un plan β est tangent à (K) et passe par $N(4; -4; 0)$. Déterminer une équation de la droite d'intersection t du plan β avec le plan Oxy .

423. Le cercle directeur Γ d'un cône circulaire droit Ω est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

- Donner une équations paramétriques de l'axe a du cône Ω .
- L'angle formé par l'axe a et les génératrices du cône est de 45° . Déterminer les coordonnées du sommet S du cône dont la troisième coordonnée est la plus petite.
- Déterminer des équations paramétriques des génératrices du cône Ω qui forment avec l'axe Oz un angle φ tel que $\cos \varphi = 1/\sqrt{6}$.
- Donner l'équation du plan tangent au cône Ω passant par le point $A(2 + \sqrt{6}; 2 - \sqrt{6}; 2)$ du cercle Γ .

Réponses

110. 1) $\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{AH}$ 3) $\overrightarrow{HA}$ 4) $\overrightarrow{EA}$ 5) $\overrightarrow{AC}$ 6) $\overrightarrow{AE}$
111. 1) $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$; $\overrightarrow{DH} = \vec{w}$; $\overrightarrow{BF} = \vec{w}$; $\overrightarrow{BH} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
 $\overrightarrow{EG} = \vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{EC} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$
- 2) $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$; $\overrightarrow{EM} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$; $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$; $\overrightarrow{FN} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$;
 $\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$; $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}$
- 3) $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{t}$
112. $\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{w}$; $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{BC} = -\vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{AD} = -\vec{v} + \vec{w}$;
 $\overrightarrow{BD} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$
113. 1) copl. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GH}$ 2) non copl.
3) copl. $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{AB}$ 4) copl. $\overrightarrow{GH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$
114. 1) copl. $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{EK} + 2\overrightarrow{BC}$ 2) copl. $\overrightarrow{KB} = 3\overrightarrow{LG} + \overrightarrow{ID}$
3) non copl.
115. 1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
 $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
- 2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
 $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$
117. $\vec{a} \sim \vec{e} \sim \vec{g}$; $\vec{b} \sim \vec{f}$; $\vec{d} = \vec{0}$ est colinéaire à tous
119. 1) $A(1; 0; 0)$; $B(0; 1; 0)$; $C(-1; 0; 0)$; $D(0; -1; 0)$; $E(0; 0; 1)$; $F(0; 0; -1)$
 $G(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0)$; $H(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0)$; $I(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$; $O(0; 0; 0)$; $R(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$;
 $S(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$
- 2) $A(0; 0; 0)$; $B(1; 0; 0)$; $C(1; 1; 0)$; $D(0; 1; 0)$; $E(0; 0; 1)$; $F(1; 1; -1)$
 $G(\frac{1}{2}; 1; 0)$; $H(0; \frac{1}{2}; 0)$; $I(0; 0; \frac{1}{2})$; $O(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$; $R(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$;
 $S(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

Réponses

121. 1) $D(-4; -8; 0)$; $M(0; 2; \frac{9}{2})$; $N(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2})$; $P(0; -7; \frac{3}{2})$; $Q(-4; -\frac{7}{2}; \frac{3}{2})$;
 $G_1(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; 4)$; $G_2(-\frac{4}{3}; -\frac{13}{3}; 2)$

122. 1) $C(7; 10; 7)$, $D(3; 3; 2)$ 2) $C(7; -6; 4)$, $D(3; -8; -3)$

123. $M(2; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$, $P(-2; -6; 6)$, $Q(-\frac{1}{2}; -5; 4)$

124. $M'(-4; -10; 16)$, $N'(-8; -4; 10)$, $M''(6; -25; 19)$, $N''(-2; -13; 7)$

125. $(7; -\frac{13}{2}; 12)$, $(2; -2; 6)$, $(-3; \frac{5}{2}; 0)$

126. 1) non 2) non 3) oui 4) non 5) oui

129. $G_1(1; 0; 3)$, $G_2(2; 2; 7)$, $G_3(-2; -6; -9)$

210. $A \notin d$; $B \in d$; $C \in d$; $D \in d$; $E \notin d$; $F \in d$

211. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; 0)$, $(0; 5; 5)$, $(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3})$

212. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 213. (...) $d_1 \cap d_2 : (3; -1; 2)$

214. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

215. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$ 216. 60°

217. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ 11 \end{pmatrix}$

219. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Réponses

220. a) sécants b) str. parallèles c) sécants d) str. parallèles e) confondus
221. $5x - 3y + 2z = 0$ 222. a) $2x - y + 5z = 0$ b) $x - z = -3$
223. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ 225. $x - 2y + 3z + 3 = 0$
226. $2x - y - z = 6$ 227. $x - y - 3z = -2$
228. a) $(2; -3; 6)$ b) $\emptyset$ c) $d \subset \alpha$
232. a) $\alpha \perp \beta$ b) $\alpha \perp \beta$ c) non $(\alpha \perp \beta)$
233. a) 120° b) 45° c) 90° d) $82,34^\circ$
235. $(1; -2; 2)$
241. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ -13 \end{pmatrix}$
242. $(1; -2; 2)$ 243. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$
244. $(1; -4; 0)$ 245. $C(3; 8; 7)$
246. $\delta(\alpha; \beta) = 6$ 248. $(5; 5; 5)$
249. $(2; 3; -1)$ 250. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$
251. $(-1; 2; -1)$ 304. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ 11 \end{pmatrix}$
305. $P(4; -4; 6)$
325. a) $3x + 4y + z = 10$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $E\left(\frac{50}{13}; \frac{-7}{13}; \frac{8}{13}\right)$ c) $\frac{3}{2}\sqrt{26}$; $\frac{8}{13}\sqrt{26}$; 8
329. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ 330. 1) $\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{21}$
333. $\alpha : x + y + z = 3$ 342. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
343. $M\left(-\frac{33}{27}; \frac{85}{27}; -\frac{41}{27}\right)$ 344. $(5; 5; 5)$
346. $A\left(\frac{162}{5}; \frac{-53}{5}; \frac{-28}{5}\right)$, $B\left(\frac{177}{5}; \frac{-32}{5}; \frac{-34}{5}\right)$, $\|\overline{AB}\| = \frac{3}{5}\sqrt{78}$

Réponses

410. 1) sphère de centre $(2; 0; -1)$ et de rayon 3
 2) sphère de centre $(-3; 5; 2)$ et de rayon 4
 3) $\emptyset$
 4) point $(-2; 7; 4)$
 5) sphère de centre $(\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}; 2)$ et de rayon $\sqrt{5}$
411. 1) $x^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 25$ 2) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 45$
 3) $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 56$ 4) $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 45$
 5) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{175}{3}$ 6) $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = \frac{64}{9}$
 7) $(x-5)^2 + (y-6)^2 + (z+8)^2 = 50$ et $(x-\frac{35}{11})^2 + (y-\frac{6}{11})^2 + (z+\frac{108}{11})^2 = 50$
 8) $(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 9$
412. a) $(x+3)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 65$ b) $(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-7)^2 = 49$
413. 1) $(1; 2; -2)$ et $(3; 0; -1)$ 414. $C(-1; 2; 3)$, $r = 8$
 2) $(1; 1; 1)$ et $(3; -1; -1)$
 3) $(1; 0; -1)$ et $(1; \frac{3}{5}; \frac{1}{5})$
415. $x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 41$ 416. $8x - y - z = 32$ et $8x + y + z = -96$
417. 1) points de contact : $(14; -4; -2)$ et $(-14; 4; 2)$
 plans : $7x - 2y - z = 108$ et $7x - 2y - z = -108$
 2) points de contact : $(-9; -3; -3)$ et $(15; 5; 3)$
 plans : $12x + 4y + 3z = -129$ et $12x + 4y + 3z = 209$
 3) points de contact : $(\frac{9}{2}; -6; -\frac{9}{2})$ et $(-\frac{7}{2}; 2; \frac{7}{2})$
 plans : $x - y - z = 15$ et $x - y - z = -9$
418. points de contact : $(2; -1; 0)$ et $(1; 0; 2)$
 plans : $3x - 4y + 2z = 10$ et $2x - 3y + 4z = 10$
419. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{25}{4}$ 2) $x + y \pm \sqrt{2}z = 5$
420. $(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 2)$ ou $(\frac{19}{10}; \frac{11}{10}; \frac{4}{5})$ 421. $2x + 3y + 2z = 14$
422. a) $2y + z = 24$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}$
423. 1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2) $S = O(0; 0; 0)$ 3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2-\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$
 4) $(3-\sqrt{6})x - (3+\sqrt{6})y - \sqrt{6}z = 0$