

Géométrie analytique plane

1.

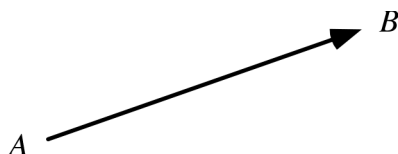
TABLE DES MATIÈRES

Flèches	1
Notion de vecteur	2
Opérations sur les vecteurs	3
Combinaisons linéaires. Bases	4
Opérations sur les composantes	5
Vecteurs colinéaires	6
Repère. Coordonnées	7
Relation de Chasles	8
Milieu d'un segment	9
Centre de gravité d'un triangle	10
Norme d'un vecteur	11
Produit scalaire	12
Faire tourner un vecteur de 90°	13
Expression trigonométrique du produit scalaire	14
Pente d'une droite	15
Equation d'une droite, première forme	16
Equation d'une droite, deuxième forme	17
Equation d'une droite donnée par pente et point	18
Pentes de deux droites perpendiculaires	19
Parallèles et perpendiculaires	20
Vecteur normal d'une droite	21
Médiatrice d'un segment	22
Lignes principales du triangle	23

EXERCICES

§ 1. FLÈCHES

A et B étant deux points du plan, appelons *flèche* d'origine A et d'extrémité B le couple (A, B) .



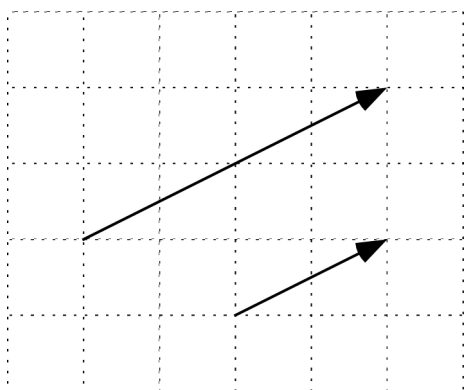
Si les points A et B sont confondus, on parle de flèche *nulle*.

Direction

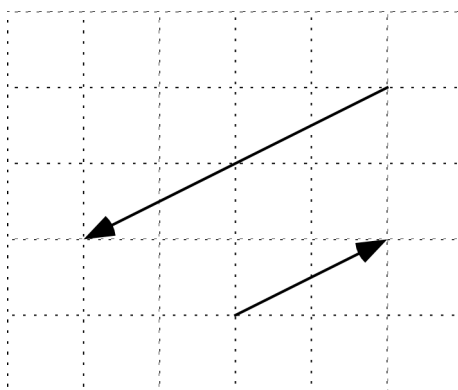
Deux flèches non nulles sont dites *de même direction* si les droites que chacune détermine sont parallèles ou confondues.

Sens

Deux flèches de même direction peuvent être *de même sens* ou *de sens contraires* :



même sens



sens contraires

Longueur

La longueur d'une flèche est la distance entre son origine et son extrémité.

Equipollence

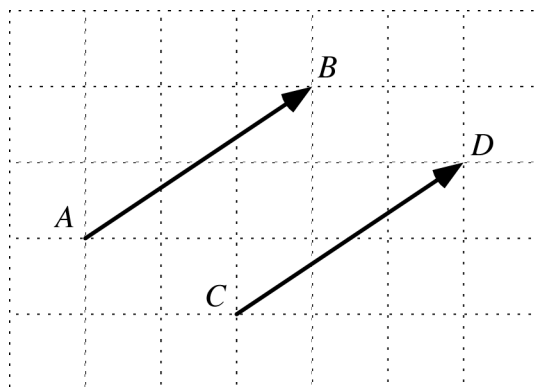
Deux flèches sont dites *équipollentes* si elles ont **même direction**, **même sens** et **même longueur**, ou si elles sont les deux nulles.

§ 2. NOTION DE VECTEUR

Soient A et B deux points.

Considérons l'ensemble des flèches équipollentes à la flèche (A, B) . Nous dirons que chacune d'elles *représente* l'objet mathématique unique appelé *vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

Si la flèche (C, D) représente également le vecteur $\overrightarrow{AB}$, on écrira : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Ainsi :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \text{les flèches } (A, B) \text{ et } (C, D) \text{ sont équipollentes}$$

Vecteur nul

Lorsque les points A et B sont confondus ($A = B$), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est dit *nul*, et se note $\vec{0}$.

Vecteurs colinéaires

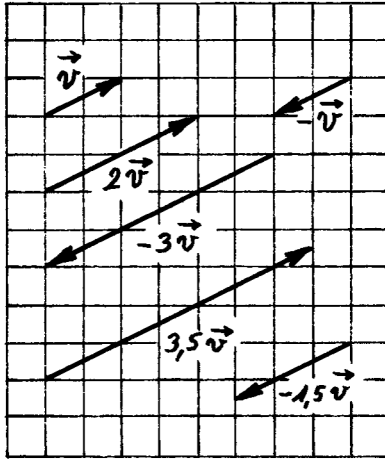
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls qui sont représentés par des flèches de *même direction* sont dits *colinéaires*.

Notation : $\vec{u} \sim \vec{v}$.

De plus, on convient que $\vec{0}$ est colinéaire à tout autre vecteur.

§ 3. OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

Multiplication d'un vecteur par un réel



Soit $\vec{v}$ un vecteur et α un nombre réel.

On définit le vecteur $\alpha \vec{v}$ comme suit :

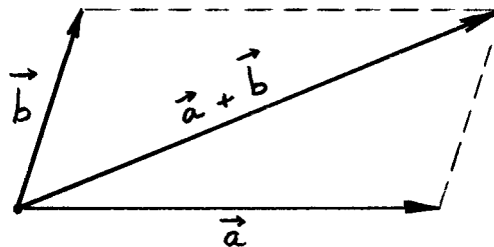
Si $\alpha = 0$: $0\vec{v} = \vec{0}$.

Si $\alpha \neq 0$:

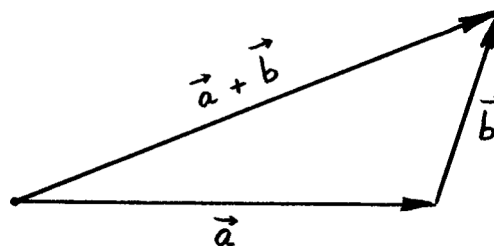
- *direction* de $\alpha \vec{v}$: celle de $\vec{v}$;
- *sens* de $\alpha \vec{v}$: celui de $\vec{v}$ si $\alpha > 0$,
sens contraire si $\alpha < 0$;
- *longueur* de $\alpha \vec{v}$: celle de $\vec{v}$ multipliée
par la valeur absolue de α .

Addition de deux vecteurs

- "Règle du parallélogramme" :



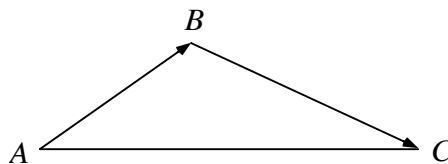
- ou "Règle du triangle" :



Relation triangulaire

De la définition de l'addition des vecteurs découle immédiatement la relation suivante :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



où A , B et C sont trois points quelconques.

Opposé d'un vecteur

Le vecteur $(-1)\vec{a}$ s'appelle l'opposé de $\vec{a}$ et se note $-\vec{a}$. Il est alors évident que

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

Soustraction

Soustraire, c'est (comme toujours) additionner l'opposé :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Règles de calcul

Quels que soient les réels α , β et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\vec{u}) &= (\alpha\beta)\vec{u} \\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \\ \alpha(\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} &= (\alpha + \beta)\vec{u}\end{aligned}$$

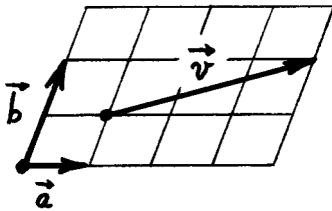
§ 4. COMBINAISONS LINÉAIRES. BASES

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{l}$ plusieurs vecteurs. On dit que $\vec{v}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{l}$ s'il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ tels que

$$\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + \dots + \lambda \vec{l}$$

Les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ s'appellent les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple



$\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{v} = 3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

(coefficients : $3; \frac{1}{2}$)

Base

Une **base** est un couple $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de vecteurs non colinéaires.

Tout vecteur du plan peut s'exprimer, de manière unique, comme combinaison linéaire des deux vecteurs d'une base choisie.

Les coefficients de la combinaison linéaire sont les **composantes** du vecteur relativement à cette base. On note souvent les composantes au moyen d'une "matrice colonne" :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$$

§ 5. OPÉRATIONS SUR LES COMPOSANTES

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base, α un nombre réel et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs dont les composantes relativement à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont respectivement $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Théorème

Les composantes de $\alpha \vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}$, et celles de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$.

$$\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

Preuve

- $\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \alpha(u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2) = \alpha(u_1 \vec{e}_1) + \alpha(u_2 \vec{e}_2) = (\alpha u_1) \vec{e}_1 + (\alpha u_2) \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2) + (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) = (u_1 \vec{e}_1 + v_1 \vec{e}_1) + (u_2 \vec{e}_2 + v_2 \vec{e}_2) \\ = (u_1 + v_1) \vec{e}_1 + (u_2 + v_2) \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}.$

Exemple

$$2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

§ 6. VECTEURS COLINÉAIRES

Définition

- 1) Deux vecteurs sont *colinéaires* s'ils sont représentés par des flèches de même direction, ou si l'un d'eux est nul.
 - 2) Deux vecteurs sont *colinéaires* si l'un s'obtient en multipliant l'autre par un nombre réel.
- (Ces deux définitions sont équivalentes)

Critère

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs et leurs composantes relativement à une certaine base.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si *leurs composantes* $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ *sont proportionnelles*, ou si et seulement si les "produits croisés" sont égaux :

$$u_1 v_2 = u_2 v_1$$

Preuve

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Rightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ (ou $\vec{u} = \alpha \vec{v}$)
 $\Rightarrow u_1 v_2 = u_1 (\alpha u_2) = u_2 (\alpha u_1) = u_2 v_1$.
2. Supposons que $u_1 v_2 = u_2 v_1$. Si ces 4 nombres sont nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nuls, donc colinéaires. Envisageons le cas où $u_1 \neq 0$, les autres cas se traitant de manière semblable :

$$u_1 \neq 0 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{u_1} \cdot u_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{v_1}{u_1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

§ 7. REPÈRE. COORDONNÉES

Un **repère** est un triplet de points (O, E_1, E_2) tel que $(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2})$ soit une base.

Le point O s'appelle l'**origine** du repère.

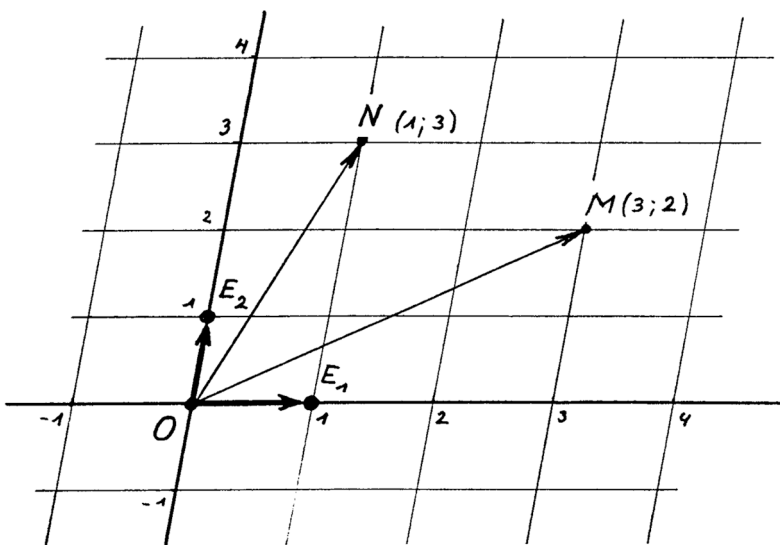
Les **coordonnées** d'un point M dans ce repère sont, par définition, les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ relativement à la base $(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2})$.

La notation $M(\alpha, \beta)$ signifie que les nombres α et β sont les coordonnées de M relativement au repère choisi :

$$M(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Les coordonnées d'un point M sont les composantes de son "rayon vecteur" $\overrightarrow{OM}$

Exemple

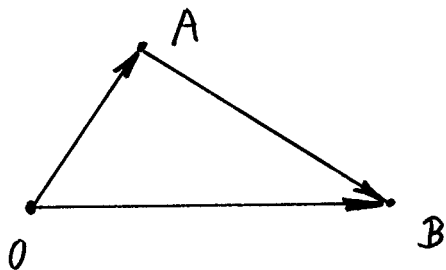


$$M(3; 2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$N(1; 3) \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

§ 8. RELATION DE CHASLES

Relativement à un repère (O, E_1, E_2) , on donne les points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$.



Par la "règle du triangle", on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

D'où :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

De plus, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Exemple

Si $A(1; -1)$ et $B(2; 3)$, alors : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

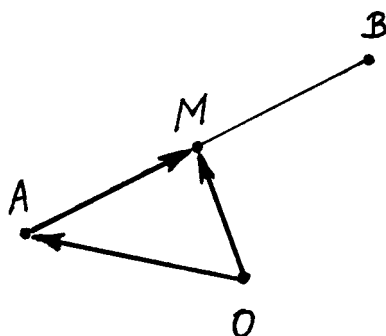
§ 9. MILIEU D'UN SEGMENT

Théorème

Soit M le milieu d'un segment AB . O désignant l'origine du repère, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Preuve



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).\end{aligned}$$

Corollaire

Les coordonnées (m_1, m_2) du milieu M du segment AB sont données par :

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad ; \quad m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

Les coordonnées du milieu sont les moyennes des coordonnées des extrémités

Exemple

Soient $A(2; 7)$ et $B(18; 4)$. Le milieu du segment AB est :

$$M\left(\frac{2+18}{2}; \frac{7+4}{2}\right) = M\left(10; \frac{11}{2}\right)$$

§ 10. CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TRIANGLE

Rappels

Une *médiane* d'un triangle est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

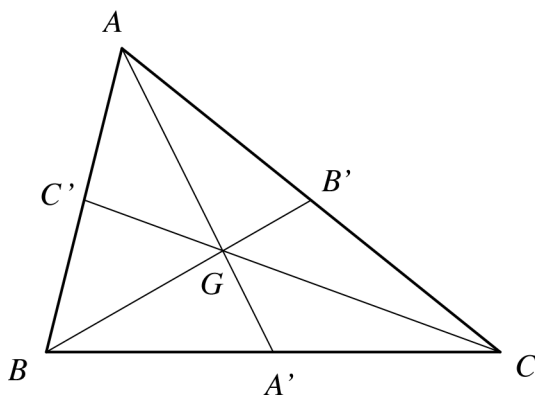
Les trois médianes d'un triangle concourent en un point appelé *centre de gravité* du triangle, situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

Théorème

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC . O désignant l'origine du repère, on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Preuve



Appelons A' le milieu de BC . Sachant que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, on peut écrire : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$
 $= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA})$
 $= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA'} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA'}$.

Comme A' est le milieu de BC , on a $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, et donc $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Corollaire

Les coordonnées $(g_1 ; g_2)$ du centre de gravité G du triangle ABC sont données par :

$$g_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \quad ; \quad g_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$$

Exemple. $A(2 ; 3)$, $B(1 ; 5)$, $C(-1 ; 7)$;

$$g_1 = \frac{2 + 1 + (-1)}{3} = \frac{2}{3} \quad ; \quad g_2 = \frac{3 + 5 + 7}{3} = 5 \quad \Rightarrow \quad G\left(\frac{2}{3} ; 5\right)$$

§ 11. NORME D'UN VECTEUR

Définitions

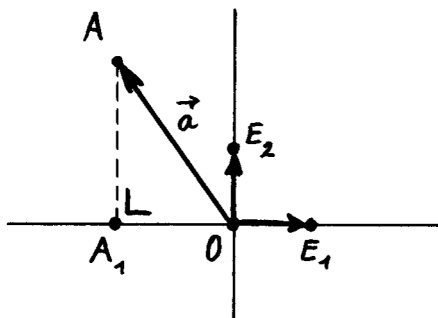
- **Norme** de $\vec{a}$: longueur d'une flèche représentant le vecteur $\vec{a}$. Se note $\|\vec{a}\|$.
- Vecteur **unitaire** : vecteur de norme 1.
- Base **orthonormée** : base formée de deux vecteurs unitaires perpendiculaires.

Norme et composantes

Si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ sont les composantes d'un vecteur $\vec{a}$ relativement à une base orthonormée, alors :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$$

En effet :



Avec les notations de la figure ci-contre, on a, par Pythagore :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(OA_1)^2 + (AA_1)^2}.$$

Or, $OA_1 = |a_1|$ et $AA_1 = |a_2|$.

$$\text{Ainsi : } \|\vec{a}\| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2} = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}.$$

Exemples

1) La norme du vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ est $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$.

2) La distance des points $A(2; 3)$ et $B(-4; 7)$ est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52}$$

Vecteurs unitaires colinéaires à un vecteur donné

Si $\vec{v}$ est un vecteur non nul, alors $\frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$ et $\frac{-1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$ sont les deux vecteurs unitaires de même direction que $\vec{v}$.

§ 12. PRODUIT SCALAIRE

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs et leurs composantes relativement à une base orthonormée.

On appelle produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et on note $\vec{a} \cdot \vec{b}$ le nombre $a_1 b_1 + a_2 b_2$:

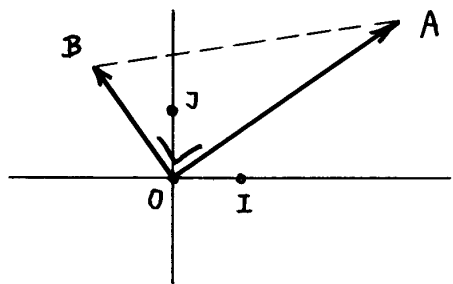
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Théorème (critère de perpendicularité)

Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non nuls sont perpendiculaires (= orthogonaux) si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Preuve



Soient A et B tels que $\vec{OA} = \vec{a}$ et $\vec{OB} = \vec{b}$.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{a} \perp \vec{b}} \iff \|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 \quad (\text{Pythagore})$$

$$\iff (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2$$

$$\iff b_1^2 - 2a_1 b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2 b_2 + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2$$

$$\iff -2a_1 b_1 - 2a_2 b_2 = 0$$

$$\iff \underline{\underline{a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0}}.$$

c.q.f.d.

§ 13. FAIRE TOURNER UN VECTEUR DE 90°

Pour obtenir un vecteur perpendiculaire à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, il suffit d'en permuter les composantes et de changer le signe de l'une d'elles :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

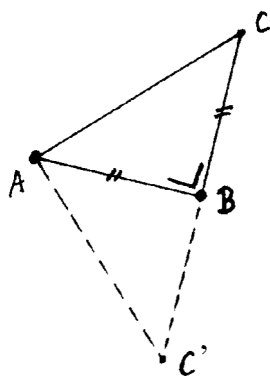
(On vérifie que le produit scalaire de ces 2 vecteurs est nul)

Notons de plus que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ont la même norme : $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Une application

Etant donné $A(1; 2)$ et $B(5; 1)$, trouver C de sorte que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en B .

Solution



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad [\text{r\`egle ci-dessus}]$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 - 5 \\ c_2 - 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 - 5 = 1 \\ c_2 - 1 = 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c_1 - 5 = -1 \\ c_2 - 1 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C : (6; 5) \quad \text{ou} \quad (4; -3)$$

§ 14. EXPRESSION TRIGONOMÉTRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

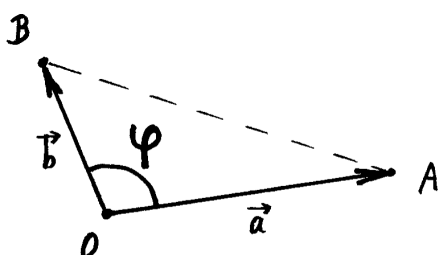
Théorème

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peut s'exprimer comme suit :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi$$

où φ désigne l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$)

Preuve



Montrons tout d'abord que

$$\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{AB}\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \\ &= b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2 \end{aligned}$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

D'autre part, le théorème du cosinus nous dit que $\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi$.

En comparant avec (*), on obtient

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi \quad \text{c.q.f.d.}$$

Corollaire

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

Remarque

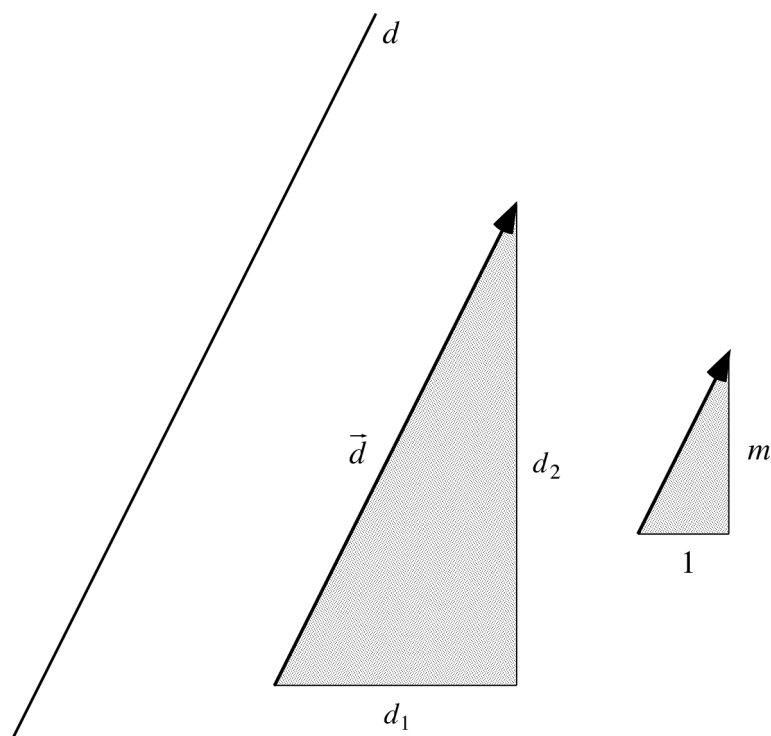
Ce théorème montre que le produit scalaire ne dépend pas du repère (orthonormé) choisi.

§ 15. PENTE D'UNE DROITE

Soit d une droite non verticale (= non parallèle à l'axe Oy) et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ un **vecteur directeur** de cette droite, c'est-à-dire n'importe quel vecteur dont la flèche représentative a même direction que d . On définit la **pente** m de la droite d comme suit :

$$m = \frac{d_2}{d_1}$$

La figure ci-dessous montre que ce nombre mesure l'inclinaison de la droite d relativement à l'axe Ox .



Si $m = 0$, la droite est horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'axe Ox ; Si $m > 0$, la droite "monte" ; Si $m < 0$, la droite "descend".

La pente d'une droite verticale n'est pas définie, mais on peut écrire $m = \infty$ ("m = infini").

§ 16. ÉQUATION D'UNE DROITE, PREMIÈRE FORME

Soient m et h deux nombres réels. On sait que le graphe de la fonction $x \mapsto mx + h$ est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine h . Ainsi :

L'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que

$$y = mx + h$$

est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine h .

On dit que $y = mx + h$ est l'équation de la droite.

Cas particuliers

- Si $m = 0$, la droite est "**horizontale**" (parallèle à l'axe Ox) et son équation est

$$y = h$$

- L'équation d'une droite "**verticale**" (parallèle à l'axe Oy) d'abscisse a n'est pas du type $y = mx + h$ (car la pente est "infinie"), mais s'écrit

$$x = a$$

puisque l'ensemble de ses points est $\{ M(x, y) \mid x = a \}$.

Remarque

La droite d'équation $y = mx + h$ admet le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

§ 17. ÉQUATION D'UNE DROITE, DEUXIÈME FORME

Théorème

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, a et b n'étant pas tous deux nuls. L'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que

$$ax + by = c$$

est une droite.

Preuve

Posons $E = \{ M(x, y) \mid ax + by = c \}$.

- Si $b = 0$ ($\Rightarrow a \neq 0$, par hypothèse), on a :

$E = \{ M(x, y) \mid x = \frac{c}{a} \}$ = ensemble des points d'abscisse $\frac{c}{a}$. E est donc une droite, parallèle à l'axe Oy .

- Si $b \neq 0$:

$$ax + by = c \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \quad \Leftrightarrow \quad y = mx + h, \text{ avec } m = -\frac{a}{b} \text{ et } h = \frac{c}{b}.$$

L'ensemble E est donc bien une droite, en vertu du paragraphe précédent.

Corollaire

Si $b \neq 0$, la pente de la droite d'équation $ax + by = c$ est

$$m = -\frac{a}{b}$$

§ 18. ÉQUATION D'UNE DROITE DONNÉE PAR PENTE ET POINT

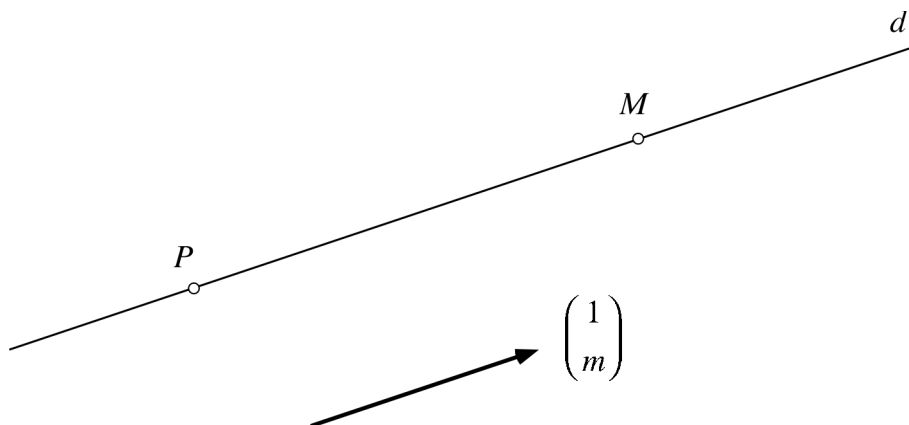
Théorème

Soit $P(p_1, p_2)$ un point et m un réel. La droite de pente m passant par P a pour équation :

$$y - p_2 = m(x - p_1)$$

Preuve

Appelons d la droite de pente m passant par P . On sait que $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .



Ainsi :

$$M(x, y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow y - p_2 = m(x - p_1).$$

D'où :

$$d = \{ M(x, y) \mid y - p_2 = m(x - p_1) \}$$

Exemple

Trouver l'équation de la droite passant par $A(2; 3)$ et $B(5; 7)$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{4}{3} \Rightarrow AB: y - 3 = \frac{4}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 3y - 9 = 4x - 8 \Leftrightarrow \underline{\underline{4x - 3y = -1}}.$$

§ 19. PENTES DE DEUX DROITES PERPENDICULAIRES

On considère une droite d de pente $m \neq 0$ et une droite d' de pente $m' \neq 0$. Alors :

$$d \perp d' \Leftrightarrow m \cdot m' = -1 \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m} \Leftrightarrow m' \text{ est l'opposé de l'inverse de } m$$

Preuve

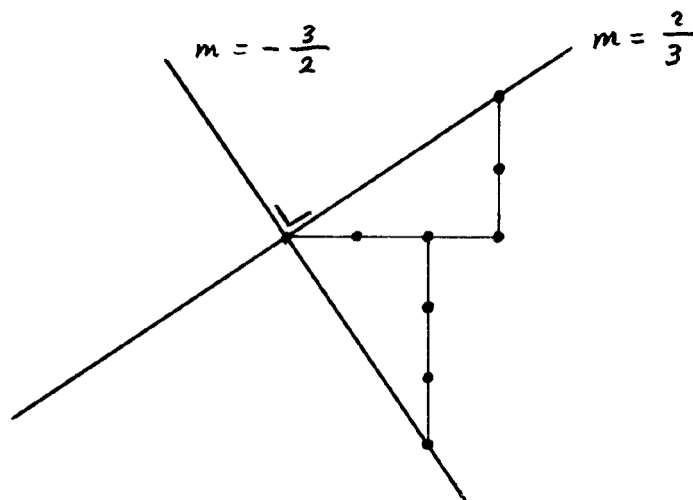
Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de d et d' , respectivement. Par conséquent :

$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 1 + mm' = 0 \Leftrightarrow mm' = -1$$

$$\text{Ainsi : } d \perp d' \Leftrightarrow mm' = -1 \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}.$$

Exemple

Les droites $y = \frac{2}{3}x + 7$ et $y = -\frac{3}{2}x + 13$ sont perpendiculaires. Ci-dessous, une petite figure illustrant à merveille la situation...



§ 20. PARALLÈLES ET PERPENDICULAIRES

Proposition

- 1) Les droites $d : ax + by = c$ et $d' : ax + by = c'$ sont parallèles.
- 2) Les droites $d : ax + by = c$ et $d'' : bx - ay = c''$ sont perpendiculaires.

Preuve

- 1) Les droites d et d' ont la même pente : $-\frac{a}{b}$.
- 2) Elles sont perpendiculaires car le produit de leurs pentes est égal à -1 :

$$-\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$$

Applications

- Trouver l'équation de la **parallèle** d' à $d : 2x + 3y = 5$ passant par le point $P(-2 ; 7)$.

Solution

En vertu de la proposition, on peut déjà écrire : $d' : 2x + 3y = c$. On obtient ensuite le terme constant c en utilisant le fait que P est sur d' ; il suffit de remplacer x et y dans le membre de gauche par les coordonnées de P : $c = 2(-2) + 3 \cdot 7 = 17$. Ainsi :

$$d' : 2x + 3y = 17$$

- Trouver l'équation de la **perpendiculaire** d'' à $d : 2x + 3y = 5$ passant par le point $P(-2 ; 7)$.

Solution

La deuxième partie de la proposition donne : $d'' : 3x - 2y = k$. Comme avant, on calcule k en se servant des coordonnées de P : $k = 3(-2) - 2 \cdot 7 = -20$. D'où :

$$d'' : 3x - 2y = -20$$

§ 21. VECTEUR NORMAL D'UNE DROITE

Définition

Un vecteur non nul perpendiculaire à une droite d est dit **normal** à d .

Théorème

Soient a et b deux réels non tous deux nuls.

$$\text{Le vecteur } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est normal à la droite } d : ax + by = c .$$

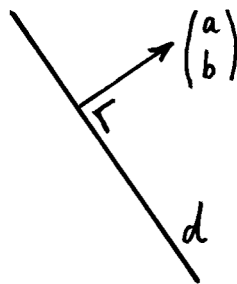
Preuve

1) Si $b \neq 0$: $ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$; $\Rightarrow$ la pente de d est $-\frac{a}{b}$; $\Rightarrow d$ admet le vecteur

directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$; $\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à d .

2) Si $b = 0$: $ax + by = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$; $\Rightarrow d$ est une droite verticale (parallèle à Oy).

Or $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ est horizontal (parallèle à Ox) ; $\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à d .



Application. Trouver l'équation de la hauteur h issue de A dans le triangle de sommets $A(2 ; 3)$, $B(1 ; 5)$ et $C(8 ; 7)$.

Solution. h est perpendiculaire à $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Cela donne le début de l'équation de h : $7x + 2y = c$.

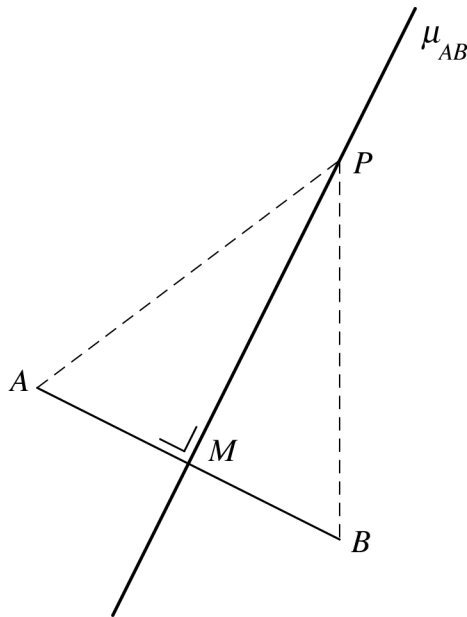
On trouve c en remplaçant x et y par les coordonnées de A : $c = 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 20$. Finalement :

$$h : 7x + 2y = 20$$

§ 22. MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

Définition

La médiatrice d'un segment AB — notée μ_{AB} — est la droite coupant le segment perpendiculairement en son milieu. C'est aussi le *lieu géométrique des points situés à égale distance des extrémités A et B du segment*.



$$P \in \mu_{AB} \Leftrightarrow \delta(P, A) = \delta(P, B)$$

Trouver l'équation d'une médiatrice

Soient par exemple les points $A(2; 3)$ et $B(4; 11)$.

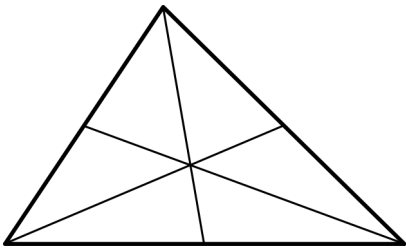
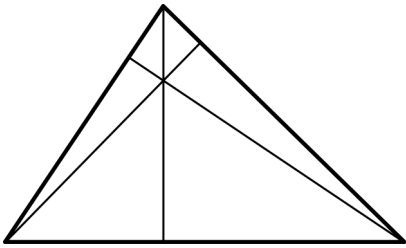
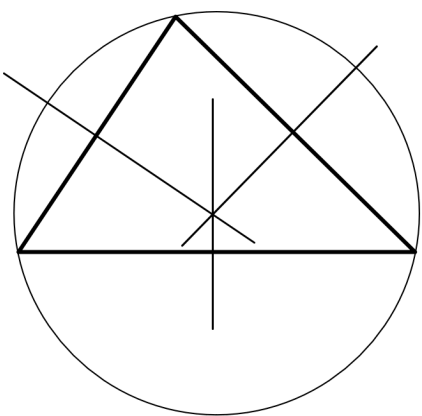
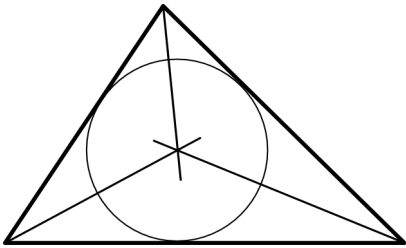
Méthode 1

1. Milieu M de AB : $\left(\frac{2+4}{2}; \frac{3+11}{2}\right) = (3; 7)$
2. Vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$; pente de AB : $\frac{8}{2} = 4$
3. Pente de μ_{AB} : $-\frac{1}{4}$
(opposé de l'inverse de 4)
4. Equation de μ_{AB} : $y - 7 = -\frac{1}{4}(x - 3)$
 $\Leftrightarrow 4y - 28 = -x + 3 \Leftrightarrow x + 4y = 31$

Méthode 2

1. Milieu M de AB : $\left(\frac{2+4}{2}; \frac{3+11}{2}\right) = (3; 7)$
2. Vecteur normal à μ_{AB} : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
3. Equation de μ_{AB} :
 $1 \cdot x + 4 \cdot y = 31 \Leftrightarrow x + 4y = 31$
(on a trouvé le terme constant 31 en remplaçant x et y par les coordonnées du milieu : 3 et 7)

§ 23. LIGNES PRINCIPALES DU TRIANGLE

	Une médiane joint un sommet et le milieu du côté opposé. Les médianes se coupent au centre de gravité du triangle. Le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane, à partir du sommet.
	Une hauteur passe par un sommet du triangle et est perpendiculaire au côté opposé. Les hauteurs se coupent en un point appelé orthocentre du triangle.
	Une médiatrice passe par le milieu d'un côté et est perpendiculaire à ce côté. Les médiatrices se coupent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.
	Une bissectrice divise un angle en deux parties égales. Les bissectrices se coupent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

1. On donne graphiquement deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, ainsi que les points O , K , L , M et N .
Représenter les vecteurs suivants :

$$\vec{OA} = 2\vec{a}$$

$$\vec{OB} = -3\vec{b}$$

$$\vec{KC} = 2\vec{b}$$

$$\vec{LD} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{LE} = -2\vec{b} + \vec{a}$$

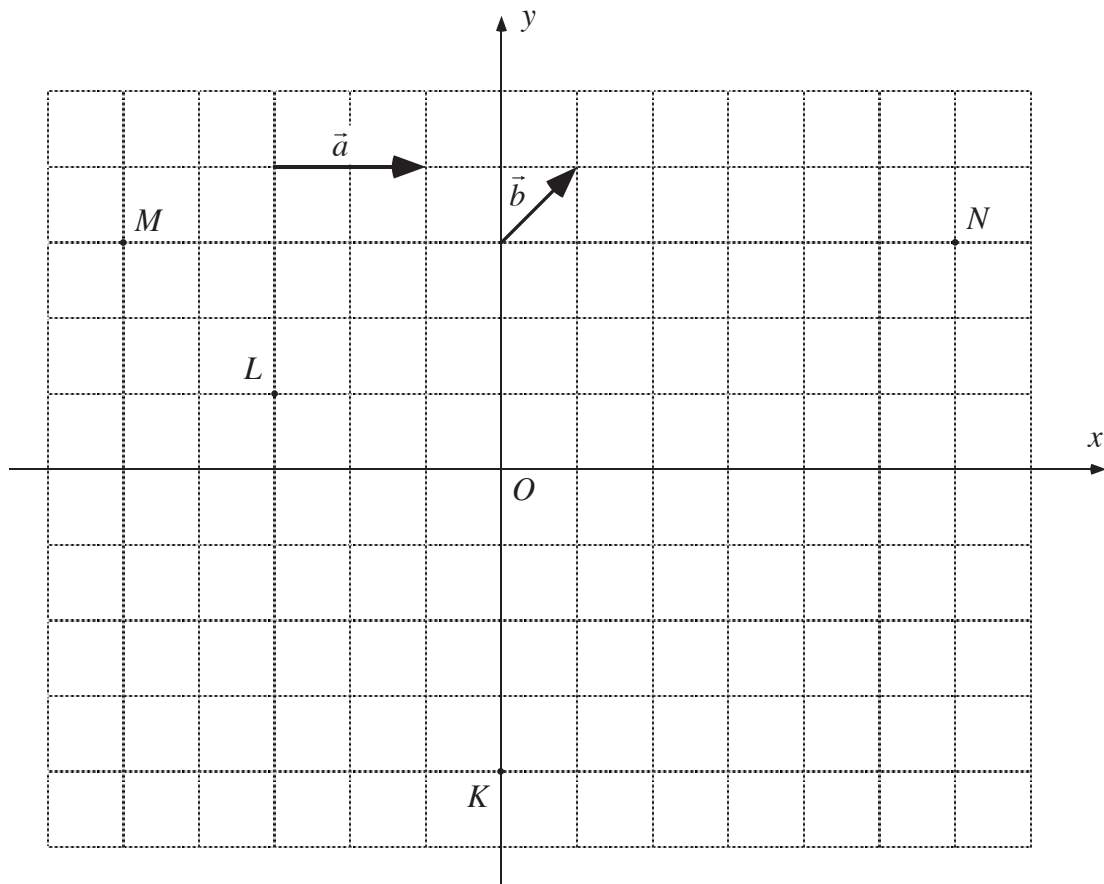
$$\vec{OF} = \frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{KG} = \vec{KC} - \vec{AO}$$

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\vec{IM} = 6\vec{b} - 3\vec{a}$$

$$\vec{JN} = \frac{5}{4}\vec{BL} - \vec{b} + \vec{KC}$$



Contrôle

$$A(4; 0)$$

$$B(-3; -3)$$

$$C(2; -2)$$

$$D(0; 2)$$

$$E(-3; -1)$$

$$F(4; 3)$$

$$G(6; -2)$$

$$H(1; -3)$$

$$I(-5; -3)$$

$$J(5; -3)$$

2. On donne graphiquement deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, ainsi qu'un point O . Placer les points $A, B, C, \dots$ tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC} = 2\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OE} = -\frac{2}{3}\vec{b}$$

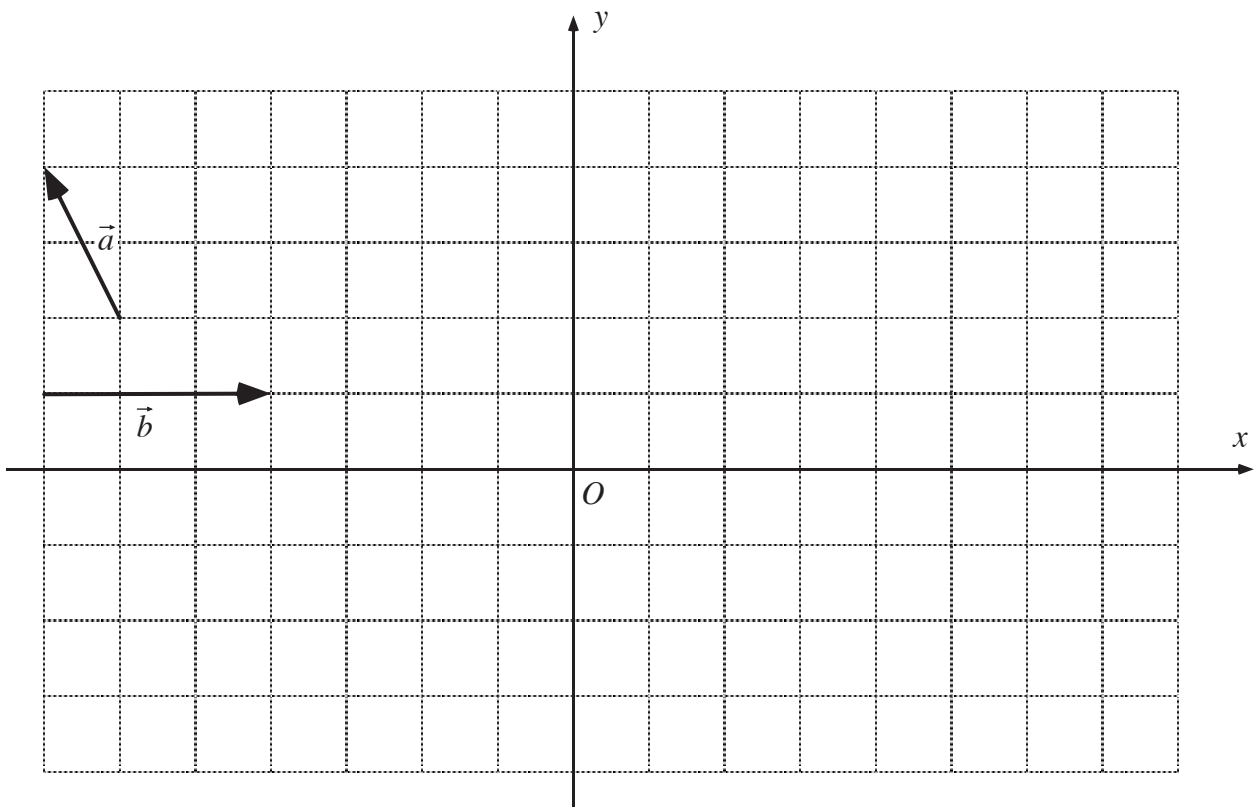
$$\overrightarrow{OF} = -\frac{3}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AH} = 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{EI} = -\vec{a}$$

$$\overrightarrow{JC} = -\vec{b}$$



Contrôle

$$A(-1; 2)$$

$$B(3; 0)$$

$$C(-2; 4)$$

$$D(-\frac{1}{2}; 1)$$

$$E(-2; 0)$$

$$F(\frac{3}{2}; -3)$$

$$G(\frac{9}{2}; 0)$$

$$H(8; 2)$$

$$I(-1; -2)$$

$$J(1; 4)$$

3. On donne trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et un point O . Placer les points A , B , C , D , ... tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{c}$$

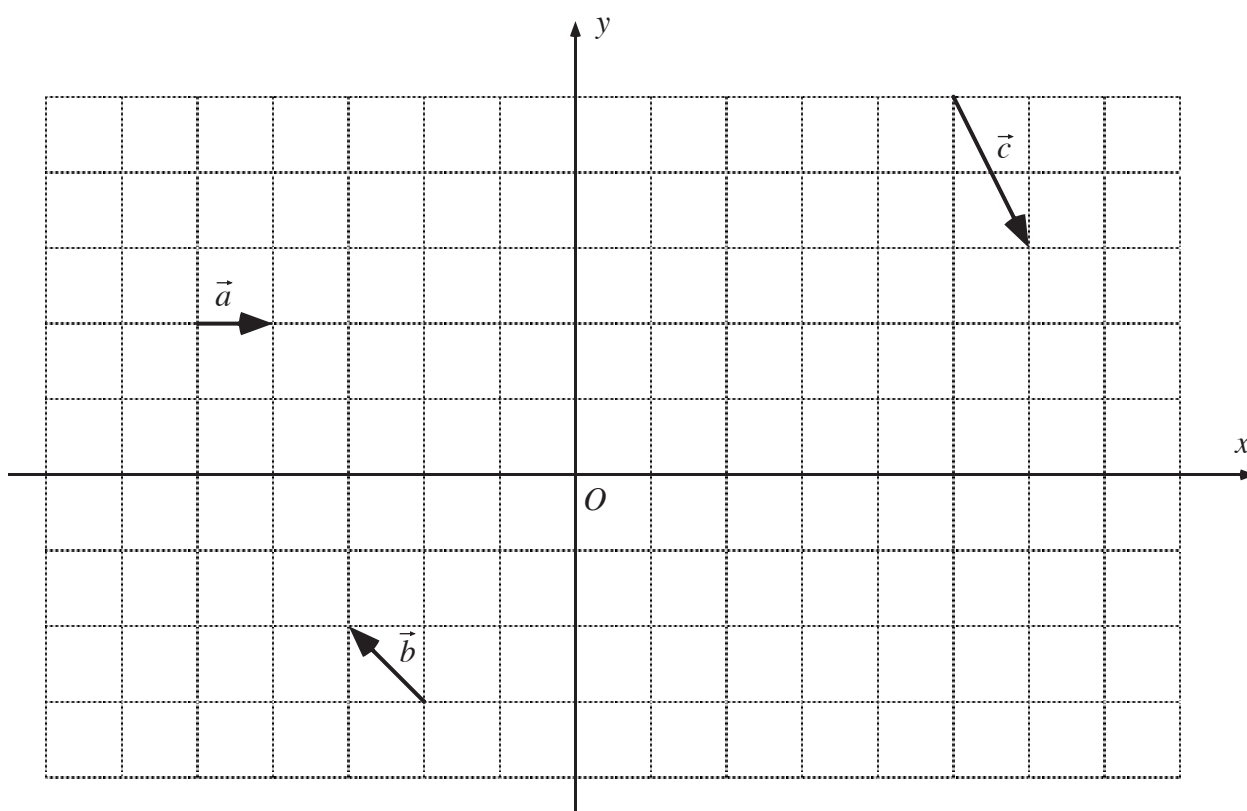
$$\overrightarrow{OF} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OG} = 3\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OH} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OI} = 2\vec{b} + 6\vec{a} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OJ} = -2\vec{c} - \frac{3}{2}\vec{a}$$



Contrôle

$$A(1; 0)$$

$$B(-1; 1)$$

$$C(1; -2)$$

$$D(0; 1)$$

$$E(2; -2)$$

$$F(1; 1)$$

$$G(4; -1)$$

$$H(-4; 0)$$

$$I(3; 4)$$

$$J(-3,5; 4)$$

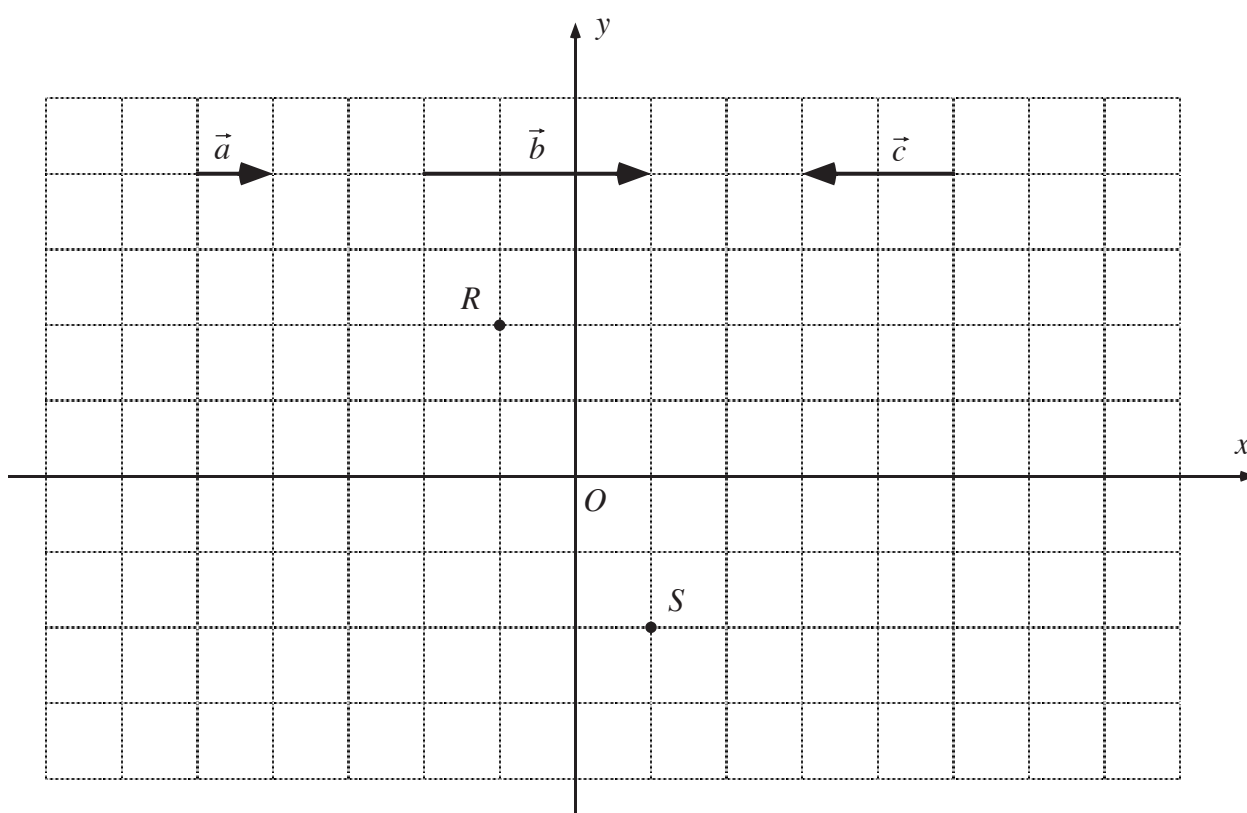
4. On donne trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ de même direction (= colinéaires) et trois points O , R et S . Placer les points A , B , C , D , ... tels que :

$$\vec{OA} = \vec{a} ; \quad \vec{OB} = \vec{b} ; \quad \vec{OC} = \vec{c} ; \quad \vec{OD} = \vec{a} + \vec{b} ; \quad \vec{OE} = \vec{a} + \vec{c} ;$$

$$\vec{OF} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} ; \quad \vec{RG} = -2\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - 3\vec{c} ;$$

$$\vec{SH} = -\vec{a} - \vec{c} - 5,5\vec{a} ; \quad \vec{SI} = 2\vec{SA} + 2\vec{a} ;$$

$$\vec{RJ} = -\vec{SA} - 2\vec{a} + \vec{SO} .$$



Contrôle

$A(1; 0)$

$B(3; 0)$

$C(-2; 0)$

$D(4; 0)$

$E(-1; 0)$

$F(-5; 0)$

$G(5; 2)$

$H(-3,5; -2)$

$I(3; 2)$

$J(-4; 2)$

5. A, B, C, D et E étant des points quelconques, exprimer plus simplement les vecteurs suivants :

- | | |
|--|--|
| 1) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ | 2) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$ |
| 3) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$ | 4) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$ |

Rép. 1) $\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ 3) $\overrightarrow{DC}$ 4) $\overrightarrow{DA}$

6. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O . Construire les vecteurs ci-dessous et les exprimer plus simplement :

- | | |
|--|--|
| 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ | 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$ |
| 3) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}$ | 4) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}$ |
| 5) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}$ | 6) $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD}$ |

Rép. 1) $\overrightarrow{AO}$ 2) $\overrightarrow{AC}$ 3) $\overrightarrow{AB}$ 4) $\overrightarrow{EA}$ 5) $\overrightarrow{AD}$ 6) $\overrightarrow{FC}$

7. On donne trois points non alignés O, A et B .

- A 1) Construire C, D et E tels que $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$. Quelle figure forment les points M tels que $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA}$, $k \in \mathbb{R}$?

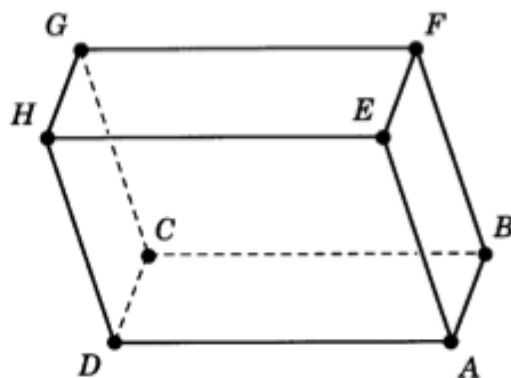
- •
O B 2) Construire F, G et H tels que $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$. Quelle figure forment les points M tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OA}$, $k \in \mathbb{R}$?

Rép. 1) la droite OA 2) la parallèle à OA par B

7 BIS. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

Exprimer plus simplement les vecteurs suivants :

- | | |
|--|--|
| 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$ | 2) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$ |
| 3) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$ | 4) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$ |
| 5) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$ | 6) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$ |

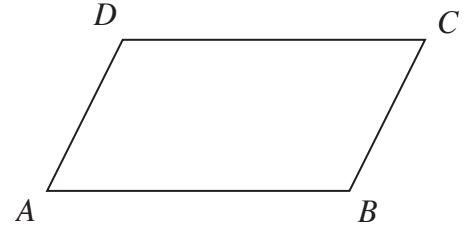


Rép. 1) $\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{AH}$ 3) $\overrightarrow{HA}$ 4) $\overrightarrow{EA}$ 5) $\overrightarrow{AC}$ 6) $\overrightarrow{AE}$

7 TER. Une pyramide de sommet S a pour base un parallélogramme $ABCD$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{SB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{SC}$. Exprimer chacun des vecteurs suivants comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$.

Rép. $\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{w}$; $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{BC} = -\vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{AD} = -\vec{v} + \vec{w}$;
 $\overrightarrow{BD} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

8. Les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs des côtés AB, BC, CD et DA d'un parallélogramme $ABCD$ de centre O .



1) Relativement à la base $B_1 = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, donner les composantes des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}$$

2) Même question pour la base $B_2 = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM})$.

Rép. 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O . Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{DB}$ relativement à la base : 1) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; 2) $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{ED})$.

Rép. 1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. Parmi les vecteurs suivants, quels sont ceux qui sont colinéaires (= de même direction) ?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Rép. $\vec{a}, \vec{d}$ et $\vec{h}$ sont colinéaires / $\vec{b}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires / $\vec{c}$ et $\vec{g}$ sont colinéaires

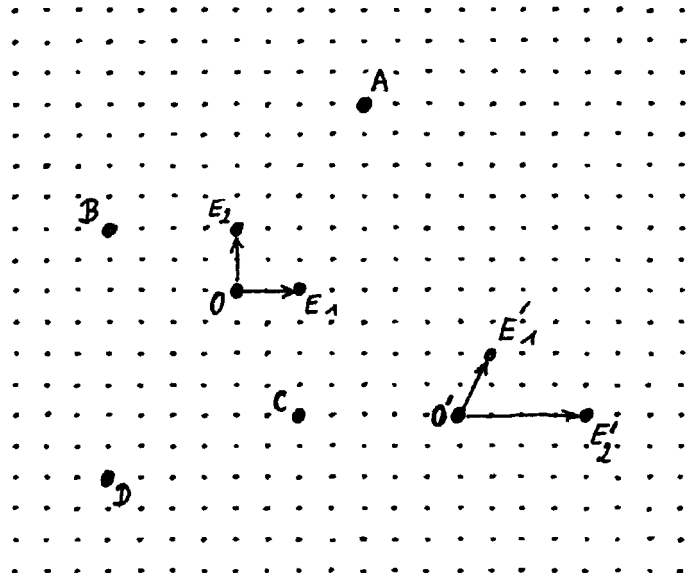
11. On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les composantes de : 1) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ 2) $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ 3) $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$

Rép. 1) $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -11/4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$

12.—

- 1) Donner les coordonnées des points A, B, C et D relativement au repère (O, E_1, E_2) .
- 2) Même question pour le repère (O', E'_1, E'_2) .

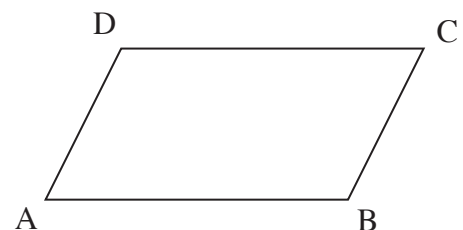


Rép. 1) $A(2; 3)$, $B(-2; 1)$, $C(1; -2)$, $D(-2; -3)$
 2) $A(5; -2)$, $B(3; -3,5)$, $C(0; -1,25)$, $D(-1; -2,5)$

13. Déterminer α afin que les vecteurs $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5-\alpha \\ 3 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Rép. $\alpha = -\frac{11}{2}$

14. On donne un parallélogramme ABCD. M étant le milieu de AB, déterminer les composantes du vecteur $\vec{v} = 3\vec{AC} + 15\vec{CM}$ relativement à la base $(\vec{AD}, \vec{AM})$.



Rép. $\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \end{pmatrix}$

15. Simplifier les expressions suivantes :

1) $7(-3\vec{a}) - 2\vec{a}$

2) $\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\vec{a}\right) - 2(\vec{a} + \vec{b}) + 5(-3\vec{b})$

3) $-\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

4) $-3\left(\frac{2}{3}\vec{a}\right) + 2(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) - 7\left(\frac{3}{7}\vec{c}\right)$

Rép. $-23\vec{a} \quad / \quad -\frac{1}{3}\vec{a} - 17\vec{b} \quad / \quad \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} \quad / \quad -4\vec{b} - \vec{c}$

16. Sachant que $\vec{r} = 3\vec{b}$, $\vec{s} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$ et $\vec{t} = -2,5\vec{a} - \vec{b}$, exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

a) $2\vec{t} - \vec{s} + \vec{r}$

b) $-2\vec{r} + \vec{t} - \vec{a}$

c) $\frac{4}{3}\vec{r} - \vec{t} + 2\vec{s}$

Rép. $-2\vec{a} + 3\vec{b} \quad / \quad -\frac{7}{2}\vec{a} - 7\vec{b} \quad / \quad -\frac{7}{2}\vec{a} + \vec{b}$

17. Déterminer α afin que les vecteurs $\begin{pmatrix} \alpha \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Rép. $\alpha = 3 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = 3 + \sqrt{2}$

18. On donne les points $A(3; 1)$, $B(5; 2)$, $C(-3; -1)$, $D(-8; \frac{1}{2})$, $E(-\frac{2}{3}; 0)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants :

1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CB}$

2) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$

Rép. 1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -11 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -11/3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 22/3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -17/3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

19. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

a) $A(-3; 3)$

$B(7; 0)$

$C(10; 4)$

$D(0; 8)$

b) $A(-12; -13)$

$B(6; 1)$

$C(18; 7)$

$D(0; -7)$

c) $A(0; 1)$

$B(1; -2)$

$C(4; 3)$

$D(5; 0)$

Rép. a) non b) oui c) non

20. Soit $ABCD$ un carré de 8 unités de côté. Dessiner les points E, F, G, H et I tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} ; \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} ; \quad \overrightarrow{GB} = -3\overrightarrow{GA} ; \quad \overrightarrow{CH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} ; \quad \overrightarrow{DC} = \frac{8}{7}\overrightarrow{DI}$$

21. Déterminer α et β de sorte que $ABCD$ soit un parallélogramme :

- | | | | |
|---------------|--------------------|-----------------|--------------------|
| 1) $A(1; 5)$ | $B(5; 4)$ | $C(4; 1)$ | $D(\alpha; \beta)$ |
| 2) $A(0; 0)$ | $B(5; \beta)$ | $C(\alpha; -1)$ | $D(1; 2)$ |
| 3) $A(-2; 0)$ | $B(\alpha; \beta)$ | $C(3; 1)$ | $D(0; -1)$ |

Rép. 1) $\alpha = 0; \beta = 2$ 2) $\alpha = 6; \beta = -3$ 3) $\alpha = 1; \beta = 2$

22. Soient $A(0; 4)$, $B(5; 9)$ et $C(10; 2)$.

- Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC .
- Calculer les coordonnées du point D situé au tiers de AB depuis A ;
- Calculer les coordonnées du point E situé aux $3/5$ de BC depuis B ;
- Calculer les coordonnées du point F tel que A soit le milieu de FC .

Rép. milieux : $(\frac{5}{2}; \frac{13}{2})$, $(\frac{15}{2}; \frac{11}{2})$, $(5; 3)$. $D(\frac{5}{3}; \frac{17}{3})$, $E(8; \frac{24}{5})$, $F(-10; 6)$

23. A, B, C, D et E étant des points quelconques, exprimer le plus simplement possible les vecteurs suivants :

- | | |
|--|--|
| 1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$ | 2) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DE}$ |
|--|--|

Rép. $\overrightarrow{AB}; \vec{0}$

24. On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$. Déterminer deux nombres α et β tels que :

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{c}$$

Rép. $\alpha = 3; \beta = -\frac{1}{3}$

25. On donne $A(3; 5)$, $B(4; -1)$, $C(9; 2)$. Calculer les coordonnées des points suivants :

- | | |
|---|--|
| D : situé au tiers de AC depuis C | M : milieu de AB |
| E : situé aux trois quarts de CM depuis C | F : tel que C soit le milieu de BF |

Rép. $D(7; 3)$, $M(\frac{7}{2}; 2)$, $E(\frac{39}{8}; 2)$, $F(14; 5)$

26. On donne $A(-1; 3)$, $C(\frac{1}{2}; \frac{5}{3})$ et $D(2; 0)$. Déterminer B afin que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Rép. $B(-\frac{5}{2}; \frac{14}{3})$

27. Les points A , B et C sont-ils alignés ? (Voir si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.)

- 1) $A(2; 3)$, $B(1; 6)$, $C(4; -3)$.
- 2) $A(1; -1)$, $B(3; 1)$, $C(-2; 3)$.
- 3) $A(-56; 84)$, $B(16; -24)$, $C(-8; 12)$.

Rép. 1) oui 2) non 3) oui

28. Soient $A(4; 2)$, $B(9; 1)$ et $C(7; 5)$.

- a) Calculer les coordonnées du symétrique D de C par rapport à A et celles du symétrique E de C par rapport à B .
- b) Montrer que les droites AB et DE sont parallèles.
- c) Déterminer le point F de l'axe Oy qui est aligné sur A et B .

Rép. $D(1; -1)$, $E(11; -3)$, $F(0; \frac{14}{5})$

29. On donne $M(1; 2)$, $N(-1; 0)$ et $P(1; -1)$. Déterminer le point Q afin que le quadrilatère $MNPQ$ soit un parallélogramme.

Rép. $Q(3; 1)$

30. On donne $A(0; 1)$, $B(1; 1)$ et $P(\frac{1}{2}; 0)$ et $Q(1; \frac{1}{4})$. Trouver M sur la droite AB et N sur l'axe Oy tels que le quadrilatère $PQMN$ soit un parallélogramme.

Rép. $M(\frac{1}{2}; 1)$, $N(0; \frac{3}{4})$

31. Soient $A(1; 0)$, $B(4; 2)$, $C(0; 2)$ et $D(4; 0)$. Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites AB et CD .

Indication : Poser $I(\alpha, \beta)$, puis exprimer vectoriellement l'alignement des points A, I, B et celui des points C, I, D . Résoudre le système en (α, β) ainsi obtenu.

Rép. $I(\frac{16}{7}; \frac{6}{7})$

32. Soient $O(0; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 1)$ et $D(\frac{3}{4}; 0)$. Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites OC et BD .

Rép. $I(\frac{3}{7}; \frac{3}{7})$

33. On donne $A(1; 1)$, $B(5; -1)$ et $C(7; 4)$. Calculer les coordonnées des points suivants :

- M , milieu de BC ;
- D , situé aux $3/4$ de AC à partir de A ;
- I , point d'intersection des droites AB et DM .

Rép. $M(6; \frac{3}{2})$, $D(\frac{11}{2}; \frac{13}{4})$, $I(7; -2)$

34. Soit les points $A(-4; 2)$, $B(1; 3)$ et $C(2; 5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

Rép. $(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$, $(-1; \frac{7}{2})$, $(\frac{3}{2}; 4)$, $G(-\frac{1}{3}; \frac{10}{3})$

35. Trouver les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on donne deux sommets $A(6; -1)$ et $B(-2; 6)$ et le centre de gravité $G(3; 4)$.

Rép. $C(5; 7)$

36. On considère $A(2; -1)$ et $B(0; 3)$.

- Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit $O(0; 0)$.
- Déterminer le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Rép. $C(-2; -2)$, $D(0; -6)$

37. On donne les points A , B et C . Déterminer le nombre α pour qu'ils soient alignés :

- $A(1; 2)$, $B(-3; 3)$, $C(\alpha; 1)$.
- $A(2; \alpha)$, $B(7\alpha - 29; 5)$, $C(-4; 2)$.

Rép. a) $\alpha = 5$ b) $\alpha = 1$ ou $\alpha = \frac{32}{7}$

38. On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Trouver un nombre k et un vecteur $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{a}$ tels que $\vec{v} + k\vec{b} = \vec{c}$.

Rép. $k = \frac{35}{29}$, $\vec{v} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 105 \\ -30 \end{pmatrix}$

39. Démontrer vectoriellement que les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque sont les sommets d'un parallélogramme.

40. Dans un triangle ABC , A' est le milieu de BC , B' le milieu de AC et C' le milieu de AB .

Démontrer que : a) $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

41. On donne deux points distincts A et B (prendre $AB = 5$ carrés). Construire les points R, S, T et U tels que : $\overrightarrow{RA} = 3 \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{SA} = -2 \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AT} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AU} = -\frac{7}{5} \overrightarrow{AB}$.

42. On donne les points $K(2; -1)$, $A(-2; 3)$ et $B(0; -1)$. Déterminer les coordonnées des images de A et B par l'homothétie de centre K et de rapport -3 .

Rép. $A'(14; -13)$, $B'(8; -1)$

43. Dans un parallélogramme $ABCD$, M est le milieu du côté BC et P est le point situé aux $2/3$ de la diagonale DB depuis D . Prouver que les points A, P et M sont alignés.

Indication. Travailler dans le repère $(O, E_1, E_2) = (A, B, D)$.

51. Calculer la norme de chacun des vecteurs suivants :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} ; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} ; \quad \vec{d} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Rép. 5 ; 4 ; $\sqrt{73}$; 1

52. On donne les points $A(1; 3)$, $B(-8; 12)$ et $C(1; 2)$. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC .

Rép. $9\sqrt{2}$; $\sqrt{181}$; 1

53. Vérifier que le triangle de sommets $A(-4; -2)$, $B(\frac{4}{5}; \frac{22}{5})$ et $C(\frac{24}{5}; \frac{-18}{5})$ est isocèle, puis calculer son aire.

Rép. $BC = CA = 4\sqrt{5}$ / Aire = 32

54. On donne les points $A(7; 1)$, $B(5; 5)$, $C(5; -3)$ et $I(2; 1)$. Montrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

55. Calculer la longueur des côtés du quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A(-2; 1)$, $B(5; 2)$, $C(10; 7)$ et $D(3; 6)$. Que peut-on dire de ce quadrilatère ?

Rép. tous les côtés mesurent $5\sqrt{2}$; c'est un losange

56. On donne un vecteur $\vec{v}$ non nul. Donner les deux vecteurs unitaires (= de norme 1) ayant la même direction que $\vec{v}$.

$$\text{a) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Rép. $\pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$

57. On donne $A(4; -1)$ et $B(-5; 11)$. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, puis déterminer les points de la droite AB situés à une distance 3 de A .

Rép. 15 ; $(\frac{11}{5}; \frac{7}{5})$; $(\frac{29}{5}; -\frac{17}{5})$

58. Montrer que les vecteurs suivants sont unitaires (= de norme 1) :

$$\vec{a} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} ; \quad \vec{d} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

59. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$

Rép. 1. 7 2. -14 3. $-\frac{1}{2}$ 4. $\alpha^2 + \beta$ 5. 0 6. 0

60. Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Que peut-on dire de $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$?

61. Les deux vecteurs donnés sont-ils orthogonaux (= perpendiculaires) ?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ -k \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2\alpha \\ t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2t \\ -4\alpha \end{pmatrix}$

Rép. a) non b) non c) oui d) oui e) non, sauf si $k=0$ f) oui

62. Trouver x afin que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient orthogonaux :

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix}$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ x+1 \end{pmatrix}$

3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}$

4) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} x+1 \\ x \end{pmatrix}$

Rép. 1) $x = -6$ 2) $x = 2$ 3) $x = \pm 2$ 4) $x = 0$ ou $x = -3$

63. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A(0; 2)$, $B(6; 6)$, $C(8; 3)$ et $D(2; -1)$ est un rectangle.

64. On donne les points $A(-4; -3)$, $B(2; 0)$ et $C(0; 4)$. Montrer que les droites AB et BC sont perpendiculaires. Trouver le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Rép. $D(-6; 1)$

65. Déterminer le nombre k pour que le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Rép. $k = \frac{3}{4}$

66. Soient les deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un réel k et un vecteur $\vec{v}$ perpendiculaire à $\vec{a}$ tels que $\vec{b} = k\vec{a} + \vec{v}$.

Rép. $k = 3$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

67. Soient $A(0 ; 2)$ et $B(8 ; 5)$. Déterminer :

- a) le point D de l'axe Oy situé à égale distance de A et B .
- b) les points C de l'axe Ox tels que $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

Rép. $D(0 ; \frac{85}{6})$; $C(4 - \sqrt{6} ; 0)$ ou $C(4 + \sqrt{6} ; 0)$

68. On donne $A(0 ; 2)$ et $B(3 ; \frac{7}{2})$. La perpendiculaire à AB par B coupe l'axe Ox en C et la médiatrice de AB coupe Ox en D . Calculer les coordonnées de C et D .

Rép. $C(\frac{19}{4} ; 0)$; $D(\frac{23}{8} ; 0)$

69. Un carré $OABC$ est donné par $O(0 ; 0)$, $A(3 ; 0)$ et $C(0 ; 3)$. Soit D situé au tiers du segment AB depuis A et E situé au tiers de BC depuis B .

- a) Montrer que OD et AE sont perpendiculaires.
- b) Soit $F(\frac{9}{4} ; 0)$. Déterminer G sur AB de manière que CF soit perpendiculaire à OG .

Rép. $G(3 ; \frac{9}{4})$

70. Trouver les deux vecteurs perpendiculaires à $\vec{v}$ et de même norme que $\vec{v}$. Dessiner $\vec{v}$ et ces deux vecteurs.

1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 3) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Rép. $\pm \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\pm \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

71. Trouver les deux vecteurs perpendiculaires à $\vec{v}$ dont la norme est double de celle de $\vec{v}$.

1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ Rép. $\pm \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\pm \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\pm \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

72. On donne $A(-1 ; 3)$ et $B(7 ; 4)$. Déterminer le point C , sachant que BC est perpendiculaire à AB et que $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Rép. $C(8 ; -4)$ ou $C(6 ; 12)$

73. On donne $A(2 ; 5)$ et $B(-1 ; 7)$. Déterminer le point C , sachant que BC est perpendiculaire à AB et que $\|\overrightarrow{BC}\| = 3\|\overrightarrow{AB}\|$.

Rép. $C(5 ; 16)$ ou $C(-7 ; -2)$

74. Trouver les sommets C et D d'un carré $ABCD$, connaissant les points $A(2 ; 1)$ et $B(3 ; -5)$.

Rép. $C(9 ; -4) / D(8 ; 2)$ ou $C(-3 ; -6) / D(-4 ; 0)$

75. On donne $A(0 ; 4)$, $B(3 ; -2)$, $C(-3 ; 4)$ et $D(-6 ; -4)$. Déterminer P sur CD et équidistant de A et B . *Rép.* $P\left(-\frac{141}{26} ; -\frac{32}{13}\right)$

76.—

a) Calculer les angles du triangle ABC : $A(4 ; 2)$, $B(9 ; 1)$, $C(13 ; 7)$.

b) Idem pour le triangle KLM : $K(-4 ; -3)$, $L(0 ; 3)$, $M(5 ; 1)$.

Rép. a) $40,36^\circ ; 112,38^\circ ; 27,26^\circ$ b) $32,35^\circ ; 101,89^\circ ; 45,76^\circ$

77. Calculer les composantes d'un vecteur $\vec{b}$ orthogonal au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ et dont la norme égale $\frac{13}{2}$. *Rép.* $\vec{b} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

78. Trouver les sommets P et Q d'un carré $APBQ$, connaissant les extrémités $A(2 ; 1)$ et $B(3 ; -5)$ de l'une des diagonales.

Rép. $\left(\frac{11}{2} ; -\frac{3}{2}\right) ; \left(-\frac{1}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$

79. On donne $B(3 ; 4)$ et $C(1 ; -2)$. Trouver un point A tel que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en A .

Rép. $A(5 ; 0)$ ou $A(-1 ; 2)$

80. Un carré $OABC$ est donné par $A(6 ; 0)$, $B(6 ; 6)$ et $C(0 ; 6)$. Soient D , E et F tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA}$.

- 1) Montrer que les droites CF et ED ne sont pas perpendiculaires.
- 2) Déterminer D' sur le segment AB tel que CF soit perpendiculaire à ED' .
- 3) Déterminer les sommets G et H d'un carré $EDGH$.
- 4) Calculer l'aire du carré $EDGH$.

Rép. 2) $D'(6 ; \frac{8}{3})$ 3) $G(9 ; -1)$; $H(5 ; -4)$ ou $G(3 ; 7)$; $H(-1 ; 4)$ 4) 25

81. On considère le carré $OABC$ donné par $A(2 ; 0)$, $B(2 ; 2)$, $C(0 ; 2)$. Soit D le milieu de OC .

- a) Trouver les coordonnées du pied E de la perpendiculaire abaissée de C sur BD .
- b) Calculer l'aire du triangle CEB .

Rép. a) $E(\frac{2}{5} ; \frac{6}{5})$ b) $\frac{4}{5}$

82. On donne $O(0 ; 0)$ et $B(6 ; 6)$. Trouver deux points C et D tels que le quadrilatère $OCBD$ soit un losange dont la diagonale CD a une longueur double de celle de la diagonale OB .

Rép. $(9 ; -3)$; $(-3 ; 9)$

83. Soit les points $O(0 ; 0)$, $B(0 ; 3)$, $C(3 ; 4)$ et $D(4 ; 0)$. Trouver les milieux respectifs R , S , T et U de OB , BC , CD et DO , puis montrer qu'ils sont les sommets d'un carré.

Rép. $R(0 ; \frac{3}{2})$; $S(\frac{3}{2} ; \frac{7}{2})$; $T(\frac{7}{2} ; 2)$; $U(2 ; 0)$

84. On donne $O(0 ; 0)$, $A(4 ; 2)$, $B(-3 ; 2)$ et $C(0 ; 4)$. Calculer les angles suivants :

- 1) $\widehat{AOB}$
- 2) $\widehat{BOC}$
- 3) $\widehat{CAO}$
- 4) $\widehat{BAC}$

Rép. 1) $119,74^\circ$ 2) $56,31^\circ$ 3) $53,13^\circ$ 4) $26,57^\circ$

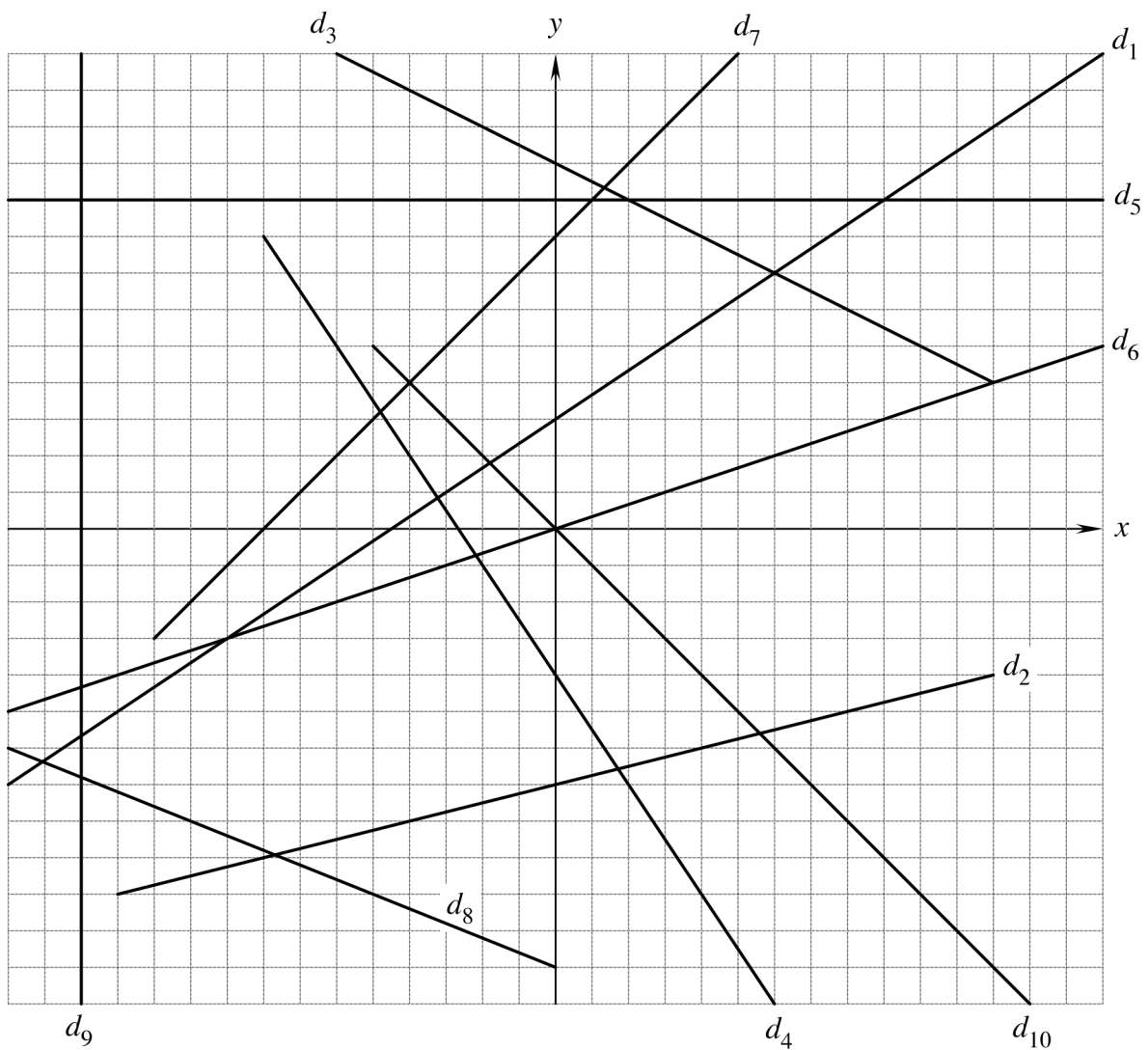
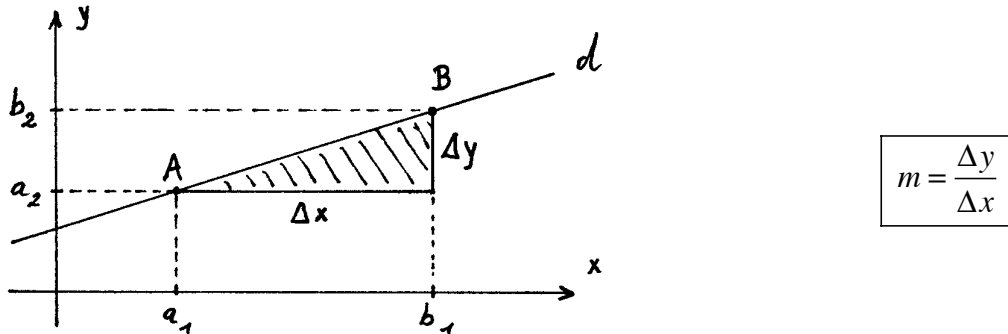
85. On donne les points $A(-2 ; 1)$, $B(2 ; -2)$ et $C(4 ; 4)$.

- 1) Calculer la longueur des côtés du triangle ABC .
- 2) Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point $E(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$.
- 3) Calculer les angles du triangle ABC , puis l'aire de celui-ci.

Rép. 1) $AB = 5$, $AC = 3\sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{10}$ 3) $\alpha = 63,43^\circ$; $\beta = 71,57^\circ$; $\gamma = 45^\circ$; Aire = 15

89. Donner la pente m des droites représentées ci-dessous.

Rappel : Si $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ sont deux points distincts d'une droite d , et si l'on pose $\Delta x = b_1 - a_1$ et $\Delta y = b_2 - a_2$, alors la pente de d est égale à $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Rép. 1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $-\frac{1}{2}$ 4) $-\frac{3}{2}$ 5) 0 6) $\frac{1}{3}$ 7) 1 8) $-\frac{2}{5}$ 9) ∞ 10) -1

90. Une droite admet le vecteur directeur $\vec{v}$. Donner la pente de cette droite.

- a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$
e) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 21 \\ 15 \end{pmatrix}$ f) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ g) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ h) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/7 \end{pmatrix}$

Rép. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) -2 d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{5}{7}$ f) $-\frac{1}{7}$ g) $\frac{35}{6}$ h) $-\frac{3}{7}$

91. Calculer la pente de la droite AB :

- 1) $A(1; 3), B(-2; 5)$ 2) $A(-1; 2), B(6; -5)$
3) $A(-1; -\frac{1}{3}), B(2; -4)$ 4) $A(3; 5), B(3; 9)$

Rép. 1) $-\frac{2}{3}$ 2) -1 3) $-\frac{11}{9}$ 4) ∞

92. On donne la pente m d'une droite d passant par $O(0; 0)$. Trouver un vecteur directeur de d , puis dessiner d .

- 1) $m = \frac{2}{3}$ 2) $m = \frac{3}{2}$ 3) $m = 0$ 4) $m = -3$ 5) $m = -\frac{1}{2}$ 6) $m = -0,1$

93. Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d'équation $y = 7x - 5$?

- $A(1; 2)$ $B(-1; 2)$
 $C(0; -5)$ $D(\frac{1}{14}; -\frac{9}{2})$
 $E(\frac{1}{7}; 4)$ $F(\alpha; -5 + 7\alpha)$

Rép. A, C, D, F sont sur la droite ; B, E ne sont pas sur la droite

94. On donne la droite $d : y = -2x + 3$. Déterminer (par calcul) le point de la droite d

- a) situé sur l'axe Ox b) situé sur l'axe Oy
c) dont l'abscisse est 3 d) dont l'ordonnée est 13.
e) dont les deux coordonnées sont égales f) qui appartient à la droite $e : y = 6x - 13$.

Rép. a) $(\frac{3}{2}; 0)$ b) $(0; 3)$
c) $(3; -3)$ d) $(-5; 13)$
e) $(1; 1)$ f) $(2; -1)$

95. Déterminer l'équation de chacune des droites suivantes.

d_1 : droite de pente 3 passant par $A(3 ; 4)$

d_2 : droite de pente -2 passant par $B(3 ; -5)$

d_3 : droite de pente $2/3$ passant par $C(-10 ; -2)$

d_4 : droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ passant par $D(7 ; -3)$

d_5 : droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ passant par $E(-1 ; -4)$

d_6 : droite passant par $F(1 ; 7)$ et $G(3 ; 11)$

d_7 : droite passant par $H(-1 ; 4)$ et $K(7 ; -20)$

d_8 : droite passant par $L(0 ; -5/3)$ et $M(3 ; 1/3)$

Rép. 1) $3x - y = 5$ 2) $2x + y = 1$ 3) $2x - 3y + 14 = 0$ 4) $3x + 2y = 15$
 5) $7x - y + 3 = 0$ 6) $2x - y + 5 = 0$ 7) $3x + y = 1$ 8) $2x - 3y - 5 = 0$

96. Donner les équations des droites suivantes :

d_1 : droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ passant par $A(2 ; 5)$

d_2 : droite passant par $C(3 ; 1)$ et $E(3 ; -5)$

d_3 : droite passant par $F(\frac{5}{7} ; 3)$ et $G(\frac{5}{7} ; \frac{13}{7})$

Rép. 1) $x = 2$ 2) $x = 3$ 3) $x = \frac{5}{7}$

97. On donne un vecteur $\vec{v}$ et un point A . Dans un repère orthonormé Oxy , dessiner une flèche représentant ce vecteur, puis tracer la droite de vecteur directeur $\vec{v}$, passant par A . Donner ensuite la pente de cette droite et son équation (forme $y = mx + h$).

1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A(0 ; 3)$ 2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A(3 ; 2)$

3) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ $A(0 ; -1)$ 4) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A(0 ; 5)$

Rép. 1) $y = \frac{2}{5}x + 3$ 2) $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ 3) $y = \frac{7}{3}x - 1$ 4) $y = 5$

98. Donner un vecteur directeur des droites suivantes, puis les dessiner, sans effectuer aucun calcul.

1. $y = 2x + 3$

3. $y = \frac{2}{3}x - 2$

2. $y = -\frac{1}{2}x - 5$

4. $y = -\frac{1}{4}x + 6$

Rép. 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

98 BIS. Trouver l'équation de la droite perpendiculaire à $\vec{n}$ et passant par le point P :

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $P(5 ; 4)$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P(-1 ; 6)$

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $P(1 ; 0)$

d) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P(72 ; -24)$

Rép. a) $2x + 3y = 22$ b) $x + y = 5$ c) $2x - 5y = 2$ d) $y + 24 = 0$

99. Déterminer un vecteur directeur de la droite AB , puis sa pente et son équation (forme $ax + by = c$).

1. $A(2 ; -1), B(5 ; -3)$

2. $A(0 ; 1), B(3 ; 22)$

3. $A(2 ; 3), B(2 ; 7)$

Rép. 1) $2x + 3y = 1$ 2) $7x - y = -1$ 3) $x = 2$

100. Donner l'équation de chacune des droites suivantes sous la forme $ax + by = c$.

1) Droite de pente $\frac{2}{3}$ passant par $A(2 ; -4)$.

2) Droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ passant par $A(-1 ; 2)$.

3) Droite AB : $A(1 ; 7), B(3 ; 11)$.

4) Droite perpendiculaire à CD , passant par C : $C(1 ; 3), D(-1 ; 2)$.

5) Droite d' perpendiculaire à d : $x - 3y + 1 = 0$, passant par $E(-1 ; 2)$.

Rép. 1) $2x - 3y = 16$ 2) $5x + 2y = -1$ 3) $2x - y = -5$
4) $2x + y = 5$ 5) $3x + y = -1$

101. On donne : $A(-2 ; 3), B(0 ; -1), C(2 ; 1)$. Calculer :

a) les coordonnées du centre K du cercle circonscrit à ABC .

b) le rayon du cercle circonscrit.

c) les angles du triangle ABC .

Rép. a) $K(-\frac{1}{3} ; \frac{4}{3})$ b) $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ c) $36,87^\circ ; 71,57^\circ ; 71,57^\circ$

102. Dans un repère Oxy , tracer les droites dont les équations sont :

1) $x + 2y = 12$

2) $3x - 5y = -15$

3) $4x - 3y = 0$

4) $y - 4 = 0$

5) $2x + 7 = 0$

6) $x = 6$

103. Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d'équation $5x - 2y - 11 = 0$?

- | | | |
|------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $A(1 ; -3)$ | 2) $B(3 ; 2)$ | 3) $C(2 ; -4)$ |
| 4) $D(-3 ; -13)$ | 5) $E(\frac{1}{2} ; -\frac{17}{4})$ | 6) $F(-\frac{4}{3} ; -\frac{5}{6})$ |

Rép. A, B, D et E sont sur la droite ; C et F non

104. On donne une droite $d : 2x + 5y = 20$. Déterminer le point de d

- | | |
|--|--|
| 1) situé sur l'axe Ox | 2) situé sur l'axe Oy |
| 3) dont l'ordonnée est 15 | 4) dont l'abscisse est 3 |
| 5) dont les deux coordonnées sont égales | 6) qui appartient à la droite $e : 3x - 2y = 11$ |

Rép. 1) $(10 ; 0)$ 2) $(0 ; 4)$ 3) $(-\frac{55}{2} ; 15)$ 4) $(3 ; \frac{14}{5})$ 5) $(\frac{20}{7} ; \frac{20}{7})$ 6) $(5 ; 2)$

105.—

- 1) On donne une droite d par son équation $ax - y + 8 = 0$. Trouver le nombre a afin que d passe par $P(10 ; 3)$.
- 2) Même question pour $d : 2x + ay + 5 = 0$ et $P(-2 ; 4)$.

Rép. 1) $a = -\frac{1}{2}$ 2) $a = -\frac{1}{4}$

106. Déterminer la pente m et un vecteur directeur $\vec{v}$ des droites suivantes :

- | | | |
|-------------------------|-----------------|------------------|
| 1) $5x - 6y = 7$ | 2) $x + y = 5$ | 3) $4x - 3y = 0$ |
| 4) $\sqrt{5}x - 4y = 5$ | 5) $3y - 8 = 0$ | 6) $x = 5$ |

Rép. 1) $\frac{5}{6} ; \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ 2) $-1 ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3) $\frac{4}{3} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 4) $\frac{\sqrt{5}}{4} ; \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ 5) $0 ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 6) $- ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

107. Une droite d a pour équation $2x - 3y = -7$. Trouver l'équation de la parallèle d' à d passant par $A(2 ; -5)$.

Rép. $2x - 3y = 19$

108. Indiquer si les droites d et e sont sécantes, strictement parallèles ou confondues : (on peut commencer par mettre les équations sous la forme $y = mx + h$)

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 1) $d : 4x - 2y = 1$ | $e : -2x + y = 5$ |
| 2) $d : 3x + y = 8$ | $e : 6x - 2y = 3$ |
| 3) $d : 8x - 4y = 2$ | $e : -4x + 2y + 1 = 0$ |

Rép. 1) strictement parallèles 2) sécantes 3) confondues

109. Déterminer le point d'intersection des droites d et e :

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) $d : 4x - 3y = 6$ | $e : 6x + y = 20$ |
| 2) $d : 3x - 7y = 57$ | $e : 2x + 3y + 8 = 0$ |
| 3) $d : 4x - 6y = 3$ | $e : -2x + 3y = 5$ |

Rép. 1) $(3; 2)$ 2) $(5; -6)$ 3) $\emptyset$

110. On donne $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(1; 1)$ et $D(0; 1)$.

- a) Trouver les coordonnées des points $K = AD \cap BC$, $L = AC \cap BD$ et du milieu M de AB .
b) Montrer que K, L et M sont alignés.

Rép. $K(0; 2)$, $L(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, $M(1; 0)$

111. Soit $A(8; 7)$, $B(2; 3)$ et $C(4; -3)$. Trouver l'équation de la médiane issue de A dans le triangle ABC , ainsi que les coordonnées du centre de gravité.

Rép. $7x - 5y = 21$; $G(\frac{14}{3}; \frac{7}{3})$

111 BIS. Donner l'équation de la parallèle à la droite d passant par le point P :

- | | |
|----------------------|-------------|
| 1) $d : 2x - 5y = 3$ | $P(1; 4)$ |
| 2) $d : x - 2y = -1$ | $P(7; 0)$ |
| 3) $d : 5x - 9y = 0$ | $P(-1; -2)$ |

Rép. 1) $2x - 5y + 18 = 0$ 2) $x - 2y = 7$ 3) $5x - 9y = 13$

112. Trouver l'équation de la droite d' passant par P et perpendiculaire à la droite d :

- | | |
|------------------------------------|-----------------------|
| 1) $P(5; 2)$ | $d : 3x - 5y + 4 = 0$ |
| 2) $P(-4; 6)$ | $d : x + 2y = 104$ |
| 3) $P(7; -3)$ | $d : 15y + 8 = 0$ |
| 4) $P(-\frac{5}{3}; -\frac{9}{8})$ | $d : -4x + 5y = 0$ |

Rép. 1) $5x + 3y = 31$ 2) $2x - y + 14 = 0$ 3) $x - 7 = 0$ 4) $30x + 24y + 77 = 0$

113. Déterminer les sommets d'un rectangle $ABCD$ dont on donne :

$$AD : 2x - y = -11 \qquad BC : 2x - y = -1 \qquad AC : y = 3$$

Rép. $A(-4; 3)$, $B(0; 1)$, $C(1; 3)$, $D(-3; 5)$

114. Déterminer les sommets B , C et D d'un rectangle $ABCD$ connaissant le sommet $A(2; 5)$, le centre du rectangle $P(11; 12)$ et la pente $m = -\frac{2}{3}$ de la droite AB .

Rép. $B(8; 1)$, $C(20; 19)$, $D(14; 23)$

115. Trouver la projection P du point $A(9; 5)$ sur la droite $d: 2x + y = 8$.

Rappel : la projection de A sur d est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur d .

Rép. $P(3; 2)$

116. Un triangle ABC est donné par $AB: y = 8$, $BC: 2x + y = 8$ et $AC: 2x - y = 8$.

Déterminer les projections de $P(9; 5)$ sur les droites AB , BC et AC , puis montrer qu'elles sont alignées.

Rép. $(9; 8)$, $(3; 2)$, $(7; 6)$

117. On donne $A(5; 3)$, $B(6; -2)$ et $C(-3; -8)$. Déterminer :

- a) l'équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .
- b) l'équation de la médiatrice du côté AB .

Rép. a) $3x + 2y = 21$ b) $x - 5y = 3$

118. Trouver le point P de la droite $d: 3x - 5y + 6 = 0$ qui est équidistant des points $A(3; -4)$ et $B(2; 1)$.

Rép. $P(-8; -\frac{18}{5})$

119. Trouver la projection du point $A(2; 6)$ sur la droite $d: 2x - 3y + 1 = 0$.

Rép. $(4; 3)$

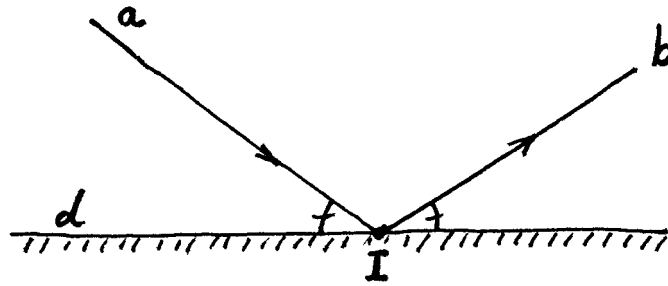
120. Trouver le point B symétrique du point $A(7; 3)$ relativement à la droite $d: 3x + 5y = 2$.

Rép. $B(1; -7)$

121. On donne les droites $d: 5x - 2y = 11$ et $a: x - y = 1$. Trouver l'équation de la droite d' symétrique de d par rapport à a .

Rép. $2x - 5y + 4 = 0$

122. Un rayon lumineux se déplace suivant la droite a d'équation $x - 2y + 5 = 0$. Après avoir atteint la droite $d : 3x - 2y + 7 = 0$, le rayon est réfléchi. Déterminer l'équation de la droite b qui porte le rayon réfléchi.



Rép. $29x - 2y = -33$

123. On donne le sommet $A(6; 12)$ d'un triangle ABC , ainsi que deux de ses hauteurs : $h_B : 2x + 7y = 65$ et $h_C : 2x - 5y = -17$. Calculer les coordonnées des deux autres sommets.

Rép. $B(8; 7)$, $C(4; 5)$

124. Déterminer les sommets B , C et D d'un carré $ABCD$, connaissant le point $A(-4; -7)$ et la droite $BD : 7x + 2y = 11$.

Rép. $B(1; 2)$, $C(10; -3)$, $D(5; -12)$

125. Déterminer les coordonnées des sommets B , C et D d'un carré $ABCD$, connaissant le point $A(3; 1)$ et la droite $CD : 2x - y = 0$.

Rép. $D(1; 2)$, $C : (2; 4)$ ou $(0; 0)$, $B : (4; 3)$ ou $(2; -1)$