

Géométrie analytique plane

2.

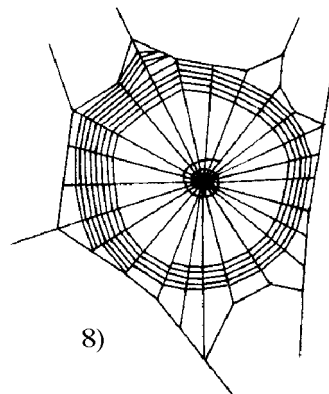
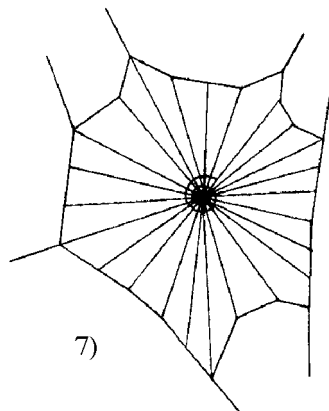
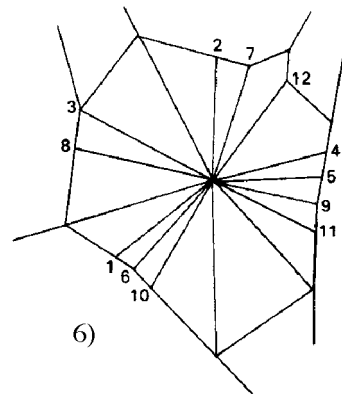
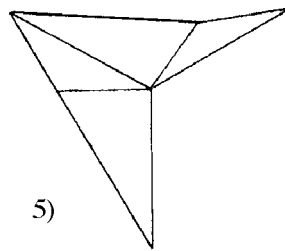
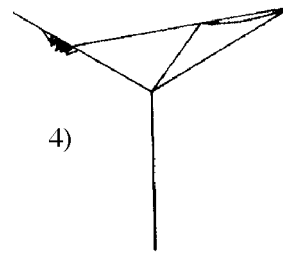
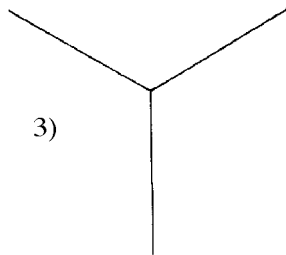
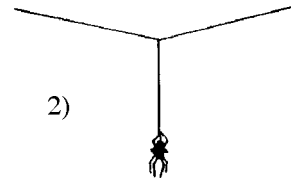


TABLE DES MATIÈRES

Rappels sur les vecteurs	30
Pente d'une droite	31
Equation d'une droite, première forme	32
Equation d'une droite, deuxième forme	33
Equation d'une droite donnée par pente et point	34
Pentes de deux droites perpendiculaires	35
Parallèles et perpendiculaires	36
Vecteur normal à une droite	37
Médiatrice d'un segment	38
Résumé sur les droites	39
Lignes principales du triangle	40
Projection orthogonale d'un vecteur	50
Distance d'un point à une droite	51
Bissectrices de deux droites	52
Equation d'un cercle	53
Positions relatives de deux cercles	54
Tangentes de pente m à un cercle	55
Cercle des neuf points	56
Tangentes communes	57

EXERCICES

§ 30. RAPPELS SUR LES VECTEURS

Règle de Chasles

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Vecteurs colinéaires

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ colinéaire à } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow ad = bc$$

Coordonnées

$$M(a, b) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Point milieu

Le milieu du segment AB est

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Centre de gravité

Le centre de gravité du triangle ABC est

$$G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$$

Norme

$$\text{Si } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Distance de deux points

$$\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Produit scalaire

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \varphi \end{aligned}$$

Angle de deux vecteurs

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Vecteurs perpendiculaires

$$\vec{u} \text{ perpendiculaire à } \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Rotation de 90°

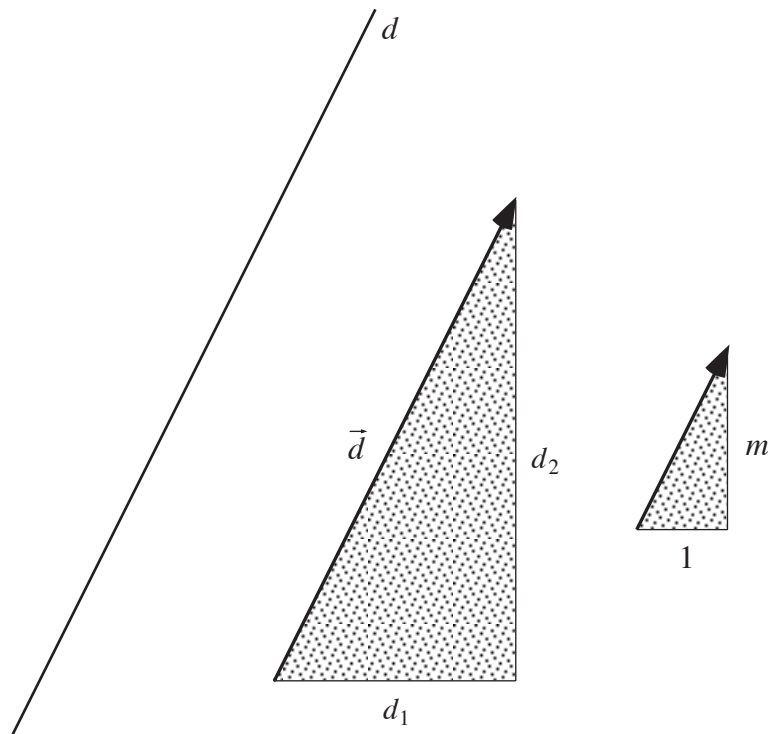
Les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\pm \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires
et de même norme

§ 31. PENTE D'UNE DROITE

Soit d une droite non verticale (= non parallèle à l'axe Oy) et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ un **vecteur directeur** de cette droite, c'est-à-dire n'importe quel vecteur dont la flèche représentative a même direction que d . On définit la **pente** m de la droite d comme suit :

$$m = \frac{d_2}{d_1}$$

La figure ci-dessous montre que ce nombre mesure l'inclinaison de la droite d relativement à l'axe Ox .



Si $m = 0$, la droite est horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'axe Ox ;
Si $m > 0$, la droite « monte » (en « lisant » de gauche à droite) ;
Si $m < 0$, la droite « descend ».

La pente d'une droite verticale n'est pas définie, mais on peut écrire $m = \infty$ (« m = infini »).

§ 32. ÉQUATION D'UNE DROITE, PREMIÈRE FORME

Soient m et h deux nombres réels. On sait que le graphe de la fonction $x \mapsto mx + h$ est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine h . Ainsi :

L'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que

$$y = mx + h$$

est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine h .

On dit que $y = mx + h$ est l'équation de la droite.

Cas particuliers

- Si $m = 0$, la droite est "**horizontale**" (parallèle à l'axe Ox) et son équation est

$$y = h$$

- L'équation d'une droite "**verticale**" (parallèle à l'axe Oy) d'abscisse a n'est pas du type $y = mx + h$ (car la pente est "infinie"), mais s'écrit

$$x = a$$

puisque l'ensemble de ses points est $\{ M(x, y) \mid x = a \}$.

Remarque

La droite d'équation $y = mx + h$ admet le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

§ 33. ÉQUATION D'UNE DROITE, DEUXIÈME FORME

Théorème

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, a et b n'étant pas tous deux nuls. L'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que

$$ax + by = c$$

est une droite.

Preuve

Posons $E = \{ M(x, y) \mid ax + by = c \}$.

- Si $b = 0$ ($\Rightarrow a \neq 0$, par hypothèse), on a :

$E = \{ M(x, y) \mid x = \frac{c}{a} \}$ = ensemble des points d'abscisse $\frac{c}{a}$. E est donc une droite, parallèle à l'axe Oy .

- Si $b \neq 0$:

$$ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \Leftrightarrow y = mx + h, \text{ avec } m = -\frac{a}{b} \text{ et } h = \frac{c}{b}.$$

L'ensemble E est donc bien une droite, en vertu du paragraphe précédent.

Corollaire

Si $b \neq 0$, la pente de la droite d'équation $ax + by = c$ est

$$m = -\frac{a}{b}$$

§ 34. ÉQUATION D'UNE DROITE DONNÉE PAR PENTE ET POINT

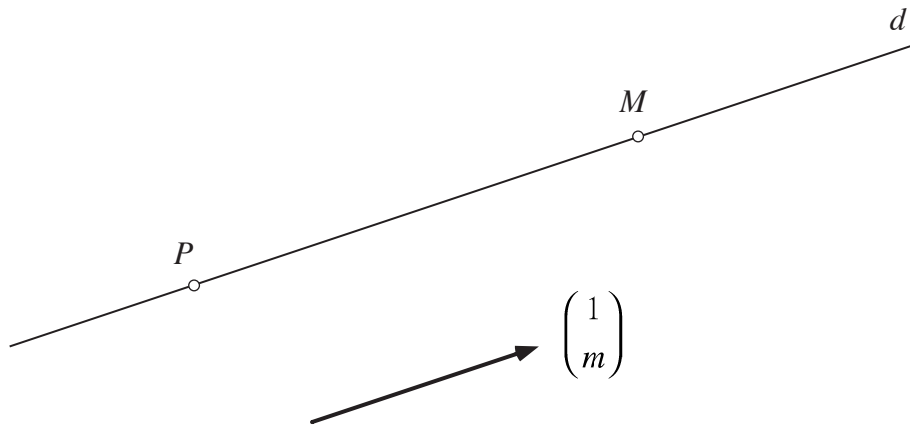
Théorème

Soit $P(p_1, p_2)$ un point et m un réel. La droite de pente m passant par P a pour équation :

$$y - p_2 = m(x - p_1)$$

Preuve

Appelons d la droite de pente m passant par P . On sait que $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .



Ainsi :

$$M(x, y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow y - p_2 = m(x - p_1).$$

D'où :

$$d = \{ M(x, y) \mid y - p_2 = m(x - p_1) \}$$

Exemple

Trouver l'équation de la droite passant par $A(2; 3)$ et $B(5; 7)$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{4}{3} \Rightarrow AB: y - 3 = \frac{4}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 3y - 9 = 4x - 8 \Leftrightarrow \underline{\underline{4x - 3y = -1}}.$$

§ 35. PENTES DE DEUX DROITES PERPENDICULAIRES

On considère une droite d de pente $m \neq 0$ et une droite d' de pente $m' \neq 0$. Alors :

$$d \perp d' \Leftrightarrow m \cdot m' = -1 \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m} \Leftrightarrow m' \text{ est l'opposé de l'inverse de } m$$

Preuve

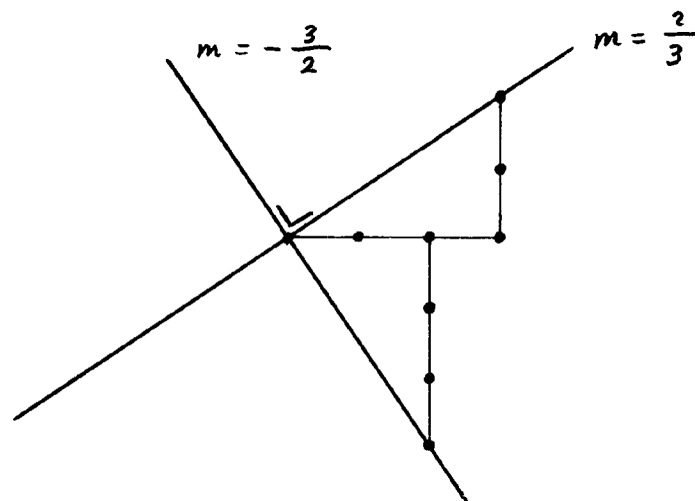
Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de d et d' , respectivement. Par conséquent :

$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 1 + mm' = 0 \Leftrightarrow mm' = -1$$

$$\text{Ainsi : } d \perp d' \Leftrightarrow mm' = -1 \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}.$$

Exemple

Les droites $y = \frac{2}{3}x + 7$ et $y = -\frac{3}{2}x + 13$ sont perpendiculaires. Ci-dessous, une petite figure illustrant à merveille la situation...



§ 36. PARALLÈLES ET PERPENDICULAIRES

Proposition

- 1) Les droites $d : ax + by = c$ et $d' : ax + by = c'$ sont parallèles (confondues si $c = c'$).
- 2) Les droites $d : ax + by = c$ et $d'' : bx - ay = c''$ sont perpendiculaires.

Preuve

- 1) Les droites d et d' ont la même pente : $-\frac{a}{b}$.
- 2) Elles sont perpendiculaires car le produit de leurs pentes est égal à -1 :

$$-\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$$

Applications

- Trouver l'équation de la **parallèle** d' à $d : 2x + 3y = 5$ passant par le point $P(-2 ; 7)$.

Solution

En vertu de la proposition, on peut déjà écrire : $d' : 2x + 3y = c$. On obtient ensuite le terme constant c en utilisant le fait que P est sur d' ; il suffit de remplacer x et y dans le membre de gauche par les coordonnées de P : $c = 2(-2) + 3 \cdot 7 = 17$. Ainsi :

$$d' : 2x + 3y = 17$$

- Trouver l'équation de la **perpendiculaire** d'' à $d : 2x + 3y = 5$ passant par le point $P(-2 ; 7)$.

Solution

La deuxième partie de la proposition donne : $d'' : 3x - 2y = k$. Comme avant, on calcule k en se servant des coordonnées de P : $k = 3(-2) - 2 \cdot 7 = -20$. D'où :

$$d'' : 3x - 2y = -20$$

§ 37. VECTEUR NORMAL À UNE DROITE

Définition

Un vecteur non nul perpendiculaire à une droite d est dit **normal** à d .

Théorème

Soient a et b deux réels non tous deux nuls.

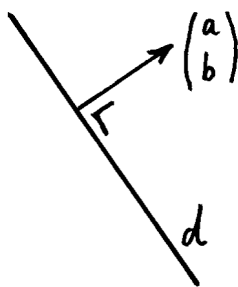
$$\text{Le vecteur } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est normal à la droite } d : ax + by = c$$

Preuve

1) Si $b \neq 0$: $ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$; $\Rightarrow$ la pente de d est $-\frac{a}{b}$; $\Rightarrow d$ admet le vecteur directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$; $\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à d .

2) Si $b = 0$: $ax + by = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$; $\Rightarrow d$ est une droite verticale (parallèle à Oy).

Or $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ est horizontal (parallèle à Ox) ; $\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à d .



Application. Trouver l'équation de la hauteur h issue de A dans le triangle de sommets $A(2 ; 3)$, $B(1 ; 5)$ et $C(8 ; 7)$.

Solution. h est perpendiculaire à $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Cela donne le début de l'équation de h : $7x + 2y = c$.

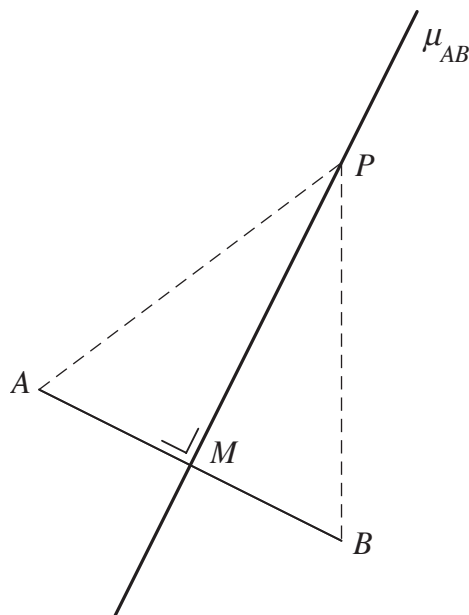
On trouve c en remplaçant x et y par les coordonnées de A : $c = 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 20$. Finalement :

$$h : 7x + 2y = 20$$

§ 38. MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

Définition

La médiatrice d'un segment AB — notée μ_{AB} — est la droite coupant le segment perpendiculairement en son milieu. C'est aussi le *lieu géométrique des points situés à égale distance des extrémités A et B du segment*.



$$P \in \mu_{AB} \Leftrightarrow \delta(P; A) = \delta(P; B)$$

Trouver l'équation d'une médiatrice

Soient par exemple les points $A(2; 3)$ et $B(4; 11)$.

Méthode 1

1. Milieu M de AB : $\left(\frac{2+4}{2}; \frac{3+11}{2}\right) = (3; 7)$
2. Vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$; pente de AB : $\frac{8}{2} = 4$
3. Pente de μ_{AB} : $-\frac{1}{4}$
(opposé de l'inverse de 4)
4. Equation de μ_{AB} : $y - 7 = -\frac{1}{4}(x - 3)$
 $\Leftrightarrow 4y - 28 = -x + 3 \Leftrightarrow x + 4y = 31$

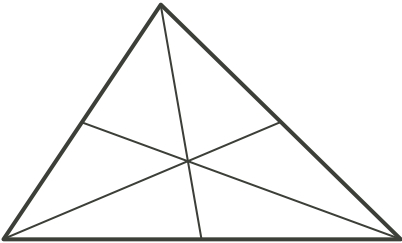
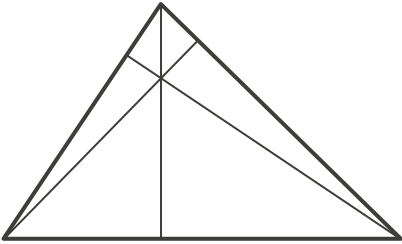
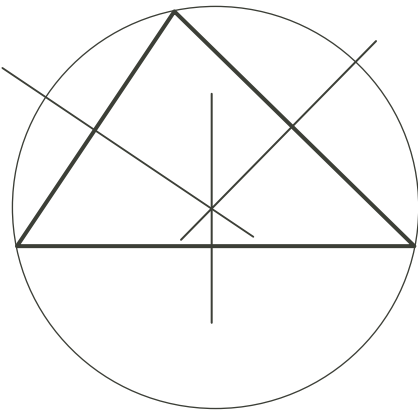
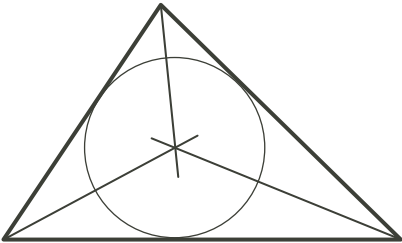
Méthode 2

1. Milieu M de AB : $\left(\frac{2+4}{2}; \frac{3+11}{2}\right) = (3; 7)$
2. Vecteur normal à μ_{AB} : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
3. Equation de μ_{AB} :
 $1 \cdot x + 4 \cdot y = 31 \Leftrightarrow x + 4y = 31$
(on a trouvé le terme constant 31 en remplaçant x et y par les coordonnées du milieu : 3 et 7)

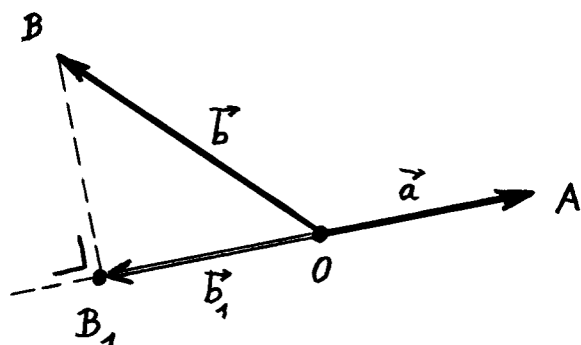
§ 39. RÉSUMÉ SUR LES DROITES

Pente d'une droite de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$	$m = \frac{d_2}{d_1} \quad \left(= \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$
Pente de la droite AB	$m = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}$
Equation d'une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine h	$y = mx + h$
Equation d'une droite perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$ax + by = c$
Pente d'une droite d'équation $ax + by = c$	$m = -\frac{a}{b}$
Equation d'une droite de pente m passant par $P(p_1, p_2)$	$y - p_2 = m(x - p_1)$
Equation d'une droite de pente $\frac{p}{q}$	$px - qy = c$
Condition de perpendicularité pour deux droites de pentes m et m'	$m m' = -1 \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$ m' est l'opposé de l'inverse de m

§ 40. LIGNES PRINCIPALES DU TRIANGLE

	Une médiane joint un sommet et le milieu du côté opposé. Les médianes se coupent au centre de gravité du triangle. Le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane, à partir du sommet.
	Une hauteur passe par un sommet du triangle et est perpendiculaire au côté opposé. Les hauteurs se coupent en un point appelé orthocentre du triangle.
	Une médiatrice passe par le milieu d'un côté et est perpendiculaire à ce côté. Les médiatrices se coupent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.
	Une bissectrice divise un angle en deux parties égales. Les bissectrices se coupent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

§ 50. PROJECTION ORTHOGONALE D'UN VECTEUR



Soit $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ deux vecteurs, $\vec{a}$ étant supposé non nul.

Appelons B_1 la projection de B sur la droite OA .

Le vecteur $\vec{b}_1$ est, par définition, la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.

Théorème

$$\vec{b}_1 = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \right) \vec{a}$$

[$\vec{a} \cdot \vec{b}$ désigne le produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$]

Preuve

Clairement, $\vec{b}_1 = \lambda \vec{a}$; il suffit donc d'exprimer λ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \overline{BB_1} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \overline{BB_1} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot (\overline{OB_1} - \overline{OB}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b}_1 - \vec{b}) = 0 \\ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}_1 - \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}_1 = \vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \lambda \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Rightarrow \lambda (\vec{a} \cdot \vec{a}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \lambda \|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}. \end{aligned}$$

Corollaire

$$\|\vec{b}_1\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|}$$

Preuve

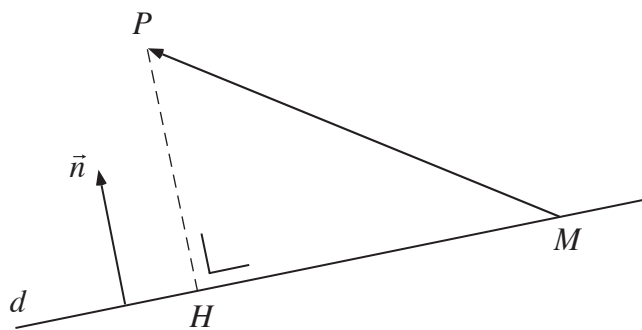
$$\|\vec{b}_1\| = \|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \|\vec{a}\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|}$$

§ 51. DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

La distance d'un point $P(p_1, p_2)$ à une droite d d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule :

$$\delta(P, d) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Preuve



Soit :

H la projection de P sur la droite d ,

$M(\alpha, \beta)$ un point de d ,

et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, vecteur normal à d .

La distance de P à d n'est autre que la norme de la projection du vecteur $\overrightarrow{MP}$ sur le vecteur $\vec{n}$.
On peut donc écrire, grâce à une formule connue :

$$\delta(P, d) = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Comme $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} p_1 - \alpha \\ p_2 - \beta \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a :

$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} = a(p_1 - \alpha) + b(p_2 - \beta) = ap_1 + bp_2 - a\alpha - b\beta$$

Or $-a\alpha - b\beta = c$, puisque $M(\alpha, \beta) \in d$.

D'où : $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} = ap_1 + bp_2 + c$, et enfin

$$\delta(P, d) = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

§ 52. BISSECTRICES DE DEUX DROITES

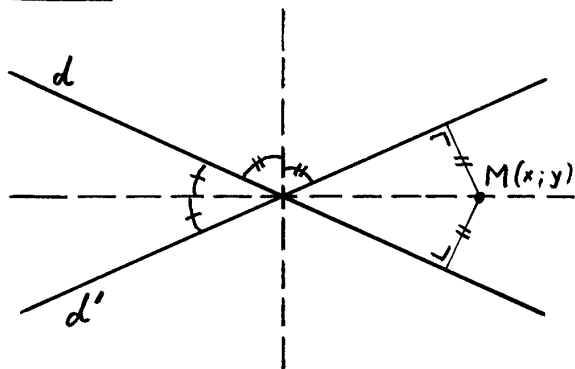
Soient $d: ax+by+c=0$ et $d': a'x+b'y+c'=0$ deux droites sécantes.

Théorème

Les bissectrices de d et d' ont pour équations :

$$\boxed{\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}}$$

Preuve



$M(x, y) \in$ une bissectrice

$$\Leftrightarrow S(M; d) = S(M; d')$$

$$\Leftrightarrow \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

Exemple

$$d: x+y=4 \quad ; \quad d': x-7y=12$$

$$\text{bissectrices de } d \text{ et } d' : \frac{x+y-4}{\sqrt{2}} = \pm \frac{x-7y-12}{\sqrt{50}} ;$$

$$\oplus \quad \frac{x+y-4}{\sqrt{2}} = \frac{x-7y-12}{5\sqrt{2}}$$

$$5(x+y-4) = x-7y-12$$

$$4x+12y=8$$

$$\underline{\underline{x+3y=2}}$$

$$\ominus \quad \frac{x+y-4}{\sqrt{2}} = \frac{-(x-7y-12)}{5\sqrt{2}}$$

$$5(x+y-4) = -x+7y+12$$

$$6x-2y-32=0$$

$$\underline{\underline{3x-y=16}}$$

§ 53. ÉQUATION D'UN CERCLE

Soit Γ le cercle de centre $C(\alpha, \beta)$ et de rayon r .

Théorème

Le cercle Γ est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Preuve

$$M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow \|\overrightarrow{CM}\| = r \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \right\| = r \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Remarque

On appelle *équation canonique* de Γ la relation $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$. En développant le premier membre de cette relation, on voit que toute équation d'un cercle peut s'écrire sous la forme

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

Exemples

1) Equation du cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon 1 :

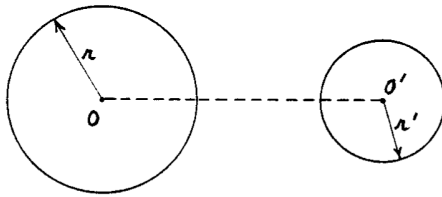
$$x^2 + y^2 = 1$$

2) Equation du cercle de centre $C(2; -3)$ et de rayon 5 :

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

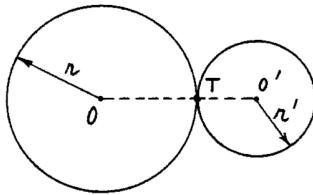
§ 54. POSITIONS RELATIVES DE DEUX CERCLES

1. Cercles disjoints extérieurement



$$OO' > r + r'$$

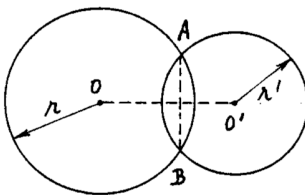
2. Cercles tangents extérieurement



$$OO' = r + r'$$

le point de contact T
est aligné sur O et O'

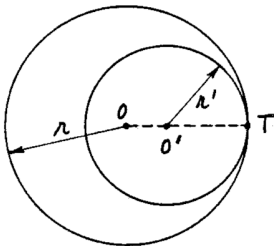
3. Cercles sécants



$$|r - r'| < OO' < r + r'$$

OO' est la médiatrice de
la corde commune AB

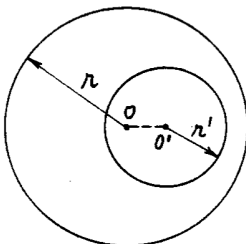
4. Cercles tangents intérieurement



$$OO' = |r - r'| \quad (r \neq r')$$

le point de contact T
est aligné sur O et O'

5. Cercles disjoints intérieurement



$$OO' < |r - r'|$$

Si $O = O'$, les
cercles sont concentriques

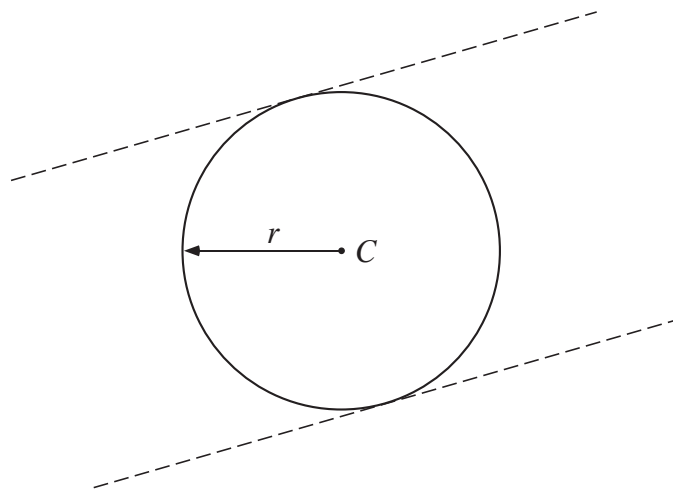
§ 55. TANGENTES DE PENTE m À UN CERCLE

Théorème

Soit Γ un cercle de centre $C(\alpha, \beta)$ et de rayon r . Les tangentes de pente m au cercle Γ ont pour équations :

$$y - \beta = m(x - \alpha) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

Preuve



Les deux tangentes de pente m ont des équations de la forme

$$y = mx + h \quad \Leftrightarrow \quad mx - y + h = 0.$$

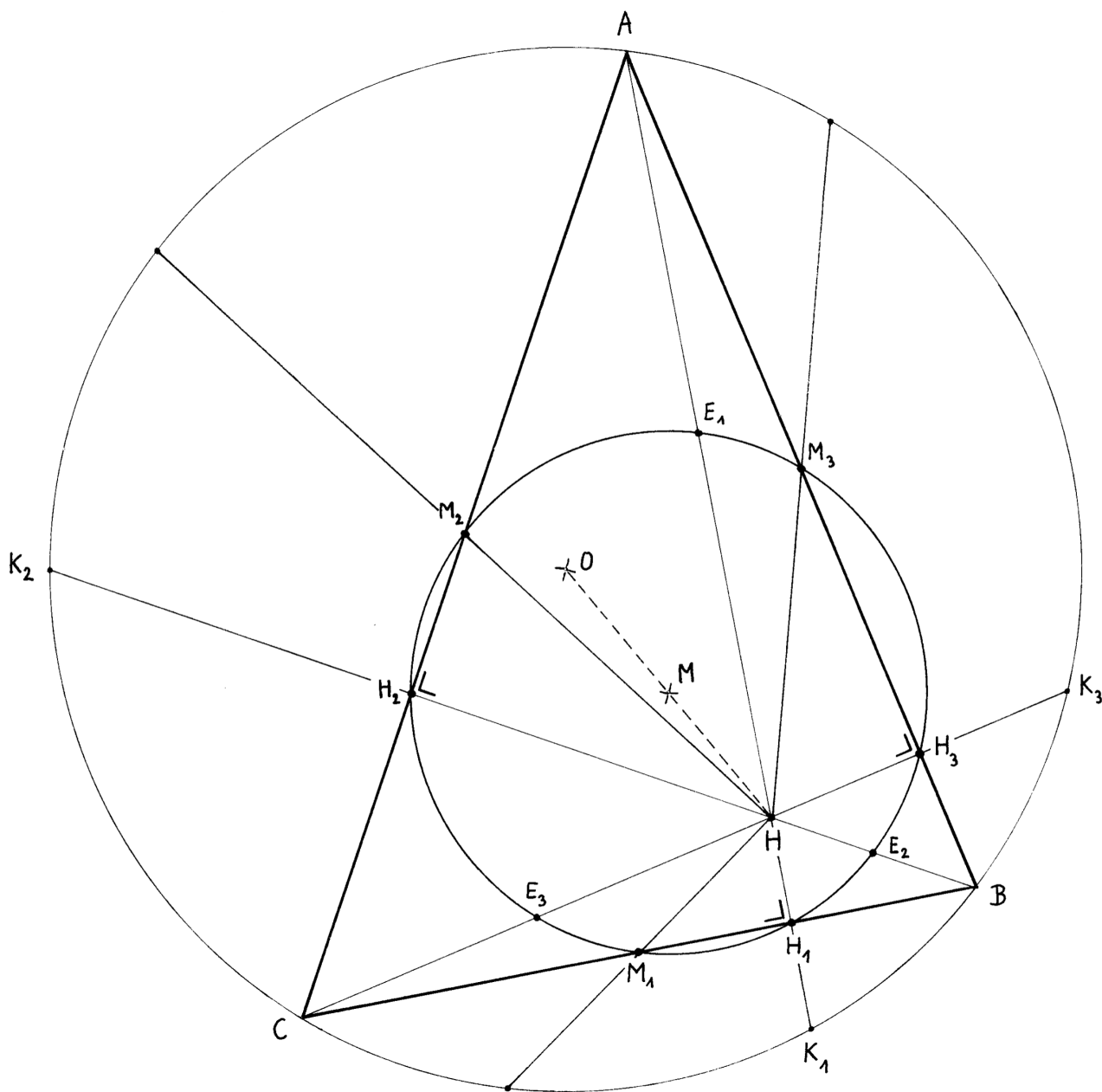
La distance de ces tangentes au centre $C(\alpha, \beta)$ du cercle étant égale au rayon r , on a :

$$\begin{aligned} \frac{|m\alpha - \beta + h|}{\sqrt{m^2 + 1}} &= r \quad \Leftrightarrow \quad |m\alpha - \beta + h| = r\sqrt{m^2 + 1} \\ \Leftrightarrow \quad m\alpha - \beta + h &= \pm r\sqrt{m^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad h = -m\alpha + \beta \pm r\sqrt{m^2 + 1}. \end{aligned}$$

Les tangentes admettent donc les équations

$$y = mx - m\alpha + \beta \pm r\sqrt{m^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad y - \beta = m(x - \alpha) \pm r\sqrt{m^2 + 1}.$$

§ 56. CERCLE DES NEUF POINTS



§ 57. TANGENTES COMMUNES

Soient $\Gamma_1(C_1, r_1)$ et $\Gamma_2(C_2, r_2)$ deux cercles possédant au moins une paire de tangentes communes se coupant en un point P de la droite C_1C_2 (cf. figures page suivante).

Pour trouver les équations de ces tangentes, procéder comme suit :

1. Déterminer P au moyen de la relation ci-dessous, découlant de la similitude des triangles PC_1T_1 et PC_2T_2 :

$$\frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{PC_2}} = \pm \frac{r_1}{r_2}$$

(Ne résoudre l'équation avec le signe *moins* que s'il y a des tangentes communes intérieures.)

2. Les équations des deux tangentes issues de P s'écrivent

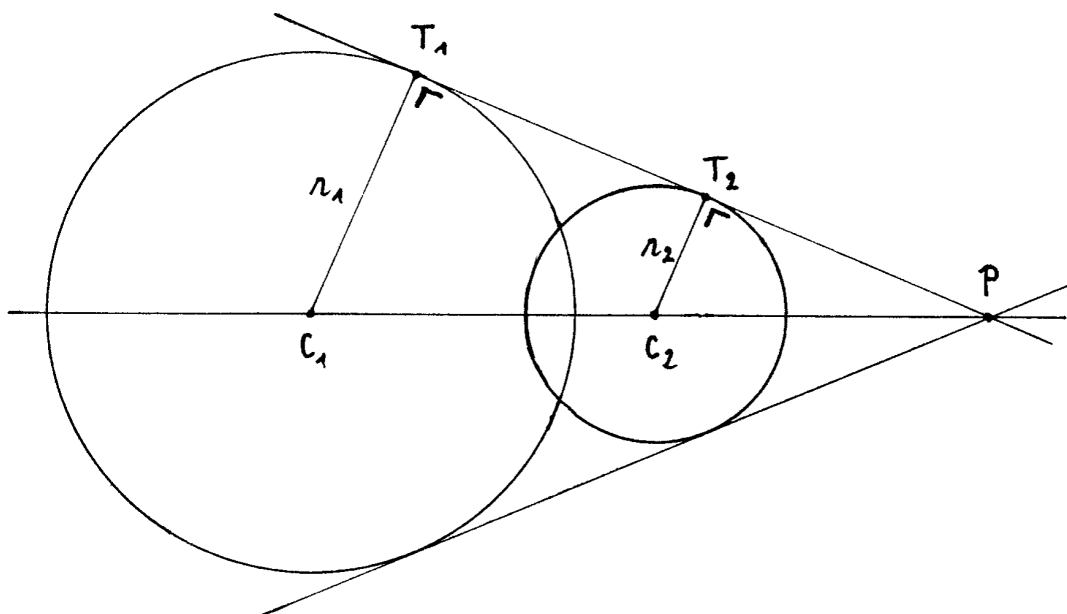
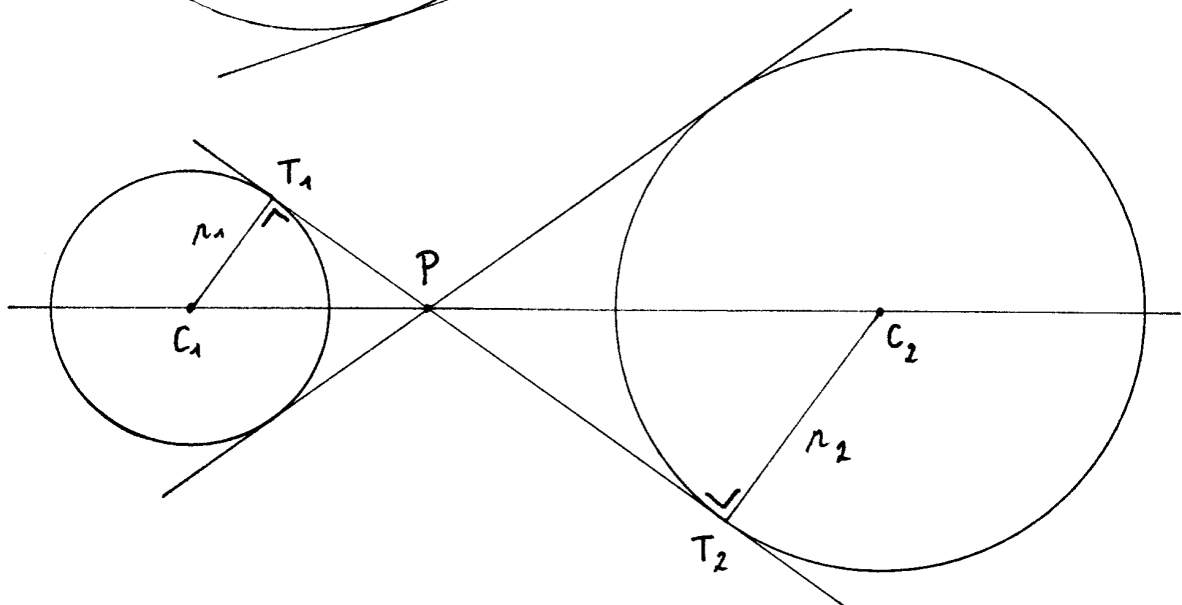
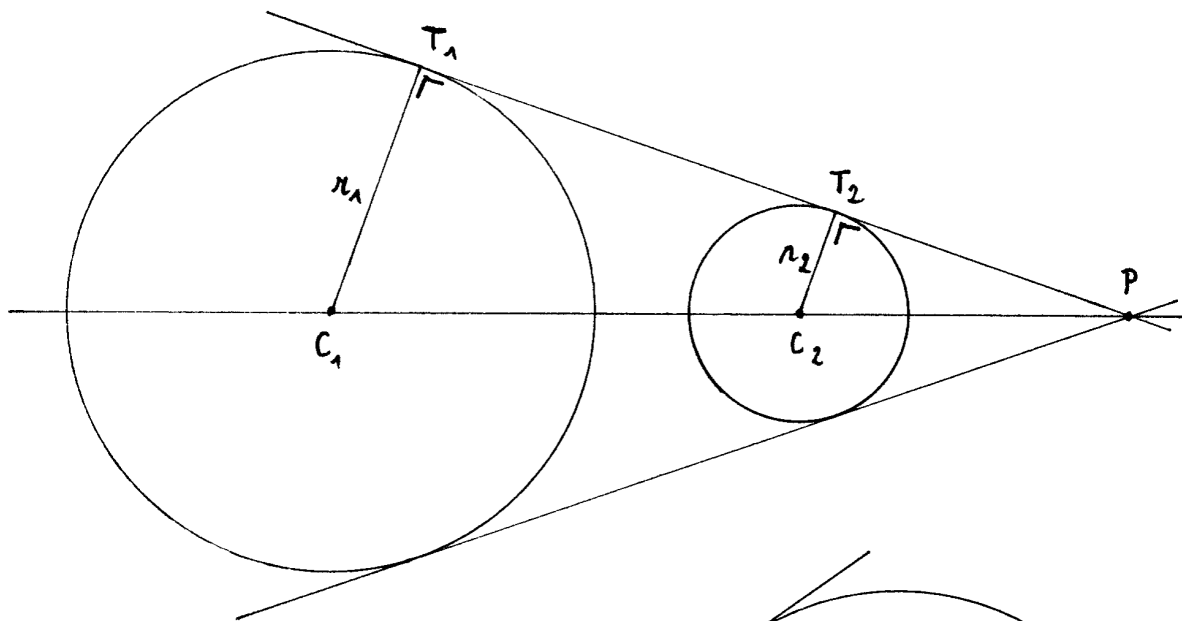
$$t : y - \beta = m(x - \alpha) \pm r_1 \sqrt{m^2 + 1}$$

où α et β sont les coordonnées de C_1 .

On trouve les pentes m en résolvant l'équation exprimant que $P(p_1, p_2)$ est sur t :

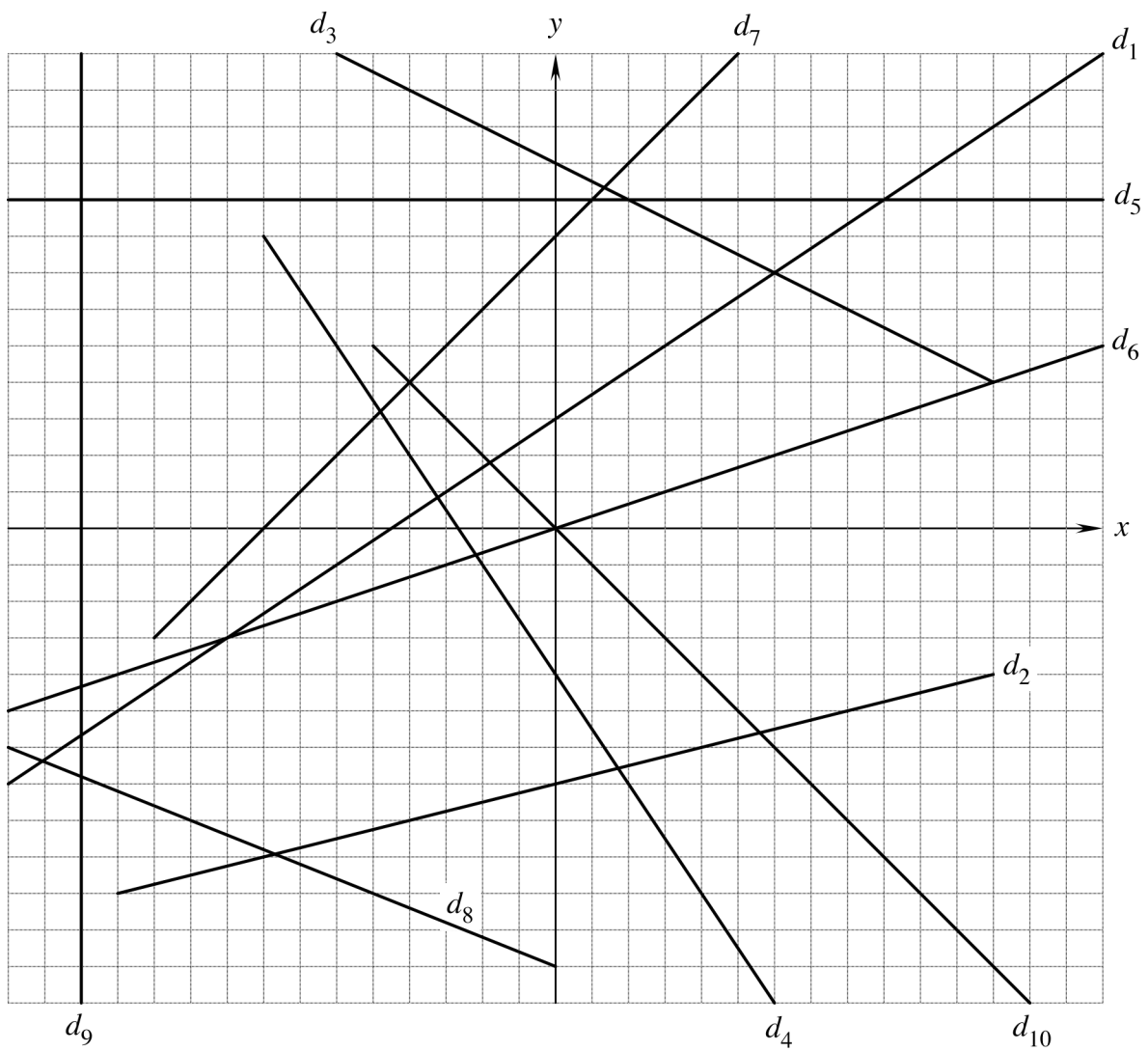
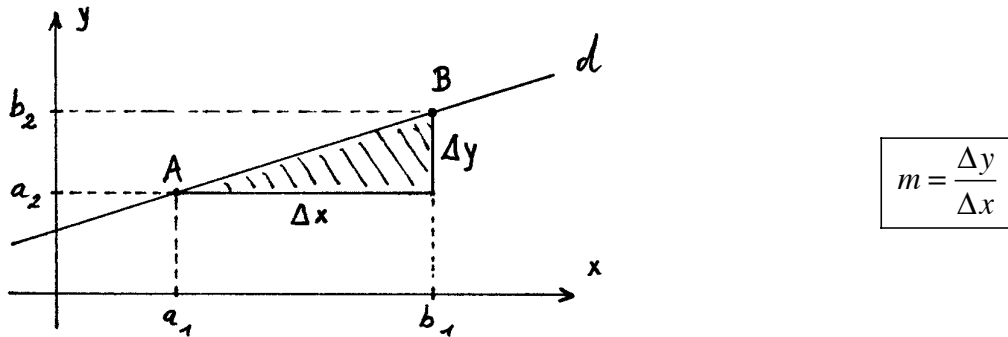
$$p_2 - \beta = m(p_1 - \alpha) \pm r_1 \sqrt{m^2 + 1}$$

(Si l'on n'obtient qu'une valeur de m , c'est que l'une des tangentes est verticale. Son équation est donc $x = p_1$.)



89. Donner la pente m des droites représentées ci-dessous.

Rappel : Si $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ sont deux points distincts d'une droite d , et si l'on pose $\Delta x = b_1 - a_1$ et $\Delta y = b_2 - a_2$, alors la pente de d est égale à $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Rép. 1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $-\frac{1}{2}$ 4) $-\frac{3}{2}$ 5) 0 6) $\frac{1}{3}$ 7) 1 8) $-\frac{2}{5}$ 9) ∞ 10) -1

90. Une droite admet le vecteur directeur $\vec{v}$. Donner la pente de cette droite.

- a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$
e) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 21 \\ 15 \end{pmatrix}$ f) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ g) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ h) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/7 \end{pmatrix}$

Rép. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) -2 d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{5}{7}$ f) $-\frac{1}{7}$ g) $\frac{35}{6}$ h) $-\frac{3}{7}$

91. Calculer la pente de la droite AB :

- 1) $A(1; 3), B(-2; 5)$ 2) $A(-1; 2), B(6; -5)$
3) $A(-1; -\frac{1}{3}), B(2; -4)$ 4) $A(3; 5), B(3; 9)$

Rép. 1) $-\frac{2}{3}$ 2) -1 3) $-\frac{11}{9}$ 4) ∞

92. On donne la pente m d'une droite d passant par $O(0; 0)$. Trouver un vecteur directeur de d , puis dessiner d .

- 1) $m = \frac{2}{3}$ 2) $m = \frac{3}{2}$ 3) $m = 0$ 4) $m = -3$ 5) $m = -\frac{1}{2}$ 6) $m = -0,1$

93. Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d'équation $y = 7x - 5$?

- $A(1; 2)$ $B(-1; 2)$
 $C(0; -5)$ $D(\frac{1}{14}; -\frac{9}{2})$
 $E(\frac{1}{7}; 4)$ $F(\alpha; -5 + 7\alpha)$

Rép. A, C, D, F sont sur la droite ; B, E ne sont pas sur la droite

94. On donne la droite $d : y = -2x + 3$. Déterminer (par calcul) le point de la droite d

- a) situé sur l'axe Ox b) situé sur l'axe Oy
c) dont l'abscisse est 3 d) dont l'ordonnée est 13.
e) dont les deux coordonnées sont égales f) qui appartient à la droite $e : y = 6x - 13$.

Rép. a) $(\frac{3}{2}; 0)$ b) $(0; 3)$
c) $(3; -3)$ d) $(-5; 13)$
e) $(1; 1)$ f) $(2; -1)$

95. Déterminer l'équation de chacune des droites suivantes.

d_1 : droite de pente 3 passant par $A(3 ; 4)$

d_2 : droite de pente -2 passant par $B(3 ; -5)$

d_3 : droite de pente $2/3$ passant par $C(-10 ; -2)$

d_4 : droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ passant par $D(7 ; -3)$

d_5 : droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ passant par $E(-1 ; -4)$

d_6 : droite passant par $F(1 ; 7)$ et $G(3 ; 11)$

d_7 : droite passant par $H(-1 ; 4)$ et $K(7 ; -20)$

d_8 : droite passant par $L(0 ; -5/3)$ et $M(3 ; 1/3)$

Rép. 1) $3x - y = 5$ 2) $2x + y = 1$ 3) $2x - 3y + 14 = 0$ 4) $3x + 2y = 15$
 5) $7x - y + 3 = 0$ 6) $2x - y + 5 = 0$ 7) $3x + y = 1$ 8) $2x - 3y - 5 = 0$

96. Donner les équations des droites suivantes :

d_1 : droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ passant par $A(2 ; 5)$

d_2 : droite passant par $C(3 ; 1)$ et $E(3 ; -5)$

d_3 : droite passant par $F(\frac{5}{7} ; 3)$ et $G(\frac{5}{7} ; \frac{13}{7})$

Rép. 1) $x = 2$ 2) $x = 3$ 3) $x = \frac{5}{7}$

97. On donne un vecteur $\vec{v}$ et un point A . Dans un repère orthonormé Oxy , dessiner une flèche représentant ce vecteur, puis tracer la droite de vecteur directeur $\vec{v}$, passant par A . Donner ensuite la pente de cette droite et son équation (forme $y = mx + h$).

1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A(0 ; 3)$ 2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A(3 ; 2)$

3) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ $A(0 ; -1)$ 4) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A(0 ; 5)$

Rép. 1) $y = \frac{2}{5}x + 3$ 2) $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ 3) $y = \frac{7}{3}x - 1$ 4) $y = 5$

98. Donner un vecteur directeur des droites suivantes, puis les dessiner, sans effectuer aucun calcul.

1. $y = 2x + 3$

3. $y = \frac{2}{3}x - 2$

2. $y = -\frac{1}{2}x - 5$

4. $y = -\frac{1}{4}x + 6$

Rép. 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

99. Trouver l'équation de la droite perpendiculaire à $\vec{n}$ et passant par le point P :

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $P(5 ; 4)$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P(-1 ; 6)$

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $P(1 ; 0)$

d) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P(72 ; -24)$

Rép. a) $2x + 3y = 22$ b) $x + y = 5$ c) $2x - 5y = 2$ d) $y + 24 = 0$

100. Déterminer un vecteur directeur de la droite AB , puis sa pente et son équation (forme $ax + by = c$).

1. $A(2 ; -1), B(5 ; -3)$

2. $A(0 ; 1), B(3 ; 22)$

3. $A(2 ; 3), B(2 ; 7)$

Rép. 1) $2x + 3y = 1$ 2) $7x - y = -1$ 3) $x = 2$

101. Donner l'équation de chacune des droites suivantes sous la forme $ax + by = c$.

1) Droite de pente $\frac{2}{3}$ passant par $A(2 ; -4)$.

2) Droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ passant par $A(-1 ; 2)$.

3) Droite AB : $A(1 ; 7), B(3 ; 11)$.

4) Droite perpendiculaire à CD , passant par C : $C(1 ; 3), D(-1 ; 2)$.

5) Droite d' perpendiculaire à d : $x - 3y + 1 = 0$, passant par $E(-1 ; 2)$.

Rép. 1) $2x - 3y = 16$ 2) $5x + 2y = -1$ 3) $2x - y = -5$
4) $2x + y = 5$ 5) $3x + y = -1$

102. Dans un repère Oxy , tracer les droites dont les équations sont :

1) $x + 2y = 12$

2) $3x - 5y = -15$

3) $4x - 3y = 0$

4) $y - 4 = 0$

5) $2x + 7 = 0$

6) $x = 6$

103. Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d'équation $5x - 2y - 11 = 0$?

1) $A(1 ; -3)$

2) $B(3 ; 2)$

3) $C(2 ; -4)$

4) $D(-3 ; -13)$

5) $E\left(\frac{1}{2} ; -\frac{17}{4}\right)$

6) $F\left(-\frac{4}{3} ; -\frac{5}{6}\right)$

Rép. A, B, D et E sont sur la droite ; C et F non

104. On donne une droite $d : 2x + 5y = 20$. Déterminer le point de d

- | | |
|--|--|
| 1) situé sur l'axe Ox | 2) situé sur l'axe Oy |
| 3) dont l'ordonnée est 15 | 4) dont l'abscisse est 3 |
| 5) dont les deux coordonnées sont égales | 6) qui appartient à la droite $e : 3x - 2y = 11$ |

Rép. 1) $(10 ; 0)$ 2) $(0 ; 4)$ 3) $(-\frac{55}{2} ; 15)$ 4) $(3 ; \frac{14}{5})$ 5) $(\frac{20}{7} ; \frac{20}{7})$ 6) $(5 ; 2)$

105.—

- 1) On donne une droite d par son équation $ax - y + 8 = 0$. Trouver le nombre a afin que d passe par $P(10 ; 3)$.
- 2) Même question pour $d : 2x + ay + 5 = 0$ et $P(-2 ; 4)$.

Rép. 1) $a = -\frac{1}{2}$ 2) $a = -\frac{1}{4}$

106. Déterminer la pente m et un vecteur directeur $\vec{v}$ des droites suivantes :

- | | | |
|-------------------------|-----------------|------------------|
| 1) $5x - 6y = 7$ | 2) $x + y = 5$ | 3) $4x - 3y = 0$ |
| 4) $\sqrt{5}x - 4y = 5$ | 5) $3y - 8 = 0$ | 6) $x = 5$ |

Rép. 1) $\frac{5}{6} ; \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ 2) $-1 ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3) $\frac{4}{3} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 4) $\frac{\sqrt{5}}{4} ; \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ 5) $0 ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 6) $- ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

107. Une droite d a pour équation $2x - 3y = -7$. Trouver l'équation de la parallèle d' à d passant par $A(2 ; -5)$.

Rép. $2x - 3y = 19$

108. Indiquer si les droites d et e sont sécantes, strictement parallèles ou confondues : (on peut commencer par mettre les équations sous la forme $y = mx + h$)

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 1) $d : 4x - 2y = 1$ | $e : -2x + y = 5$ |
| 2) $d : 3x + y = 8$ | $e : 6x - 2y = 3$ |
| 3) $d : 8x - 4y = 2$ | $e : -4x + 2y + 1 = 0$ |

Rép. 1) strictement parallèles 2) sécantes 3) confondues

109. Déterminer le point d'intersection des droites d et e :

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) $d : 4x - 3y = 6$ | $e : 6x + y = 20$ |
| 2) $d : 3x - 7y = 57$ | $e : 2x + 3y + 8 = 0$ |
| 3) $d : 4x - 6y = 3$ | $e : -2x + 3y = 5$ |

Rép. 1) $(3; 2)$ 2) $(5; -6)$ 3) $\emptyset$

110. On donne $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(1; 1)$ et $D(0; 1)$.

- a) Trouver les coordonnées des points $K = AD \cap BC$, $L = AC \cap BD$ et du milieu M de AB .
b) Montrer que K, L et M sont alignés.

Rép. $K(0; 2)$, $L(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, $M(1; 0)$

111. Soit $A(8; 7)$, $B(2; 3)$ et $C(4; -3)$. Trouver l'équation de la médiane issue de A dans le triangle ABC , ainsi que les coordonnées du centre de gravité.

Rép. $7x - 5y = 21$; $G(\frac{14}{3}; \frac{7}{3})$

111 BIS. Donner l'équation de la parallèle à la droite d passant par le point P :

- | | |
|----------------------|-------------|
| 1) $d : 2x - 5y = 3$ | $P(1; 4)$ |
| 2) $d : x - 2y = -1$ | $P(7; 0)$ |
| 3) $d : 5x - 9y = 0$ | $P(-1; -2)$ |

Rép. 1) $2x - 5y + 18 = 0$ 2) $x - 2y = 7$ 3) $5x - 9y = 13$

112. Trouver l'équation de la droite d' passant par P et perpendiculaire à la droite d :

- | | |
|------------------------------------|-----------------------|
| 1) $P(5; 2)$ | $d : 3x - 5y + 4 = 0$ |
| 2) $P(-4; 6)$ | $d : x + 2y = 104$ |
| 3) $P(7; -3)$ | $d : 15y + 8 = 0$ |
| 4) $P(-\frac{5}{3}; -\frac{9}{8})$ | $d : -4x + 5y = 0$ |

Rép. 1) $5x + 3y = 31$ 2) $2x - y + 14 = 0$ 3) $x - 7 = 0$ 4) $30x + 24y + 77 = 0$

113. Déterminer les sommets d'un rectangle $ABCD$ dont on donne :

$$AD : 2x - y = -11 \qquad BC : 2x - y = -1 \qquad AC : y = 3$$

Rép. $A(-4; 3)$, $B(0; 1)$, $C(1; 3)$, $D(-3; 5)$

114. Déterminer les sommets B , C et D d'un rectangle $ABCD$ connaissant le sommet $A(2; 5)$, le centre du rectangle $P(11; 12)$ et la pente $m = -\frac{2}{3}$ de la droite AB .

Rép. $B(8; 1)$, $C(20; 19)$, $D(14; 23)$

115. Trouver la projection P du point $A(9; 5)$ sur la droite $d: 2x + y = 8$.

Rappel : la projection de A sur d est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur d .

Rép. $P(3; 2)$

116. Un triangle ABC est donné par $AB: y = 8$, $BC: 2x + y = 8$ et $AC: 2x - y = 8$.

Déterminer les projections de $P(9; 5)$ sur les droites AB , BC et AC , puis montrer qu'elles sont alignées.

Rép. $(9; 8)$, $(3; 2)$, $(7; 6)$

117. On donne $A(5; 3)$, $B(6; -2)$ et $C(-3; -8)$. Déterminer :

- a) l'équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .
- b) l'équation de la médiatrice du côté AB .

Rép. a) $3x + 2y = 21$ b) $x - 5y = 3$

118. Trouver le point P de la droite $d: 3x - 5y + 6 = 0$ qui est équidistant des points $A(3; -4)$ et $B(2; 1)$.

Rép. $P(-8; -\frac{18}{5})$

119. Trouver la projection du point $A(2; 6)$ sur la droite $d: 2x - 3y + 1 = 0$.

Rép. $(4; 3)$

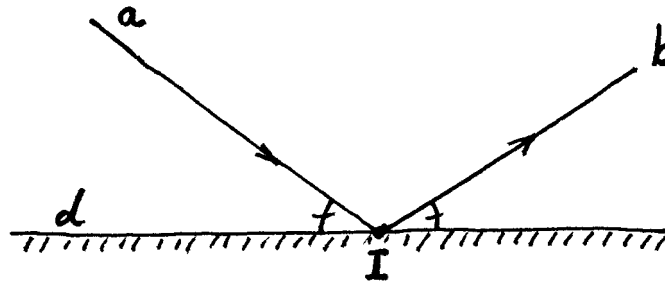
120. Trouver le point B symétrique du point $A(7; 3)$ relativement à la droite $d: 3x + 5y = 2$.

Rép. $B(1; -7)$

121. On donne les droites $d: 5x - 2y = 11$ et $a: x - y = 1$. Trouver l'équation de la droite d' symétrique de d par rapport à a .

Rép. $2x - 5y + 4 = 0$

122. Un rayon lumineux se déplace suivant la droite a d'équation $x - 2y + 5 = 0$. Après avoir atteint la droite $d : 3x - 2y + 7 = 0$, le rayon est réfléchi. Déterminer l'équation de la droite b qui porte le rayon réfléchi.



Rép. $29x - 2y = -33$

123. On donne le sommet $A(6; 12)$ d'un triangle ABC , ainsi que deux de ses hauteurs : $h_B : 2x + 7y = 65$ et $h_C : 2x - 5y = -17$. Calculer les coordonnées des deux autres sommets.

Rép. $B(8; 7)$, $C(4; 5)$

124. Déterminer les sommets B , C et D d'un carré $ABCD$, connaissant le point $A(-4; -7)$ et la droite $BD : 7x + 2y = 11$.

Rép. $B(1; 2)$, $C(10; -3)$, $D(5; -12)$

125. Déterminer les coordonnées des sommets B , C et D d'un carré $ABCD$, connaissant le point $A(3; 1)$ et la droite $CD : 2x - y = 0$.

Rép. $D(1; 2)$, $C : (2; 4)$ ou $(0; 0)$, $B : (4; 3)$ ou $(2; -1)$

126. On donne : $A(-2; 3)$, $B(0; -1)$, $C(2; 1)$. Calculer :

- a) les coordonnées du centre K du cercle circonscrit à ABC .
- b) le rayon du cercle circonscrit.
- c) les angles du triangle ABC .

Rép. a) $K(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3})$ b) $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ c) $36,87^\circ$; $71,57^\circ$; $71,57^\circ$

140. Déterminer un vecteur directeur de la droite AB , puis sa pente et son équation :

- 1) $A(2 ; -1), B(5 ; -3)$ 2) $A(0 ; 1), B(3 ; 22)$ 3) $A(2 ; 3), B(2 ; 7)$

Rép. 1) $2x + 3y = 1$ 2) $7x - y = -1$ 3) $x = 2$

141. Déterminer l'équation de chacune des droites suivantes :

d_1 : droite de pente 3 passant par $A(3 ; 4)$

d_2 : droite de pente -2 passant par $B(3 ; -5)$

d_3 : droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ passant par $E(-1 ; -4)$

d_4 : droite passant par $L(0 ; -\frac{5}{3})$ et $M(3 ; \frac{1}{3})$

Rép. 1) $3x - y = 5$ 2) $2x + y = 1$ 3) $7x - y + 3 = 0$ 4) $2x - 3y = 5$

142. Donner l'équation de la parallèle à la droite d passant par le point P :

1) $d : 2x - 5y = 3$ $P(1 ; 4)$

2) $d : x - 2y = -1$ $P(7 ; 0)$

3) $d : 5x - 9y = 0$ $P(-1 ; -2)$

Rép. 1) $2x - 5y + 18 = 0$ 2) $x - 2y = 7$ 3) $5x - 9y = 13$

143. Donner l'équation de la perpendiculaire à la droite d passant par le point P :

1) $d : x - 2y = 3$ $P(1 ; 2)$

2) $d : -2x + 3y = 0$ $P(-1 ; 5)$

3) $d : x - y = 10$ $P(0 ; -9)$

Rép. 1) $2x + y = 4$ 2) $3x + 2y = 7$ 3) $x + y + 9 = 0$

144. Soient $A(2 ; 0)$, $B(0 ; 3)$ et $C(6 ; 4)$.

a) Déterminer l'équation de la médiatrice de AC .

b) Calculer les coordonnées du pied H de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

Rép. a) $x + y = 6$ b) $H(\frac{54}{37} ; \frac{120}{37})$

145. On donne : $A(-2 ; 3)$, $B(0 ; -1)$, $C(2 ; 1)$. Calculer :

- a) les coordonnées du centre K du cercle circonscrit à ABC .
- b) le rayon du cercle circonscrit.
- c) les angles du triangle ABC .

Rép. a) $K(-\frac{1}{3} ; \frac{4}{3})$ b) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ c) $36,87^\circ ; 71,57^\circ ; 71,57^\circ$

146. On donne une droite $d : x - 3y + 3 = 0$ et un point $A(2 ; 5)$.

- a) Calculer les coordonnées du symétrique B de A par rapport à la droite d .
- b) Soit $C(9 ; 4)$. C est-il sur d ?
Calculer les coordonnées du symétrique D de A par rapport au point C .
- c) Montrer que les droites BD et d sont parallèles.

Rép. $B(4 ; -1)$; $D(16 ; 3)$

147. Trouver le point P de la droite $d : x - y = 0$ qui est à égale distance des points $A(2 ; -4)$ et $B(12 ; -2)$. Rép. $P(\frac{16}{3} ; \frac{16}{3})$

148. Soit $B(4 ; 3)$ et $D(9 ; 0)$. Calculer les coordonnées du point d'intersection F de la droite BD avec l'axe Oy . Rép. $F(0 ; \frac{27}{5})$

149. On donne : $A(2 ; 0)$, $B(4 ; 3)$, $C(7 ; 5)$ et $D(9 ; 0)$.

- a) Déterminer le point d'intersection E des diagonales du quadrilatère $ABCD$.
- b) Calculer les coordonnées du symétrique S de A par rapport à C .

Rép. a) $E(\frac{37}{8} ; \frac{21}{8})$ b) $S(12 ; 10)$

150. D'un losange $ABCD$, on connaît le sommet $A(-1 ; 7)$ et la diagonale $BD : 3x - 4y = 19$.

- a) Déterminer le sommet C .
- b) Sachant de plus que la pente de AB est $-\frac{1}{7}$, déterminer B .

Rép. $C(11 ; -9)$; $B(13 ; 5)$

151. Calculer la longueur de la projection orthogonale du vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$.

- 1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$

Rép. 1) $\frac{8}{\sqrt{5}}$ 2) $\frac{11}{\sqrt{34}}$ 3) 0

Rép. $\frac{361}{10}$

163. Trouver les points de la droite $d: y=3$ dont la distance à la droite $e: y=-x+2$ égale 1. *Rép.* $(-1 \pm \sqrt{2}; 3)$

164. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ de façon que la droite $y-2=m(x+2)$ soit tangente au cercle de centre $C(5; 3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Rép. $m = \frac{1}{2}$ ou $m = \frac{-2}{11}$

165. Deux droites d et e se coupant en $I(-4; 2)$ admettent pour bissectrice une droite b passant par $B(0; 8)$. Trouver l'équation de d , connaissant celle de $e: x-2y+8=0$.

Rép. $29x-2y+120=0$

172. On donne le sommet $A(-2; 1)$ d'un rectangle. Deux de ses côtés se trouvent sur les droites $d: 3x-2y=5$ et $e: 2x+3y=-7$. Calculer l'aire de ce rectangle, sans déterminer les trois autres sommets. *Rép.* 6

173. Calculer les longueurs des hauteurs du triangle ABC donné par $AB: x+y=4$, $BC: 2x-y+1=0$ et $AC: x-2y=4$. Calculer l'aire de ce triangle.

Rép. $h_A = \frac{9}{\sqrt{5}}$; $h_B = \frac{9}{\sqrt{5}}$; $h_C = \frac{9}{\sqrt{2}}$; aire = $\frac{27}{2}$

174. Calculer la distance des deux droites parallèles d et e :

- | | |
|------------------|--------------|
| 1) $d: 3x+4y=13$ | $e: 3x+4y=3$ |
| 2) $d: x-2y+9=0$ | $e: x-2y=1$ |

Rép. 1) 2 2) $2\sqrt{5}$

175. Trouver l'équation de la droite située à égale distance des parallèles $d: 5x+2y=3$ et $e: 5x+2y=9$. *Rép.* $5x+2y=6$

176. Déterminer les équations des droites situées à une distance 3 de la droite $d: 4x-3y=8$.

Rép. $4x-3y=23$ et $4x-3y=-7$

177. Déterminer les équations des bissectrices de $d : x - 3y + 8 = 0$ et $d' : 3x - y - 1 = 0$.

Rép. $2x + 2y = 9$ et $4x - 4y = -7$

178. Déterminer les équations des bissectrices de $d : x - 2y = 4$ et $d' : 2x + 4y = 1$.

Rép. $4x - 9 = 0$ et $8y + 7 = 0$

179. Trouver l'équation de la bissectrice de l'angle aigu formé par les droites $d : 3x + 4y = 1$ et $e : 5x + 12y = 2$.

Rép. $64x + 112y = 23$ (2e bissectrice : $14x - 8y = 3$)

180. Les côtés d'un triangle ABC sont donnés par les droites $AB : x + y = 5$, $BC : x + 7y = 7$ et $CA : 7x + y + 14 = 0$.

- 1) Faire une figure exacte (unité : 1 carré).
- 2) Trouver l'équation de la bissectrice intérieure de l'angle en B .
- 3) Trouver l'équation de la bissectrice extérieure de l'angle en C .

Rép. 2) $3x + 6y = 16$ 3) $8x + 8y + 7 = 0$

181. Trouver les équations des droites passant par le point $A(1; 1)$ et dont la distance au point $B(-6; 2)$ est égale à 5.

Rép. $3x - 4y + 1 = 0$ et $4x + 3y - 7 = 0$

182. Déterminer les équations des droites passant par $A(2; 3)$ et équidistantes de $B(10; 2)$ et $C(0; -4)$.

Rép. $4x + 3y = 17$ et $3x - 5y + 9 = 0$

183. Déterminer l'ensemble des points du plan qui sont équidistants des droites d_1 et d_2 :

- 1) $d_1 : -2x + y = 17$ $d_2 : x - 2y = 5$
- 2) $d_1 : 2x - 3y + 6 = 0$ $d_2 : 4x - 6y - 5 = 0$

Rép. 1) réunion des droites $x - y + 4 = 0$ et $x + y + 22 = 0$
2) droite $8x - 12y + 7 = 0$

184. On donne un triangle ABC par les équations des droites portant les côtés. Déterminer les équations des bissectrices intérieures, le centre I du cercle inscrit ainsi que son rayon r .

$$AB : 4x + 3y + 58 = 0 \quad BC : x - 8 = 0 \quad AC : 3x - 4y + 56 = 0$$

Rép. $b_A : x + 7y + 2 = 0$, $b_B : 3x + y + 6 = 0$, $b_C : 2x - y + 4 = 0$, $I(-2 ; 0)$, $r = 10$

185. Déterminer l'équation du cercle

- 1) centré à l'origine et de rayon 4 ;
- 2) de centre $C(4 ; -2)$ et de rayon 3 ;
- 3) de centre $C(-4 ; 5)$ et passant par $A(1 ; 2)$;
- 4) de diamètre AB , avec $A(3 ; 2)$ et $B(-1 ; 6)$;
- 5) centré à l'origine et tangent à la droite d'équation $3x + 4y = 15$;
- 6) de centre $C(1 ; -1)$ et tangent à la droite d'équation $5x - 12y + 9 = 0$;
- 7) passant par les points $A(3 ; 1)$ et $B(-1 ; 3)$, et centré sur la droite $3x - y = 2$;
- 8) passant par les points $A(1 ; 0)$ et $B(5 ; 0)$, et tangent à l'axe Oy .

Rép. 1) $x^2 + y^2 = 16$ 2) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 3) $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 34$
 4) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$ 5) $x^2 + y^2 = 9$ 6) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
 7) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$ 8) $(x - 3)^2 + (y \pm \sqrt{5})^2 = 9$

186. Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC connaissant $A(7 ; -1)$, $B(6 ; 4)$ et $C(4 ; -4)$.

Rép. $(x - \frac{7}{3})^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{221}{9}$

187. Déterminer l'équation du cercle inscrit dans le triangle ABC donné par les droites portant ses côtés : $AB : 4x + 3y = 12$; $BC : y - 2 = 0$; $CA : x - 10 = 0$.

Rép. $(x - \frac{43}{6})^2 + (y + \frac{5}{6})^2 = \frac{289}{36}$

188. Trouver le centre C et le rayon r des cercles dont les équations sont :

- a) $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 4 = 0$
- c) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 = 0$ d) $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x + 6y + \frac{40}{9} = 0$

Rép. a) $C(-2 ; -3)$, $r = 6$ b) $C(2 ; -7)$, $r = 7$
 c) $C(-1 ; 5)$, $r = 3$ d) $C(\frac{2}{3} ; -3)$, $r = \sqrt{5}$

189. Que représentent les équations ci-dessous ? Dans le cas où il s'agit d'un cercle, on en donnera le centre et le rayon.

1) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

2) $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$

3) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$

4) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$

5) $x^2 - 4x = 0$

6) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 25 = 0$

7) $4x^2 + 4y^2 + 80x + 12y + 265 = 0$

8) $80x^2 + 80y^2 - 120x + 80y + 17 = 0$

- Rép.*
- 1) cercle de centre $(0 ; 0)$ et de rayon 4
 - 2) cercle de centre $(0 ; 3)$ et de rayon 5
 - 3) point $(3 ; 4)$
 - 4) cercle de centre $(5 ; -4)$ et de rayon 6
 - 5) réunion des droites verticales $x = 0$ et $x = 4$
 - 6) $\emptyset$
 - 7) cercle de centre $(-10 ; -\frac{3}{2})$ et de rayon 6
 - 8) cercle de centre $(\frac{3}{4} ; -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{5}\sqrt{15}$

190. On considère les droites $a : x + 7y = 23$ et $b : x - y = -9$, ainsi que les points $R(3 ; 0)$ et $S(-9 ; 6)$. Chercher les points M tels que $\delta(M, a) = \delta(M, b)$ et $\delta(M, R) = \delta(M, S)$.

Rép. $(-2 ; 5)$ et $(-4 ; 1)$

191. Calculer la plus courte distance du point $P(-7 ; 2)$ au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

Rép. 2

192. Montrer que les cercles $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$ et $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ sont tangents, en comparant la distance des centres à la somme et à la différence des rayons. Trouver le point de tangence, ainsi que l'équation de la tangente en ce point.

Rép. point de tangence : $T(\frac{20}{13} ; \frac{95}{13})$; tangente en T : $12x + 5y = 55$

193. Déterminer les équations des cercles de rayon 5 dont les centres sont sur la droite $d : 2x + y = 1$ et qui sont tangents à la droite $t : 3x + 4y = 34$.

Rép. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$; $(x+11)^2 + (y-23)^2 = 25$

194. On donne deux droites d et e , ainsi qu'un point T . Vérifier que T appartient à la droite d et trouver les équations des cercles tangents à d en T et à e .

$$\begin{array}{lll} 1) & d: 3x - 4y + 19 = 0 & e: 4x + 3y - 58 = 0 \quad T(3; 7) \\ 2) & d: 5x - y = 17 & e: x - 5y = 5 \quad T(4; 3) \end{array}$$

Rép. 1) $x^2 + (y - 11)^2 = 25$; $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$
 2) $(x - \frac{56}{9})^2 + (y - \frac{23}{9})^2 = \frac{416}{81}$; $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 26$

195. Déterminer les équations des cercles centrés sur la droite d et tangents aux droites a et b .

$$\begin{array}{lll} 1) & d: 3x + 7y = 39 & a: 3x - 4y = -12 \quad b: x = 0 \\ 2) & d: 4x - 5y - 3 = 0 & a: 2x - 3y - 10 = 0 \quad b: 3x - 2y + 5 = 0 \end{array}$$

Rép. 1) $(x + 36)^2 + (y - 21)^2 = 1296$; $(x - \frac{18}{17})^2 + (y - \frac{87}{17})^2 = \frac{324}{289}$
 2) $(x + 8)^2 + (y + 7)^2 = \frac{25}{13}$; $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{81}{13}$

196. Déterminer les équations des cercles passant par le point A et tangents aux droites d_1 et d_2 .

$$\begin{array}{lll} 1) & d_1: x - 2y + 2 = 0 & d_2: 2x - y - 17 = 0 \quad A(6; -1) \\ 2) & d_1: 2x + y + 2 = 0 & d_2: 2x + y - 18 = 0 \quad A(1; 0) \end{array}$$

Rép. 1) $(x - \frac{58}{9})^2 + (y - \frac{13}{9})^2 = \frac{500}{81}$; $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$
 2) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 20$; $(x - \frac{9}{5})^2 + (y - \frac{22}{5})^2 = 20$

197. On donne un cercle Γ et un point A . Après avoir vérifié que A appartient à Γ , trouver l'équation de la tangente à Γ au point A .

$$\begin{array}{ll} 1) & \Gamma: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25 \quad A(-2; 1) \\ 2) & \Gamma: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 37 = 0 \quad A(3; 4) \\ 3) & \Gamma: x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0 \quad A(2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}) \\ 4) & \Gamma: 3x^2 + 3y^2 - 7x + 12y - 28 = 0 \quad A(5; -2) \end{array}$$

Rép. 1) $3x - 4y + 10 = 0$ 2) $x + 7y - 31 = 0$ 3) $x + y - 2 - 4\sqrt{2} = 0$ 4) $x = 5$

198. Déterminer les équations des tangentes au cercle $\Gamma: x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ aux points d'intersection de ce cercle avec les axes Ox et Oy .

Rép. $x + 2 = 0$; $x - 8 = 0$; $3x - 4y + 16 = 0$; $3x + 4y + 16 = 0$

199. On donne deux droites $a: 4x + 3y = 12$ et $b: y = 0$. Trouver les équations de tous les cercles de rayon 2 tangents à la fois à a et à b .

Rép. les centres sont $(4; 2)$, $(2; -2)$, $(-1; 2)$ et $(7; -2)$

200. Trouver les coordonnées des points d'intersection de la droite $7x - y + 12 = 0$ et du cercle $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$. *Rép.* $(-1; 5)$ et $(-2; -2)$

201. Déterminer les équations des tangentes au cercle $\Gamma: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 169$ aux points d'intersection de ce cercle avec la droite $d: x + y = 10$.

Rép. Points d'intersection : $A(-4; 14)$ et $B(13; -3)$

Tangentes : $t_A: 5x - 12y = -188$ et $t_B: 12x - 5y = 171$

202. Pour quelles valeurs de m la droite $y = mx$

1) est-elle tangente au cercle $\Gamma: x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$?

2) coupe-t-elle ce cercle ?

Rép. 1) $m = \pm \frac{3}{4}$ 2) $-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$

210. On considère la droite $d: 3x + 4y = 1917$ et le cercle $\Gamma: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

a) Déterminer les équations des tangentes à Γ parallèles à d .

b) Déterminer les équations des tangentes à Γ perpendiculaires à d .

Rép. a) $3x + 4y = 34$; $3x + 4y = -16$ b) $4x - 3y = -38$; $4x - 3y = 12$

211. Déterminer les équations des tangentes au cercle $\Gamma: x^2 + y^2 - 4x + 5y + 4 = 0$ perpendiculaires à la droite $d: 2x + 3y = 6$.

Rép. $6x - 4y - 22 \pm 5\sqrt{13} = 0$

212. Déterminer les tangentes de pente m au cercle Γ .

1) $\Gamma: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$ $m = -\frac{3}{4}$

2) $\Gamma: x^2 + y^2 - 12x + 2y - 8 = 0$ $m = \frac{1}{2}$

Rép. 1) $3x + 4y = 39$; $3x + 4y = -11$ 2) $x - 2y + 7 = 0$; $x - 2y - 23 = 0$

213. Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ issues du point P .

- 1) $\Gamma : x^2 + y^2 = 25$ $P(7 ; 1)$
- 2) $\Gamma : (x+1)^2 + y^2 = 20$ $P(1 ; 6)$
- 3) $\Gamma : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ $P(10 ; 3)$
- 4) $\Gamma : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 31 = 0$ $P(-1 ; 5)$

Rép. 1) $4x - 3y = 25$; $3x + 4y = 25$ 2) $x - 2y + 11 = 0$; $2x + y - 8 = 0$
 3) $4x - 3y = 31$; $3x + 4y = 42$ 4) $y = 5$; $4x - 3y + 19 = 0$

214. Trouver les équations des tangentes communes aux cercles Γ_1 et Γ_2 .

- 1) $\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$ $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
- 2) $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 25 = 0$ $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 24y + 143 = 0$

Rép. 1) $y - 3 = 0$; $4x - 3y = 19$ 2) $y = (\pm\sqrt{8})x + 15$; $y = (\pm\sqrt{3})x + 10$

215. Montrer que la longueur du segment de tangente menée du point $P(p_1, p_2)$ au cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est donnée par :

$$\sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2 + ap_1 + bp_2 + c}$$

216.—

- 1) Montrer que les cercles $\Gamma : x^2 + y^2 = 49$ et $\Gamma' : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ sont tangents en un point A dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Trouver l'équation du cercle Ω tangent à Γ et à Γ' au point A et passant par l'origine O .

Rép. 1) $A\left(\frac{21}{5} ; \frac{28}{5}\right)$ 2) $\left(x - \frac{21}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{14}{5}\right)^2 = \frac{49}{4}$

217. On donne les sommets $A(-15 ; -5)$ et $B(1 ; 7)$ d'un triangle ABC .

- 1) Déterminer les coordonnées du sommet C de ce triangle, sachant que le centre du cercle inscrit dans le triangle est l'origine O du repère.
- 2) Montrer que ce triangle est rectangle, puis calculer son aire.

Rép. $BC : 4x + 3y = 25$; $AC : y + 5 = 0$; $C(10 ; -5)$; aire : 150

218. Calculer l'angle sous lequel se coupent les cercles $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ et $x^2 + y^2 - 16x - 8y + 43 = 0$ [= angle des tangentes en un point commun]. *Rép.* $81,03^\circ$

219. Trouver l'équation du cercle Γ passant par les trois points $A(4; 6)$, $B(5; -1)$ et $C(-3; -1)$. Déterminer les coordonnées du point P d'intersection de la bissectrice intérieure issue du sommet A du triangle ABC et de la médiatrice du côté BC . Montrer que P appartient au cercle Γ .

Rép. $\Gamma: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$; $P(1; -3)$

221. On donne les sommets $A(-1; -10)$, $B(-9; 6)$ et $C(5; 8)$ d'un triangle.

- 1) Trouver l'équation du cercle Γ passant par les milieux A' , B' et C' de BC , CA et AB respectivement.
- 2) Chercher les coordonnées des pieds H_1 , H_2 et H_3 des hauteurs issues de A , B et C (resp.) et montrer que le cercle Γ passe par H_1 , H_2 et H_3 .
- 3) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC , ainsi que celles des milieux respectifs R , S et T de HA , HB et HC . Montrer que R , S et T appartiennent aussi au cercle Γ .

Le cercle Γ est appelé **cercle des neuf points** du triangle ABC (ou **cercle d'Euler** ou encore **cercle de Feuerbach**).

Rép. 1) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$
 2) $H_1(-\frac{17}{5}; \frac{34}{5})$; $H_2(3; 2)$; $H_3(-7; 2)$
 3) $H(-3; 4)$; $R(-2; -3)$; $S(-6; 5)$; $T(1; 6)$

222. Un triangle ABC rectangle en C a ses sommets A et B sur l'axe Oy . L'ordonnée du point C est égale à 6. L'équation cartésienne de la droite AC est $4x + 3y = 66$.

- Calculer les coordonnées des sommets du triangle ABC .
- Donner l'équation du cercle Γ centré en $P(11; -1)$ et tangent à la droite AC .
- Déterminer les centres de deux cercles qui sont à la fois tangents extérieurement à Γ et tangents à AB et à AC .

Rép. a) $A(0; 22), B(0; -3), C(12; 6)$ b) $(x-11)^2 + (y+1)^2 = 25$ c) $(5; 7), (\frac{125}{9}; -\frac{59}{3})$

223. Le symétrique du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 20$ par rapport à une droite d est un cercle passant par $A(-4; 8)$ et tangent à la droite $t: x - 2y + 22 = 0$.

Déterminer l'équation de d .

Rép. $y - 3 = 0$ ou $4x - 3y + 15 = 0$

224. On donne le cercle $\Gamma: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 76 = 0$ et la droite $d: y = 4$. Déterminer les équations de tous les cercles de rayon 4, centrés sur d et tangents à Γ .

Rép. $(x-14)^2 + (y-4)^2 = 16$; $(x+10)^2 + (y-4)^2 = 16$; $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$

