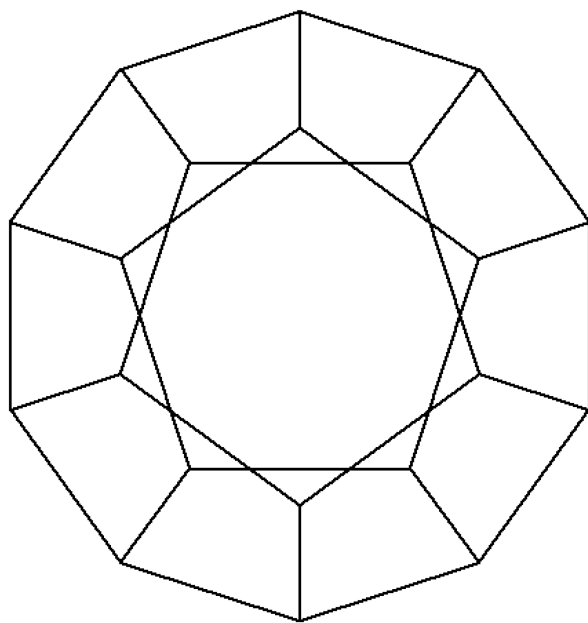


GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

3C

2015



§ 1. DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

10. Notion de plan

Toute droite ayant deux points distincts dans un plan est entièrement contenue dans ce plan.

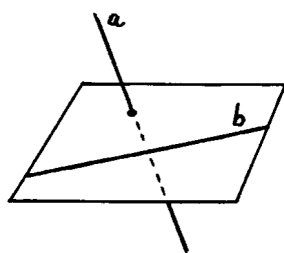
Tout plan de l'espace partage celui-ci en deux régions distinctes appelées demi-espaces, et cela de telle sorte que :

- Tout segment ayant une extrémité dans chacun de ces demi-espaces rencontre le plan en un point unique.
- Tout segment ayant ses extrémités dans le même demi-espace ne rencontre pas le plan.

11. Figures coplanaires

Plusieurs figures sont dites *coplanaires* quand elles sont contenues dans un même plan.

12. Position relative de deux droites



a et b gauches

Deux droites sont dites *gauches* lorsqu'elles ne sont pas coplanaires.

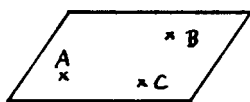
Deux droites sont dites *parallèles* lorsqu'elles sont coplanaires et sans points communs.

Deux droites peuvent donc être *gauches*, *sécantes*, *parallèles* ou *confondues*.

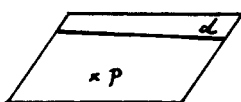
13. Détermination d'un plan

Un plan est déterminé par :

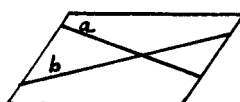
- trois points non alignés ;
- une droite et un point extérieur à la droite ;
- deux droites sécantes ;
- deux droites parallèles.



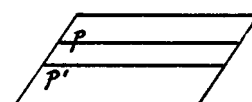
$\pi(ABC)$



$\pi(d, P)$



$\pi(a, b)$

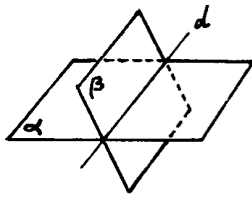


$\pi(p, p')$

14. Position relative de deux plans

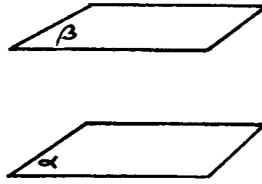
Deux plans peuvent être :

- sécants (leur intersection est une droite) ;
- parallèles (leur intersection est vide) ;
- confondus.

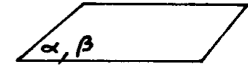


$$\alpha \cap \beta = d$$

(d est la **trace** de β sur α)



$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

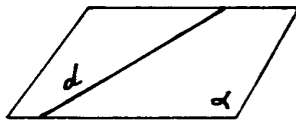


$$\alpha = \beta$$

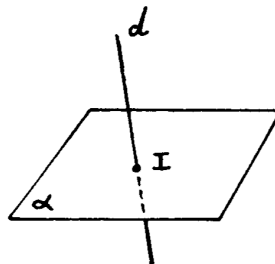
15. Position relative d'une droite et d'un plan

Trois cas peuvent se présenter :

- la droite est contenue dans le plan ;
- la droite et le plan sont sécants (ils n'ont qu'un seul point commun ; la droite perce le plan) ;
- la droite et le plan sont parallèles (leur intersection est vide).

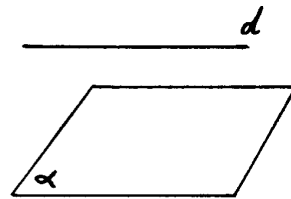


$$d \subset \alpha$$



$$d \cap \alpha = \{ I \}$$

(I est la **trace** de d sur α)



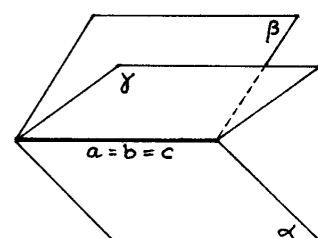
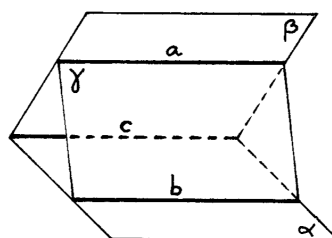
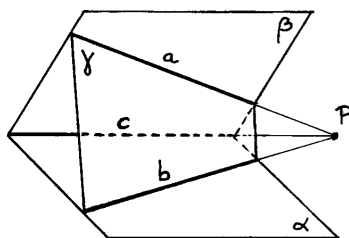
$$d \cap \alpha = \emptyset$$

16. Théorème des trois plans sécants

Soient a , b , c les droites d'intersection déterminées par trois plans α , β , γ deux à deux sécants.

Alors, de trois choses l'une :

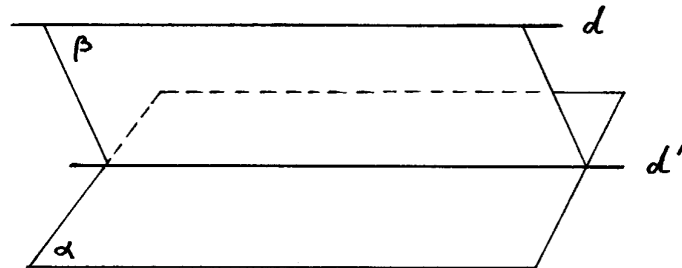
- ou bien les droites a , b , c sont concourantes ;
- ou bien elles sont deux à deux parallèles ;
- ou bien elles sont confondues.



§ 2. PARALLÉLISME

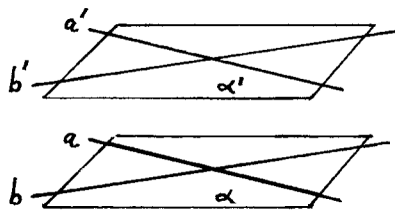
20. Porte ouverte

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite d non contenue dans un plan donné α soit parallèle à ce plan est que la droite d soit parallèle à une droite d' du plan α .



21. Double X

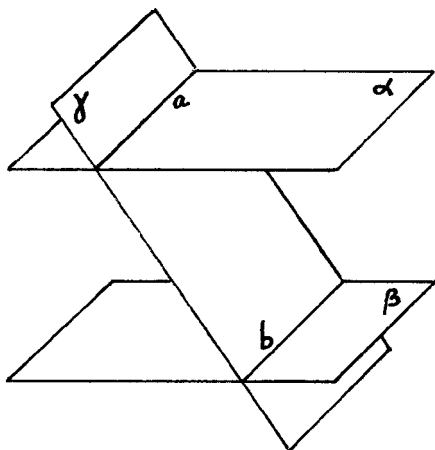
Deux croix non coplanaires dont les barres sont deux à deux parallèles déterminent des plans parallèles.



$$\left. \begin{array}{l} a' // a \\ b' // b \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha' // \alpha$$

22. Plan coupant deux plans parallèles

Tout plan coupant deux plans parallèles y détermine des droites d'intersection parallèles.



Hypothèse :

Un plan γ coupe deux plans parallèles α et β ;
 $\gamma \cap \alpha = a$; $\gamma \cap \beta = b$.

Conclusion :

Les droite a et b sont parallèles.

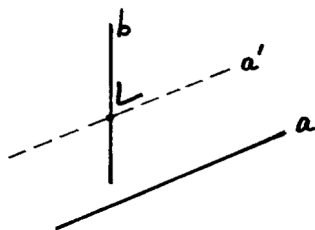
Démonstration :

- a et b sont coplanaires (elles sont dans γ).
- $a \cap b = \emptyset$, car $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Les droite a et b sont donc parallèles.

§ 3. PERPENDICULARITÉ DANS L'ESPACE

30. Droites orthogonales



Deux droites a et b sont dites orthogonales *s'il existe une parallèle à l'une coupant l'autre perpendiculairement.*

Cas particulier :

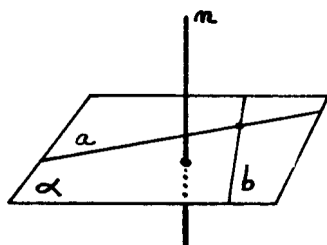
Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

Propriétés

1. Si a et b sont orthogonales, *toute* parallèle à a coupant b est perpendiculaire à b .
2. La relation d'orthogonalité entre deux droites est conservée lorsqu'on déplace l'une d'elles parallèlement à elle-même.

31. Droite normale ou perpendiculaire à un plan

Une droite est dite normale ou perpendiculaire à un plan lorsqu'*elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan*. On dit aussi que le plan est perpendiculaire à la droite.



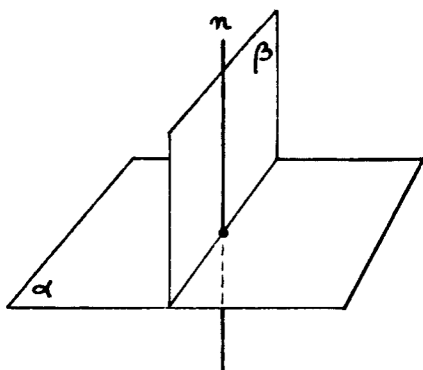
$$\left. \begin{array}{l} n \text{ orthogonale à } a \\ n \text{ orthogonale à } b \end{array} \right\} \Rightarrow n \perp \alpha$$

Propriétés

1. *Toute normale à un plan est orthogonale à toutes les droites du plan*, ainsi qu'aux parallèles à ce plan. En particulier, la normale est perpendiculaire à toutes les droites du plan qui passent par son pied.
2. Par un point de l'espace, il passe une et une seule normale à un plan donné.
3. Par un point de l'espace, il passe un et un seul plan perpendiculaire à une droite donnée.
4. La relation de perpendicularité entre une droite et un plan est conservée lorsqu'on déplace la droite parallèlement à elle-même. Idem pour un déplacement parallèle du plan.
5. Deux normales distinctes à un même plan sont parallèles.
6. Deux plans distincts admettant la même normale sont parallèles.

32. Plans perpendiculaires

Deux plans sont dits perpendiculaires *quand l'un contient une normale à l'autre* (ou, de manière équivalente, quand chacun d'eux contient une normale à l'autre).

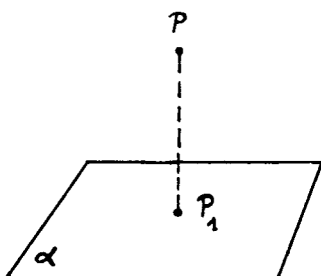


$$\left. \begin{array}{l} n \perp \alpha \\ \beta \supset n \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha$$

Propriétés

1. La relation de perpendicularité entre deux plans est conservée lorsqu'on déplace l'un d'eux parallèlement à lui-même.
2. Par une droite de l'espace non normale à un plan donné α , il passe un et un seul plan perpendiculaire à α .

33. Projection orthogonale



$$P_1 = \text{proj}_\alpha(P)$$

On appelle projection orthogonale (ou simplement projection) d'un point sur un plan le pied de la normale abaissée du point sur le plan. Le plan en question est le **plan de projection** ; la normale en question est la **projetante** du point.

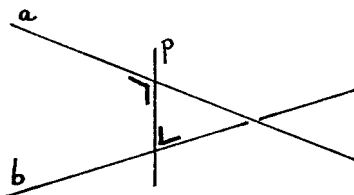
La projection d'une figure sur le plan est l'ensemble des projections des points de la figure sur le plan.

La projection d'une droite sur un plan est une droite, ou, s'il s'agit d'une normale, un point.

Le plan déterminé par une droite et sa projection est le **plan projetant** de la droite.

34. Perpendiculaire commune

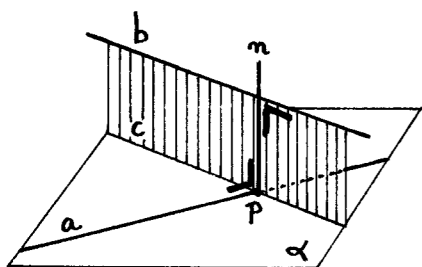
Etant donné deux droites quelconques, il existe toujours une *perpendiculaire commune* à ces deux droites. Cette perpendiculaire est unique lorsque les deux droites sont gauches ou sécantes.



p perpendiculaire commune
aux droites a et b.

Pour construire la perpendiculaire commune à deux droites a et b (sécantes ou gauches), procéder comme suit :

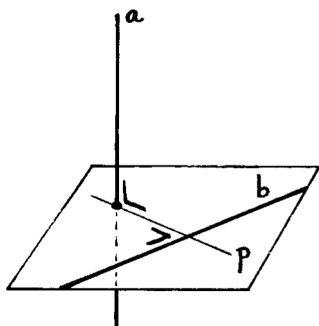
- Si a et b sont sécantes, il suffit d'élever la normale à $\pi(a,b)$ au point d'intersection des deux droites.
- Si a et b sont gauches :



1. Plan α contenant a et parallèle à b . (Pour construire α , mener une parallèle b' à b coupant a ; α est le plan de a et b' .)
2. Projection de b sur α : c .
 $c \cap a = \{P\}$.
3. Normale n à α , par P .
C'est la perpendiculaire commune.

35. Corollaire

Si deux droites sont orthogonales, il passe par chacune d'elles un plan perpendiculaire à l'autre.



En effet, si p est la perpendiculaire commune à deux droites a et b orthogonales, le plan (p,b) est alors perpendiculaire à a , et le plan (p,a) est perpendiculaire à b .

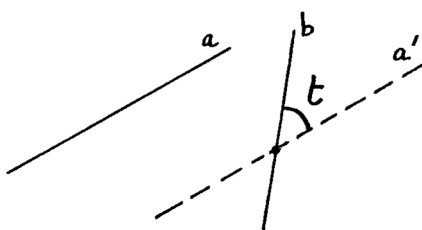
§ 4. ANGLES

40. Angle de deux droites coplanaires

L'angle de deux droites sécantes est l'un ou l'autre des deux angles saillants qu'elles déterminent. (Ces deux angles sont supplémentaires.)

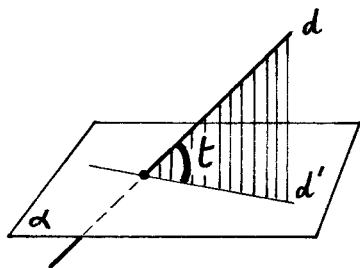
On convient de plus que l'angle de deux droites parallèles est nul (ou plat). Idem pour des droites confondues.

41. Angle de deux droites gauches



Soit a et b deux droites gauches.
On mène par un point quelconque de b une parallèle a' à a .
L'angle des droites gauches a et b est alors, par définition, l'angle des droites sécantes a' et b .

42. Angles d'une droite et d'un plan

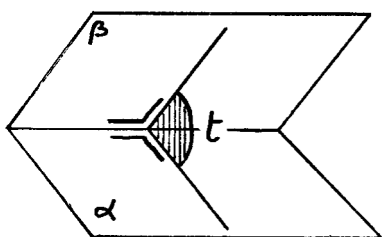


L'angle d'une droite d avec un plan α non perpendiculaire à d est l'angle entre d et sa projection d' sur α .

Si d est une normale à α , l'angle de d et α est droit.

43. Angle de deux plans

L'angle de deux plans est l'angle de leurs normales.

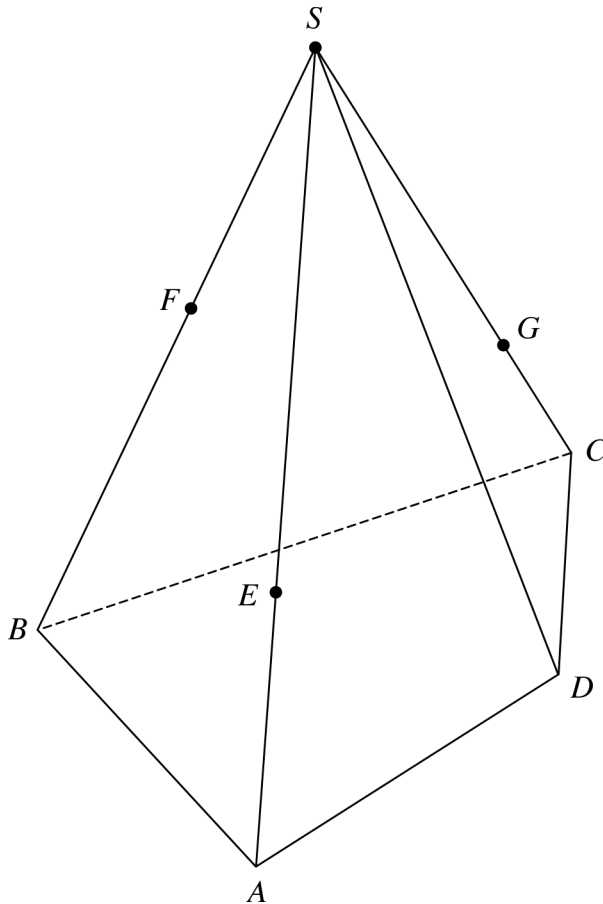


Si les deux plans sont sécants, c'est aussi l'angle de deux perpendiculaires à leur intersection, l'une étant contenue dans le premier plan et l'autre dans le second.

§ 5. SECTION D'UNE PYRAMIDE PAR UN PLAN

Problème. On donne la perspective d'une pyramide $SABCD$ ainsi que trois points E , F et G sur les arêtes SA , SB et SC respectivement. Soit α le plan de la base $ABCD$ et β le plan EFG .

1. Construire la droite $i = \alpha \cap \beta$.
2. Construire la section $EFGH$ de la pyramide par le plan β .



Solution

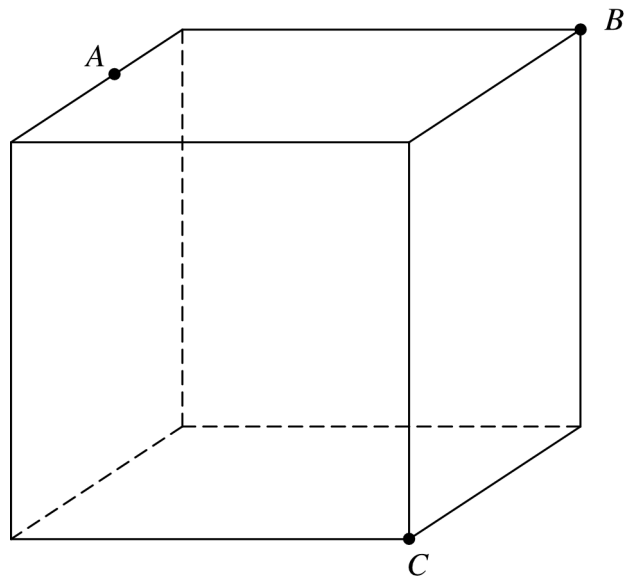
1. Les droites AB et EF sont coplanaires (elles sont dans le plan de la face SAB). Elles se coupent donc en un point K de $i = \alpha \cap \beta$.
De même, BC et FG se coupent en un point L de la droite i . On peut donc tracer la droite i par K et L .
2. Soit le point $H = SD \cap \alpha$ (à construire). Les droites AD et EH étant coplanaires (dans la face SAD), elles doivent se couper en un point M de i . On obtient donc H en prolongeant AD , ce qui fournit M , et en traçant EM .

§ 6. INTERSECTION D'UN PLAN ET D'UN CUBE

Construire les traces du plan ABC sur les faces du cube.

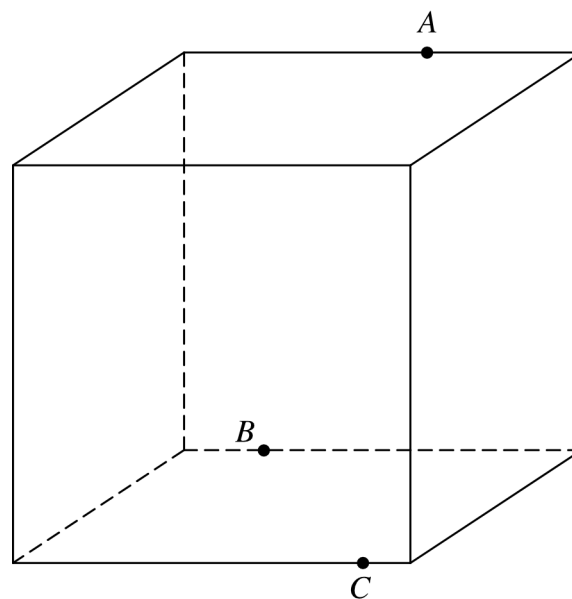
Indication : se servir du « théorème du plan coupant deux plans parallèles ».

1)



AD doit être parallèle à BC .

2)

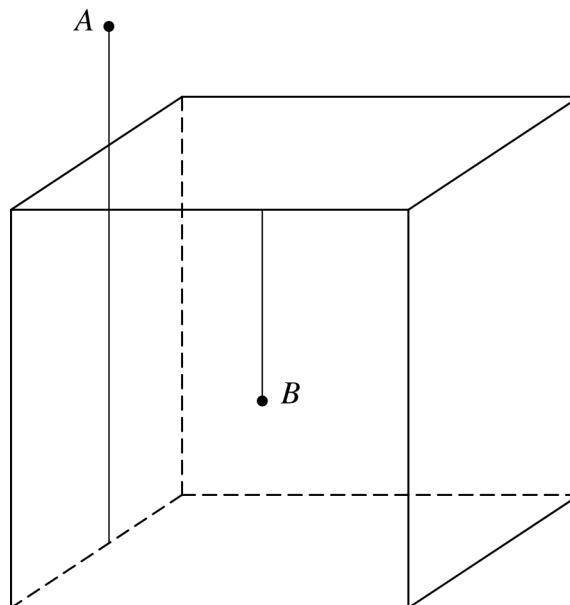


AD est parallèle à BC ; CE est parallèle à AB .

§ 7. INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CUBE

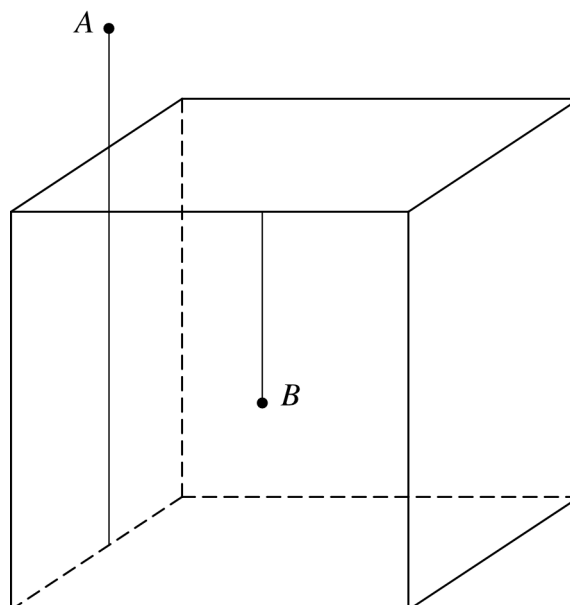
Problème

Construire les traces de la droite AB sur le cube et sur le sol.



Solution

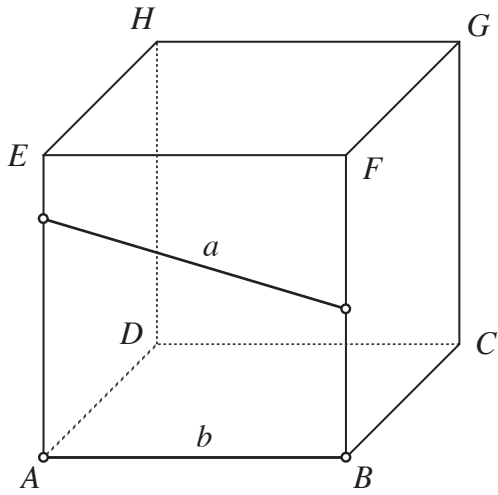
L'idée est d'introduire un **plan auxiliaire** φ (« phi ») **contenant la droite AB** , et de dessiner l'intersection de ce plan avec le cube. Ici (et souvent), on va se servir d'un plan φ vertical.



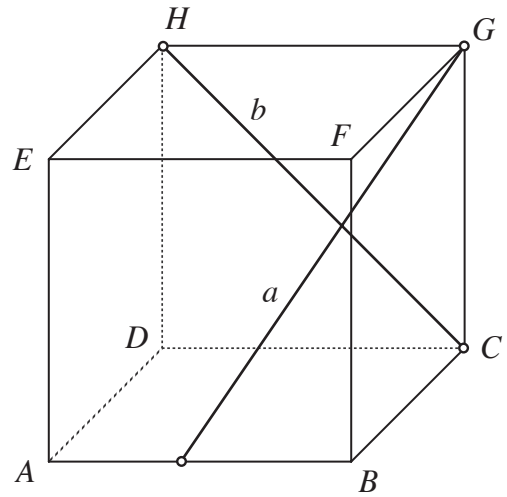
Le traces cherchées sont les points K , L et M .

1. On donne deux droites a et b . Quelle est leur position relative (cf. théorie #1.12) ?

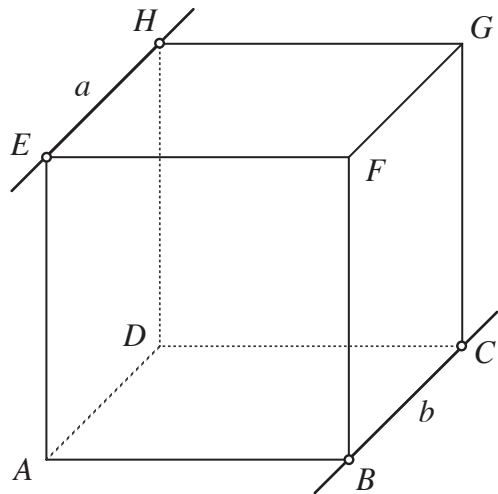
a)



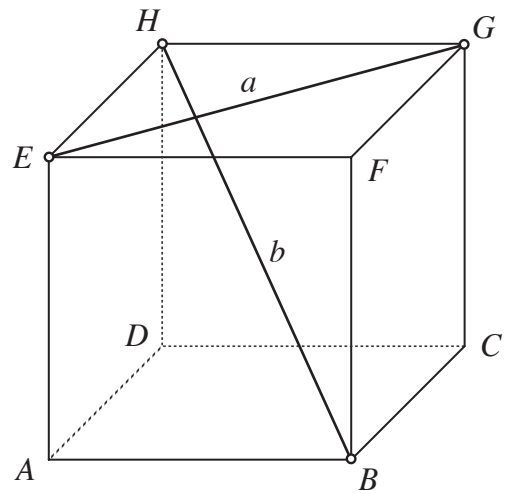
b)



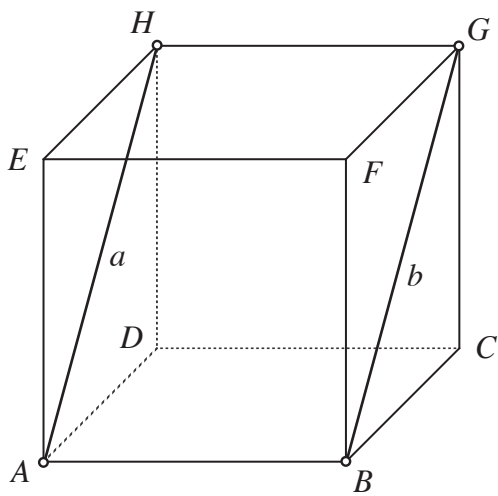
c)



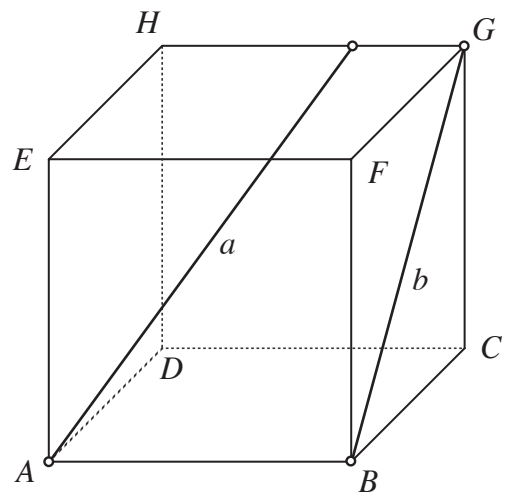
d)



e)



f)



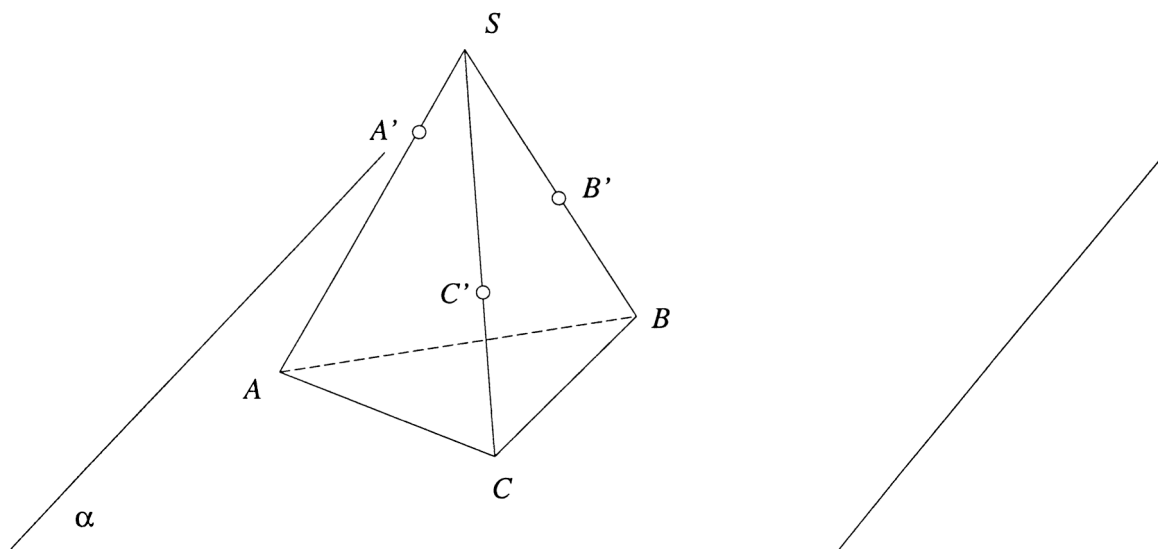
2. Représenter trois droites a, b, c deux à deux coplanaires, mais non coplanaires dans leur ensemble.

3. Faire un croquis représentant trois plans deux à deux sécants ayant :

- a) un point commun ;
- b) une droite commune ;
- c) aucun point commun.

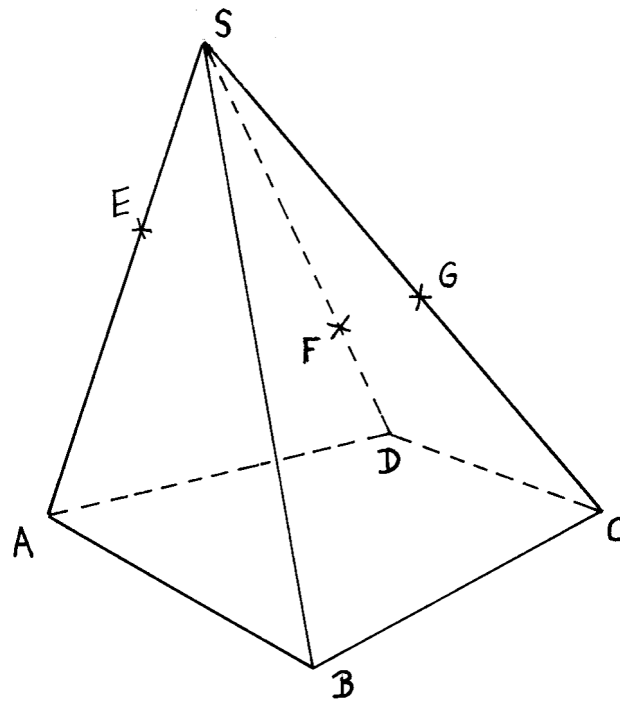
4. La base ABC de la pyramide est située dans le plan α et les points A', B' et C' respectivement sur les arêtes SA, SB et SC .

- a) Les droites AB et $A'B'$ sont-elles coplanaires ?
- b) Les droites $A'B'$ et CC' sont-elles coplanaires ?
- c) Construire l'intersection du plan $A'B'C'$ avec α .

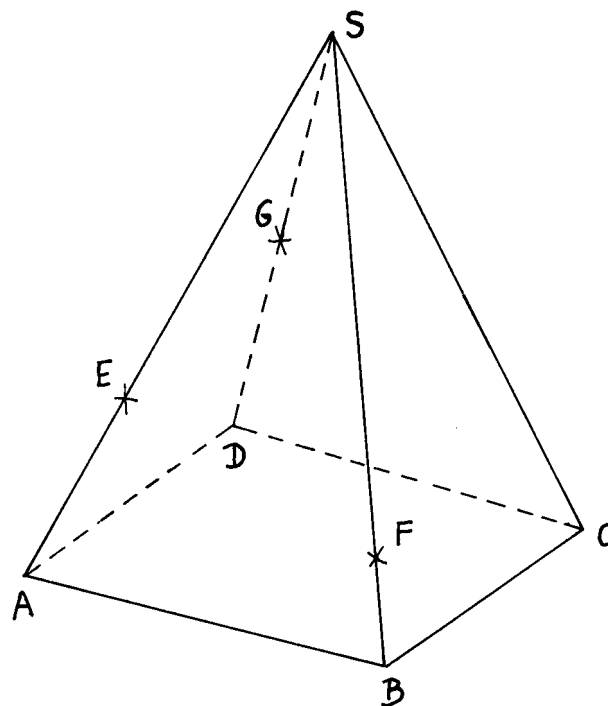


5. Dessiner l'intersection de la pyramide $SABCD$ avec le plan EFG , en commençant par construire l'intersection de ce plan avec celui de la base $ABCD$.

a)

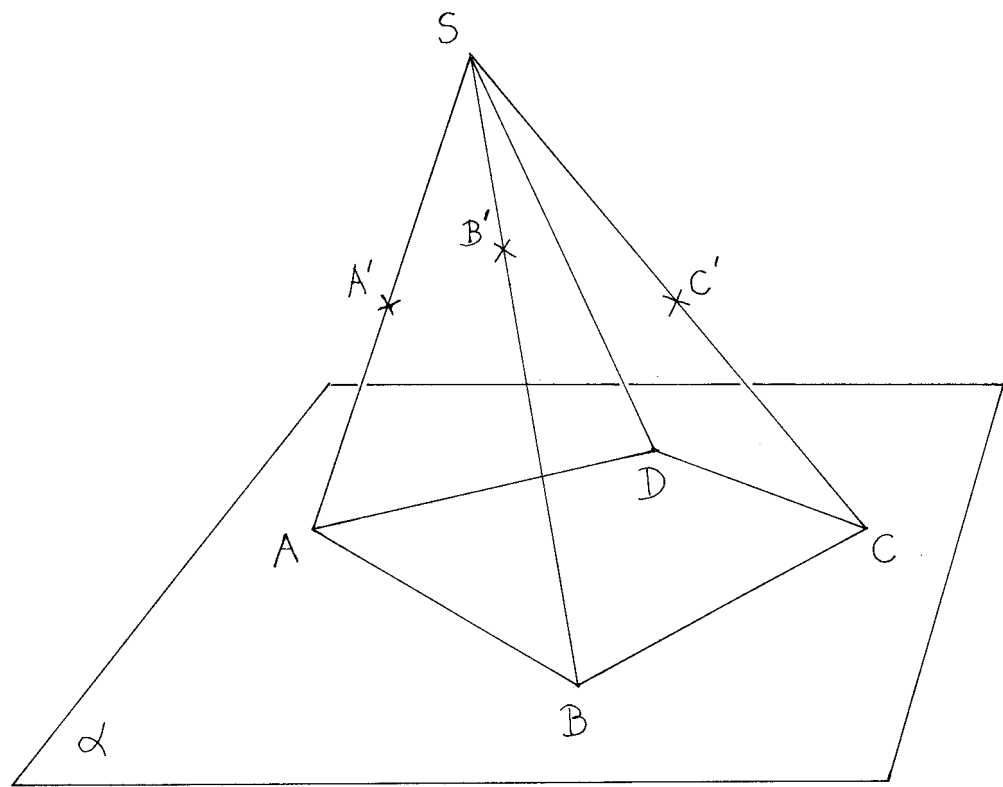


b)

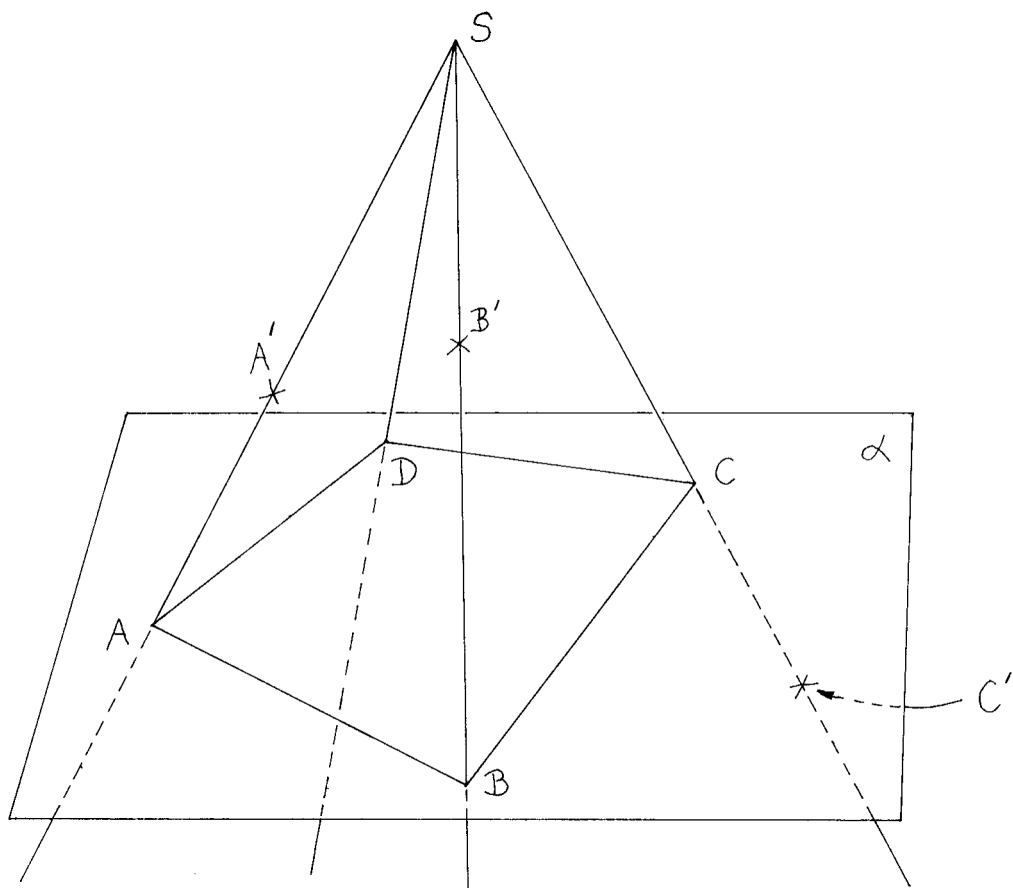


6. Dessiner l'intersection de la pyramide $SABCD$ avec le plan $A'B'C'$.

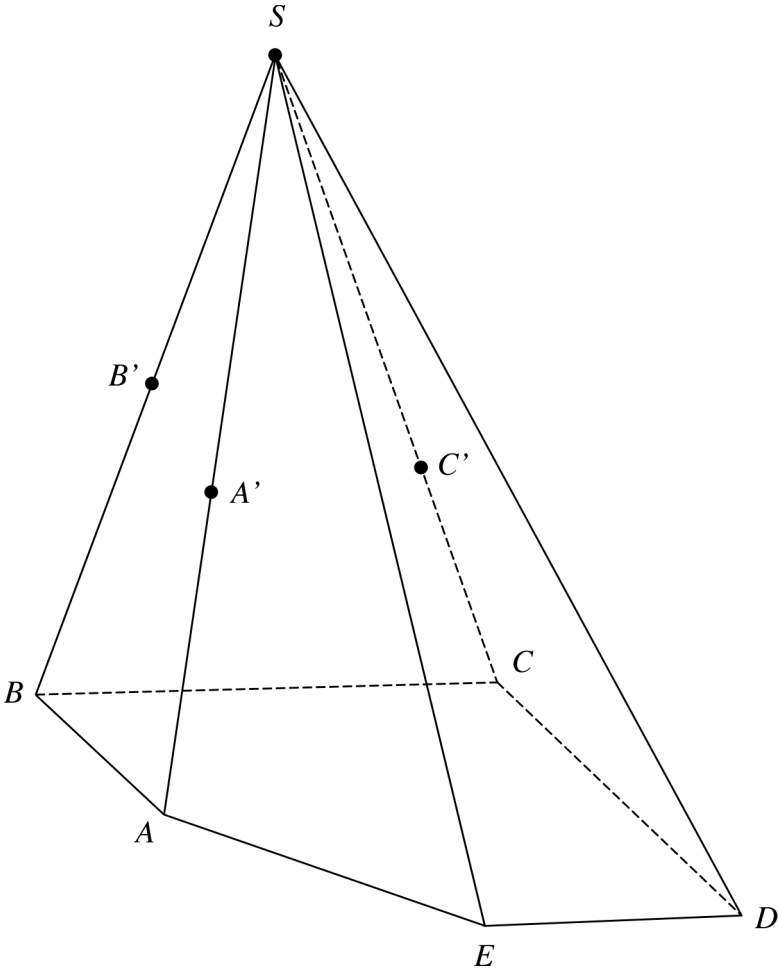
a)



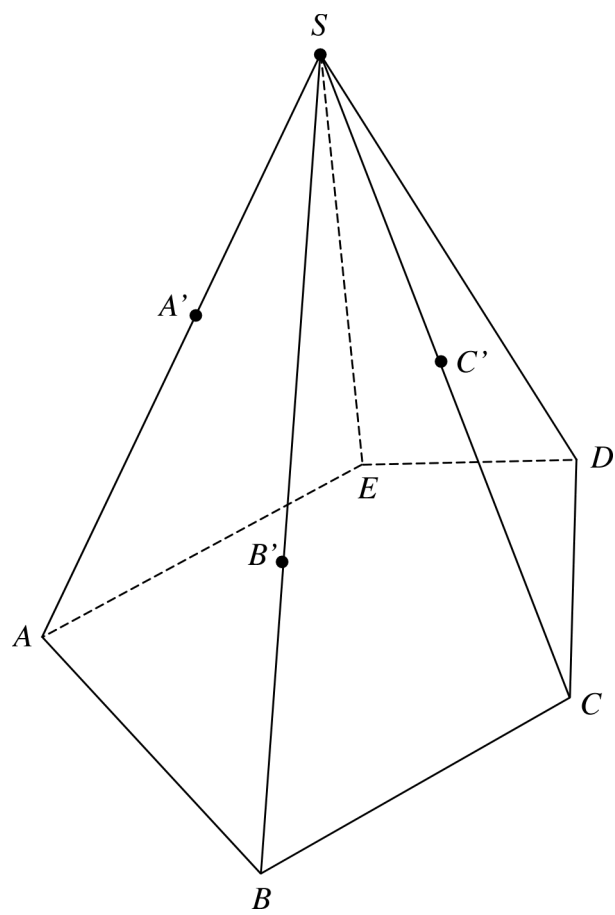
b)



6 BIS. Dessiner l'intersection de la pyramide $SABCDE$ avec le plan $A'B'C'$.

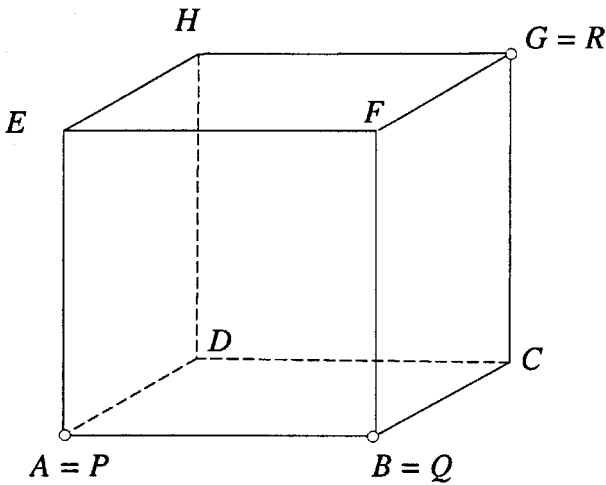


6 TER. Dessiner l'intersection de la pyramide $SABCDE$ avec le plan $A'B'C'$.

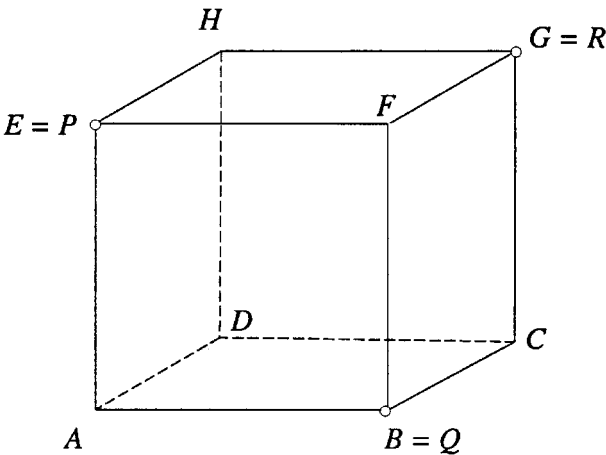


7. On donne les points P , Q et R . Construire les traces du plan PQR sur les faces du cube.

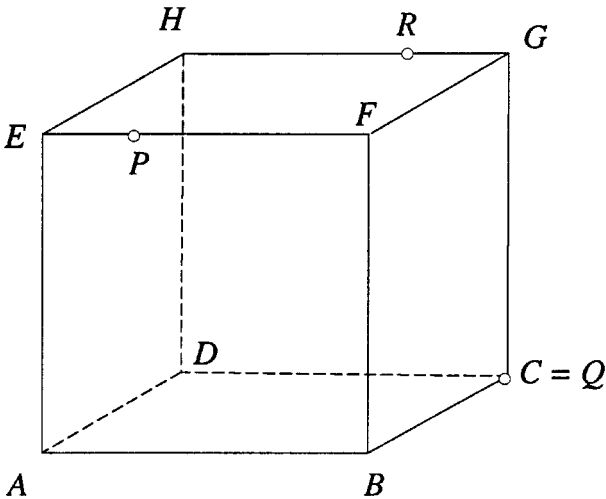
a)



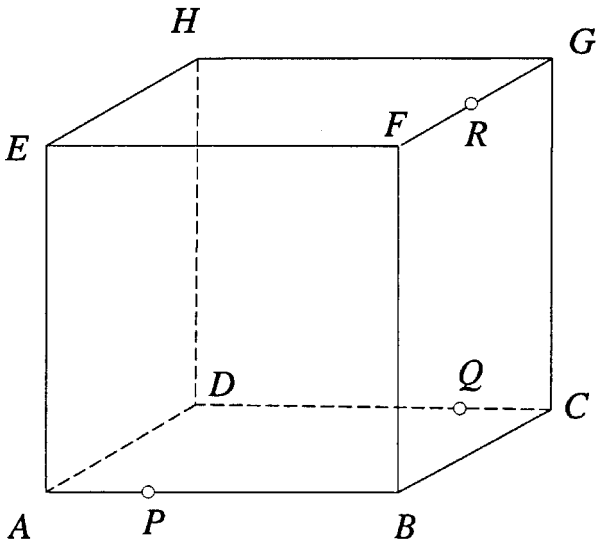
b)



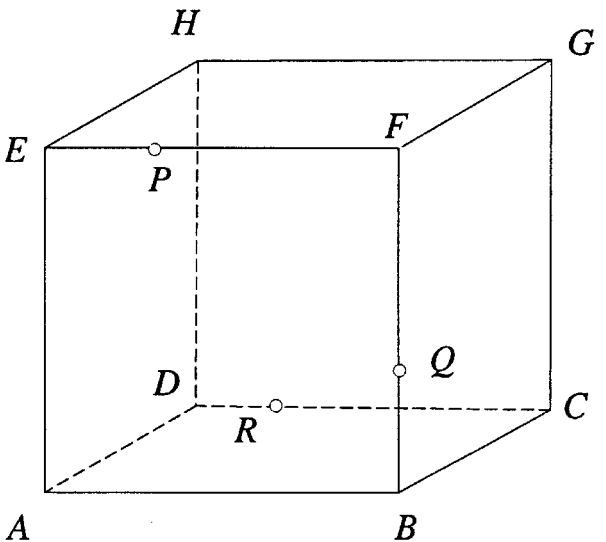
c)



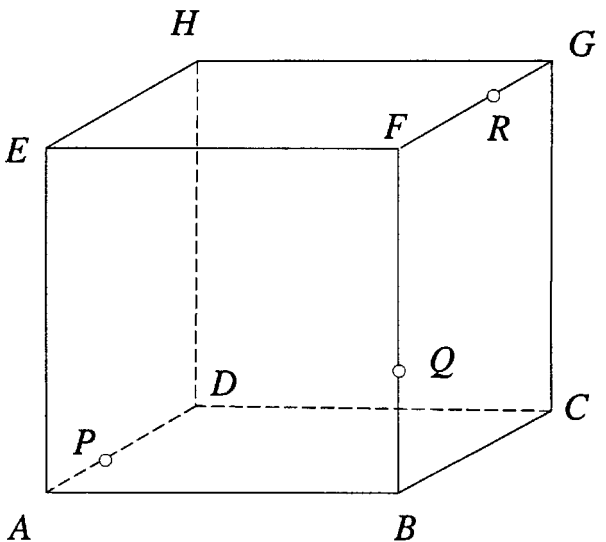
d)



e)

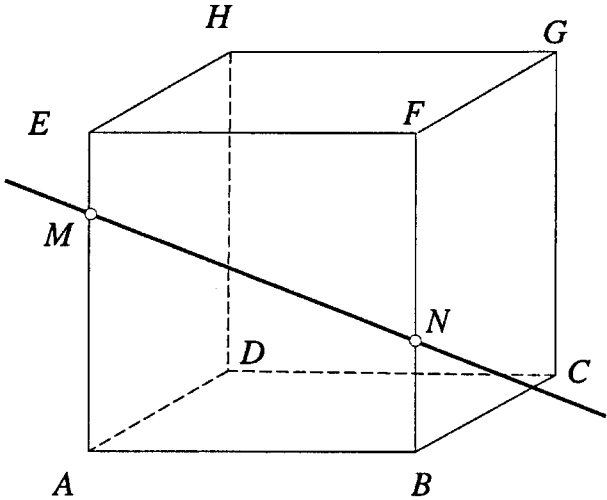


f)

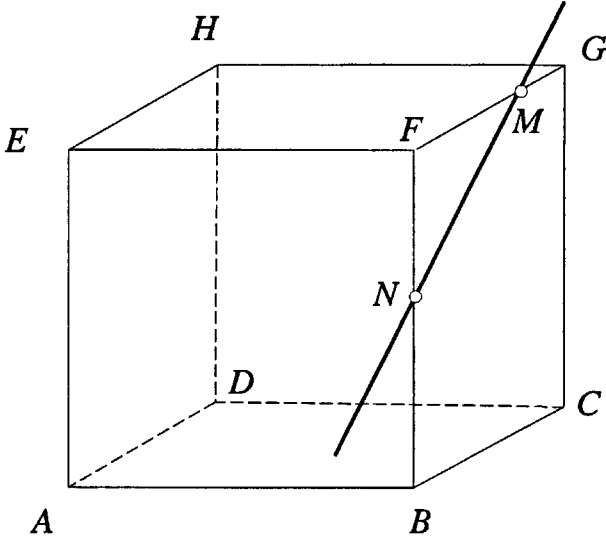


8. On donne une droite MN . Construire la trace de cette droite sur le plan ABC :

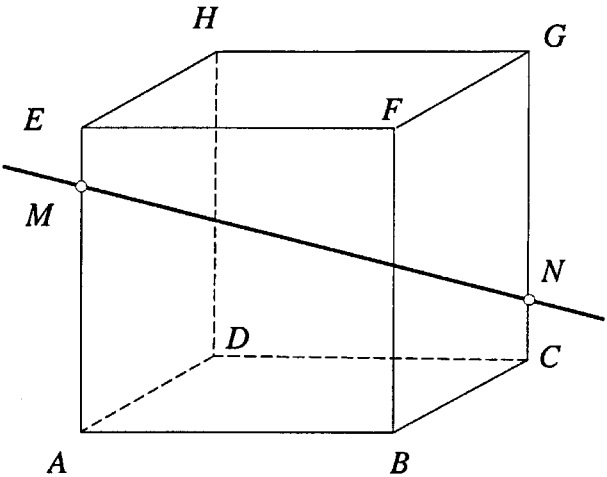
a)



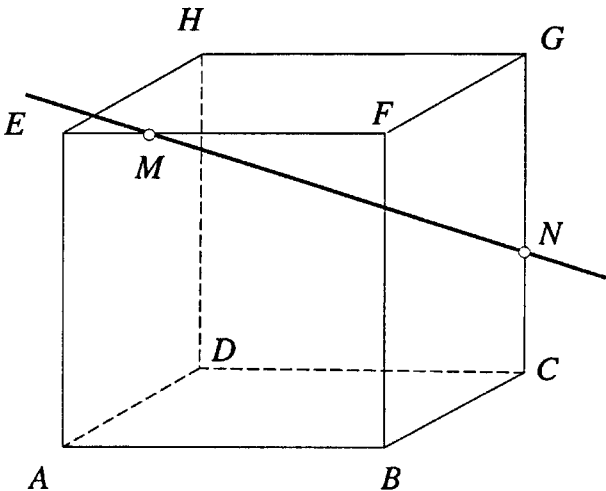
b)



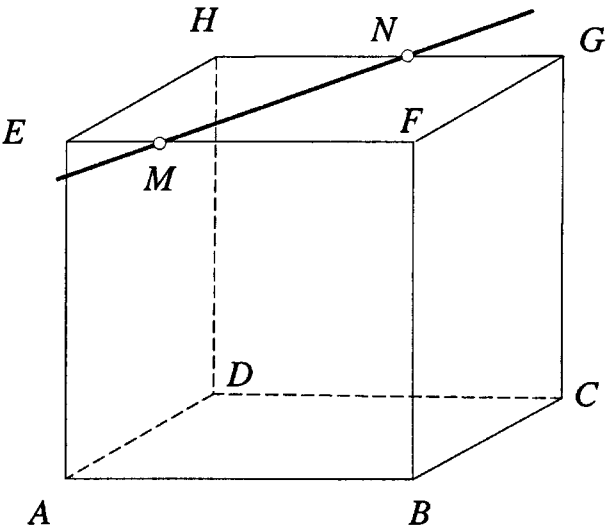
c)



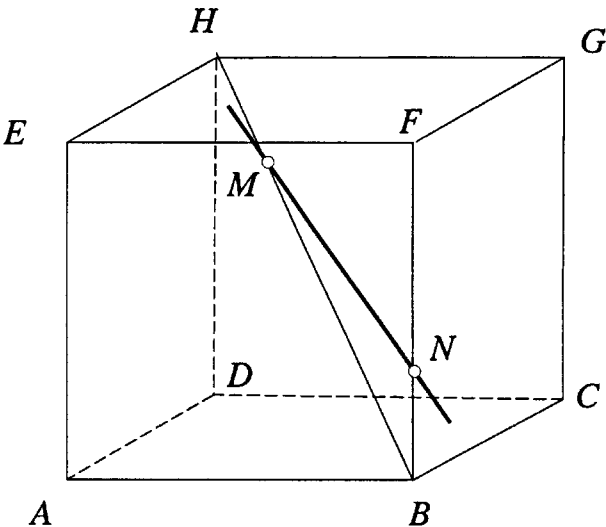
d)



e)

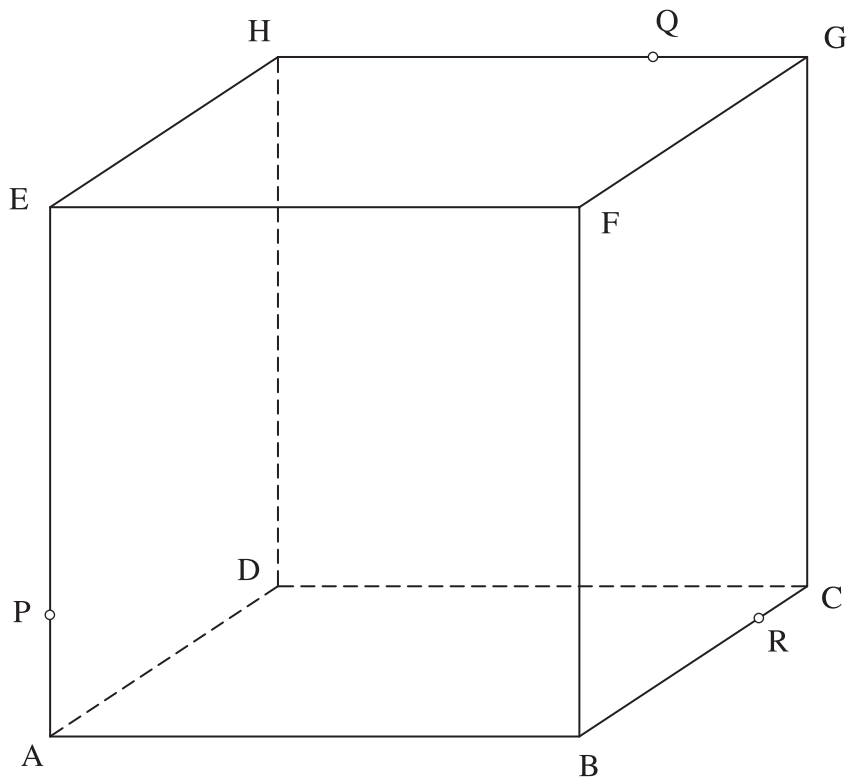


f)

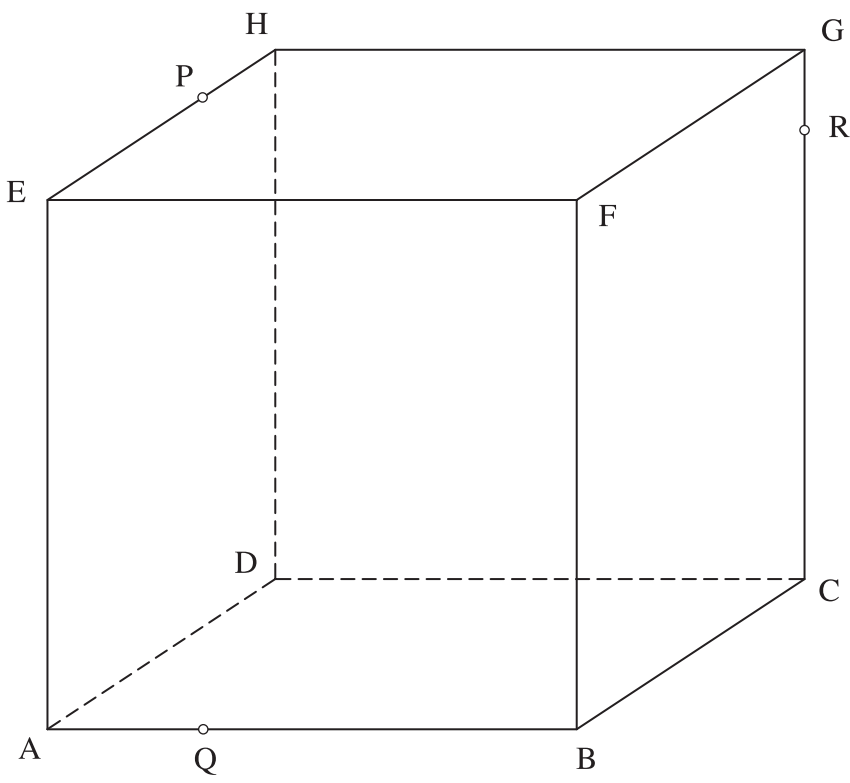


9. On donne les points P , Q et R . Construire les traces du plan PQR sur les faces du cube.

a)

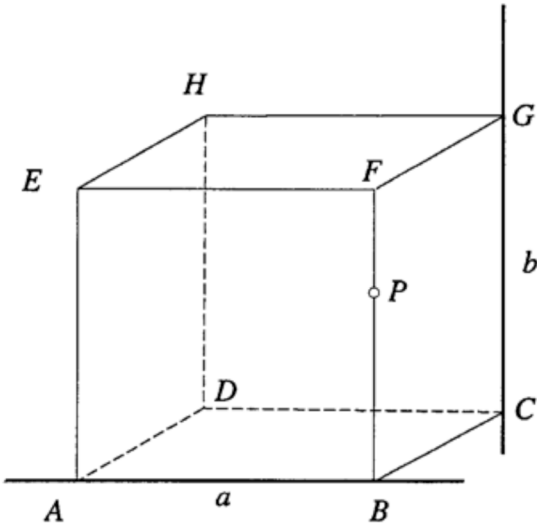


b)

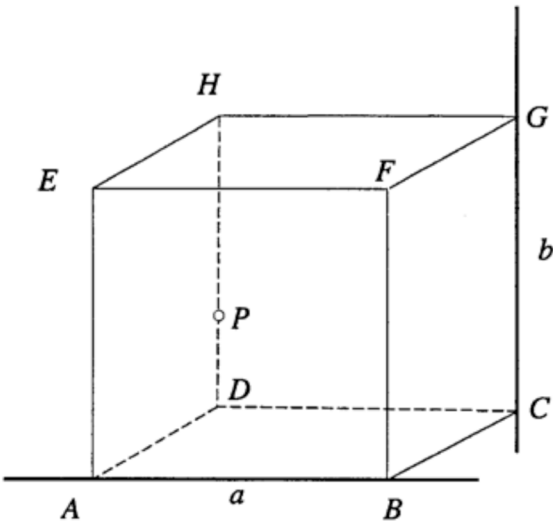


10. Représenter l'intersection des plans (P, a) et (P, b) .

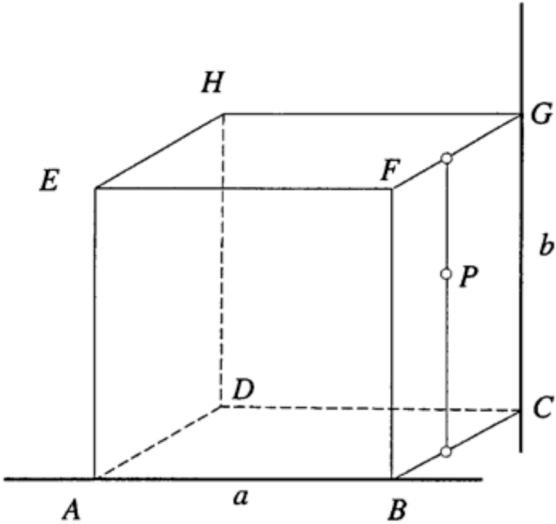
a)



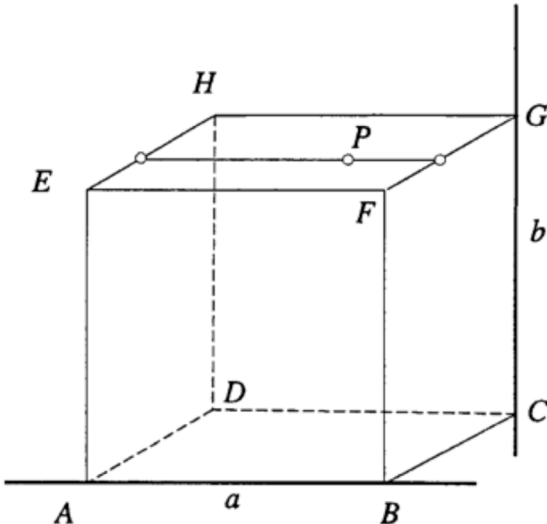
b)



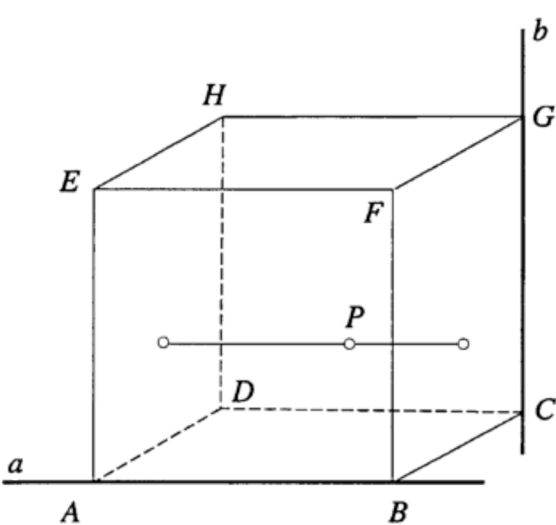
c)



d)



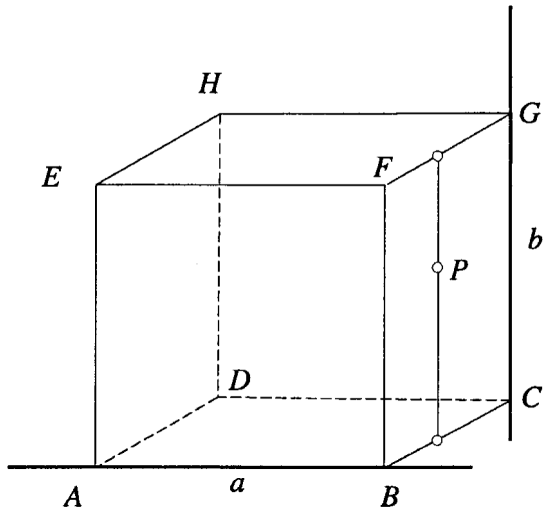
e)



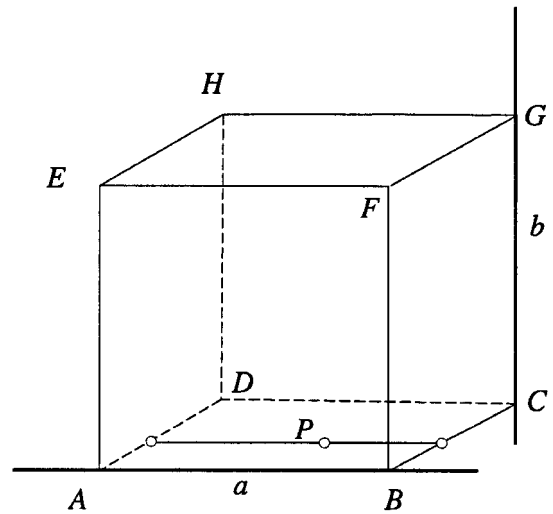
11. Représenter une droite d passant par P et coupant les droites a et b .

Indication : se servir du plan auxiliaire (P, a) ou (P, b) .

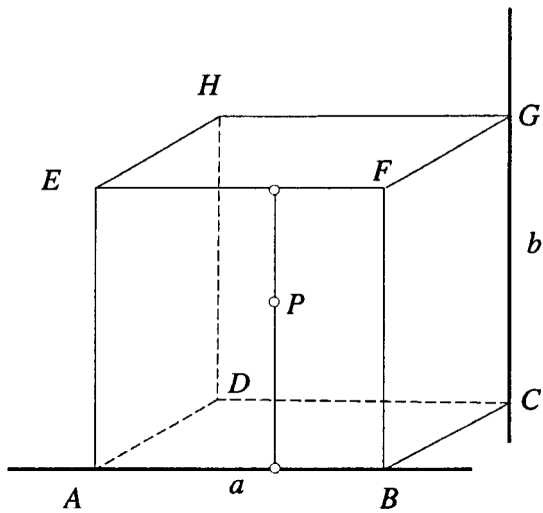
a)



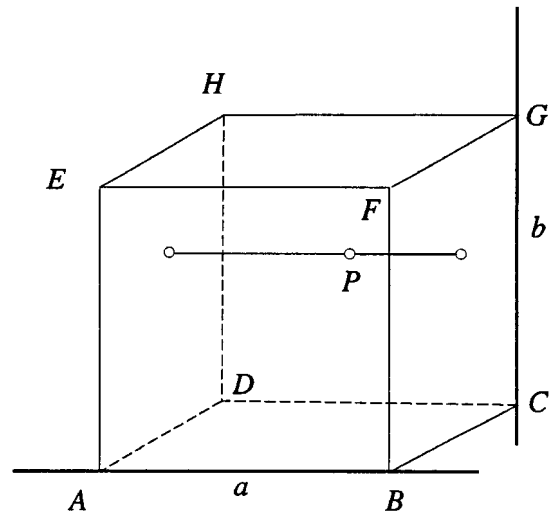
b)



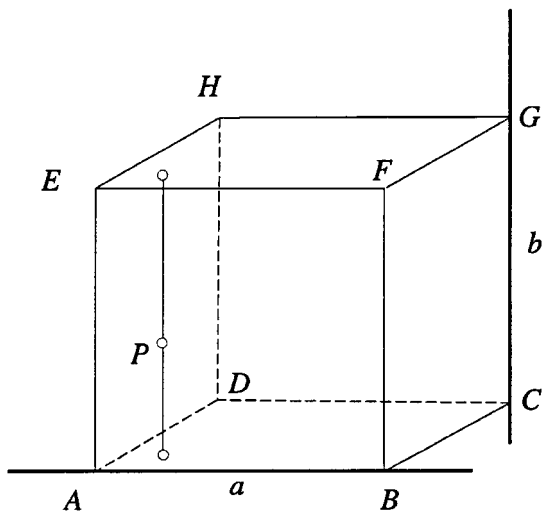
c)



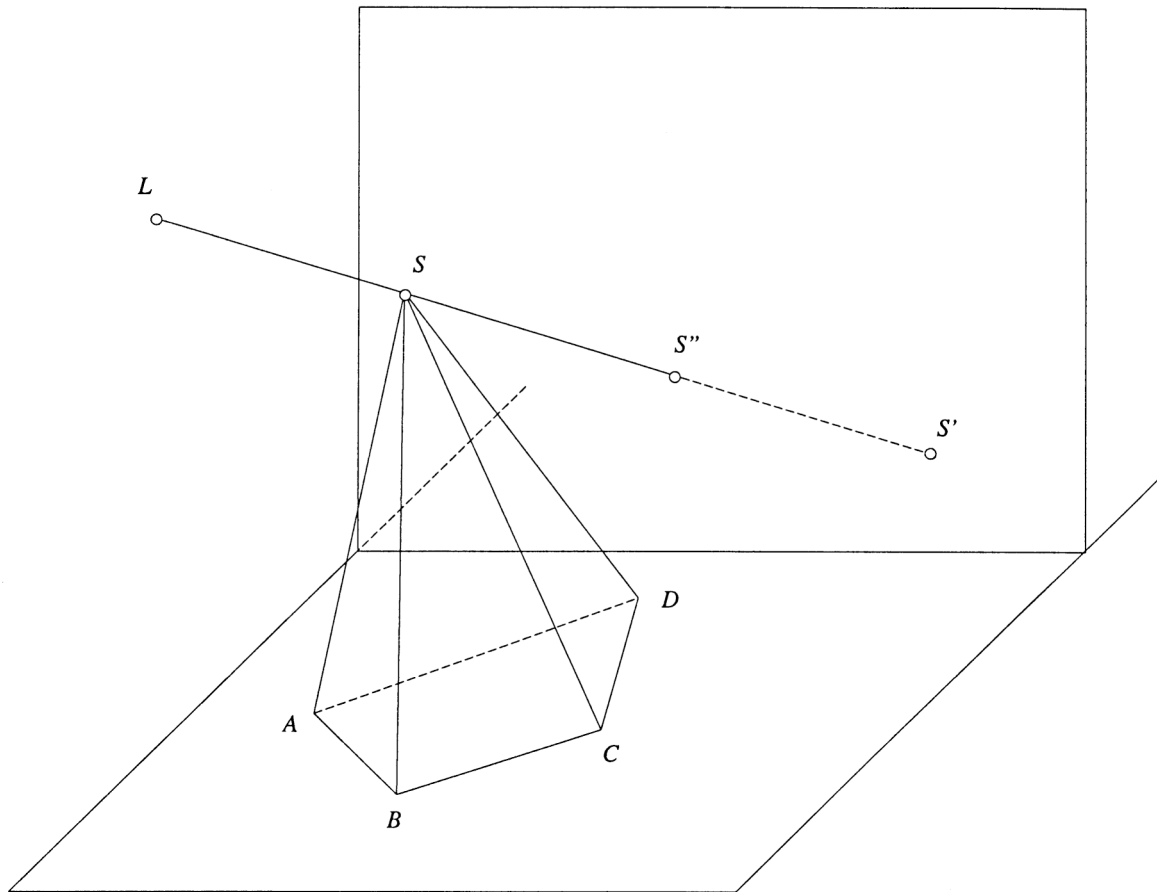
d)



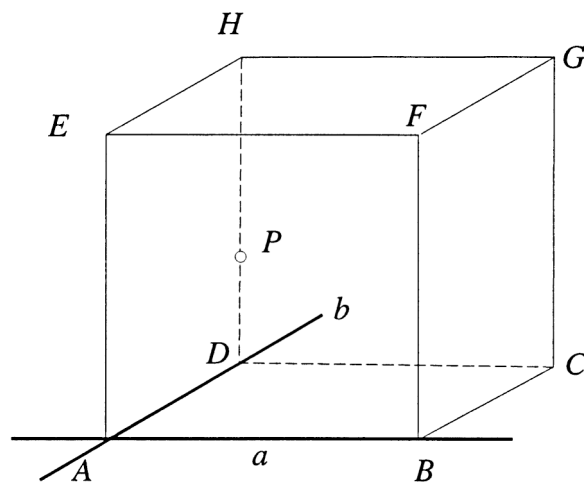
e)



12. La pyramide de sommet S a sa base $ABCD$ située dans le sol. Elle est éclairée par une source lumineuse L . L'ombre de S sur le mur est S'' , alors que son ombre sur le sol serait S' si le mur n'existait pas. Construire l'ombre de la pyramide sur le sol et le mur. Quelles faces de la pyramide sont-elles à l'ombre ?

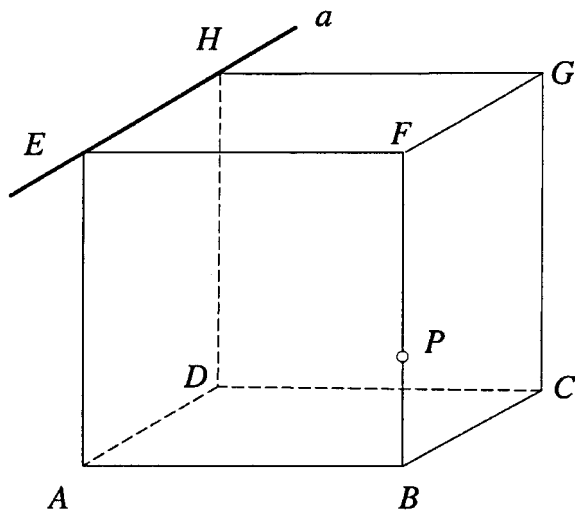


13. Représenter le lieu géométrique des droites passant par P et parallèles au plan (a, b) .

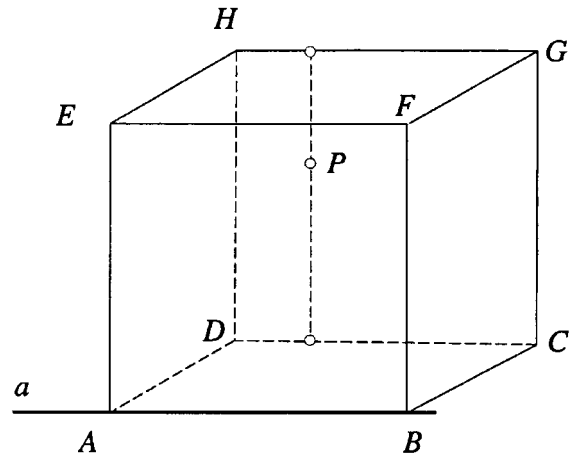


14. Représenter les traces du plan (P, a) sur les faces du cube.

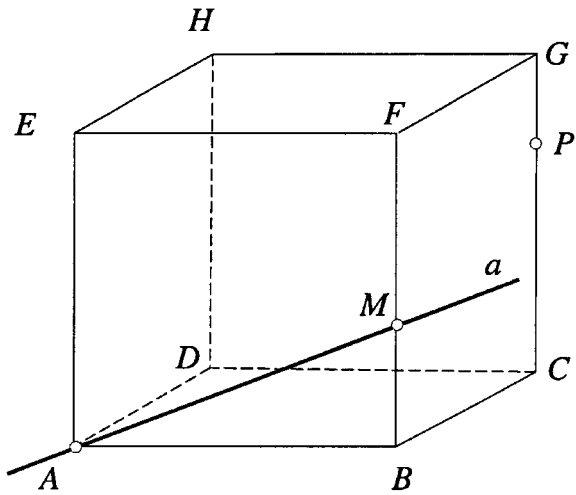
a)



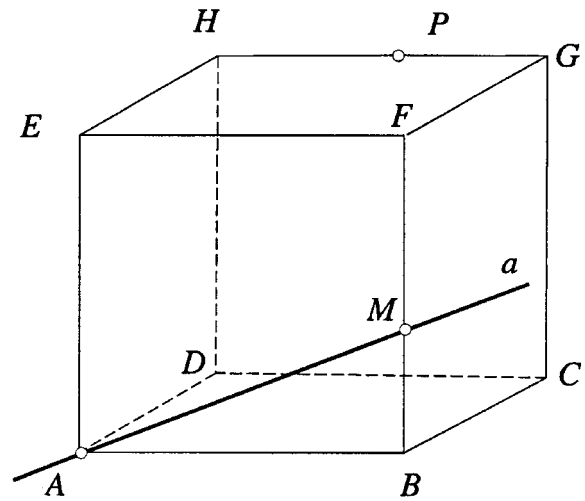
b)



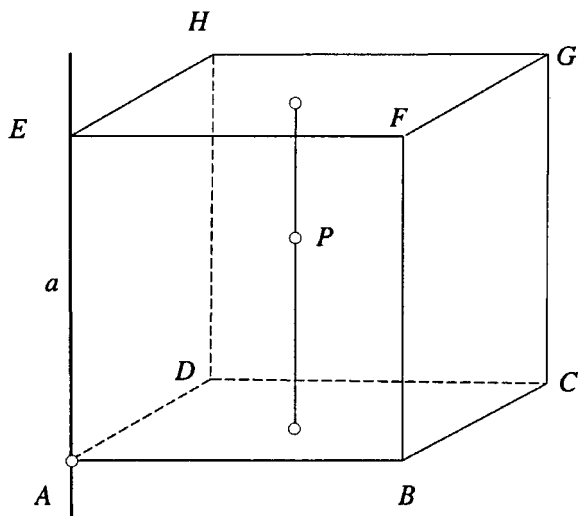
c)



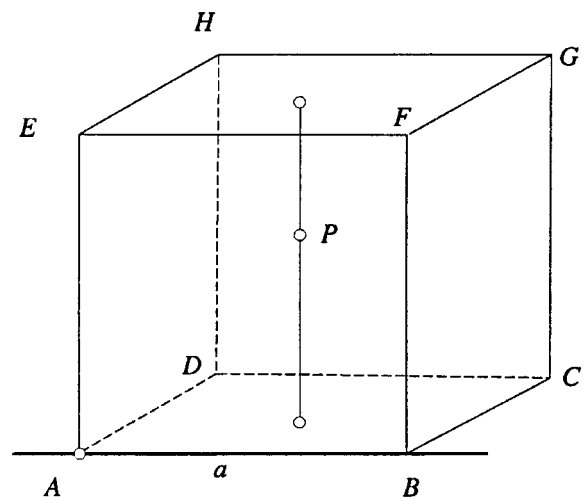
d)



e)



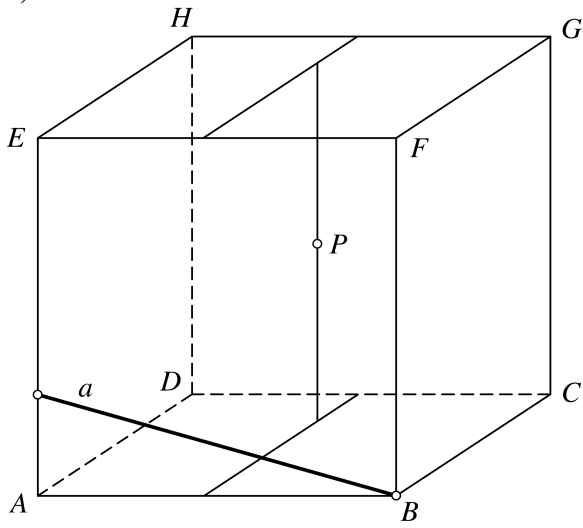
f)



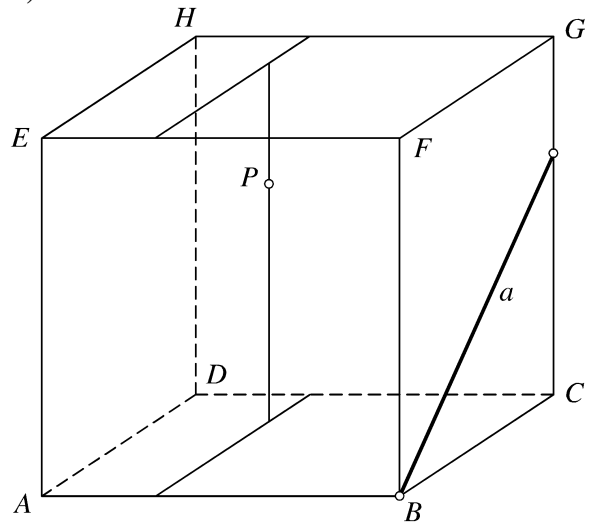
15. Représenter les traces du plan (P, a) sur les faces du cube.

Indication : introduire un plan auxiliaire passant par P et parallèle à la face de gauche.

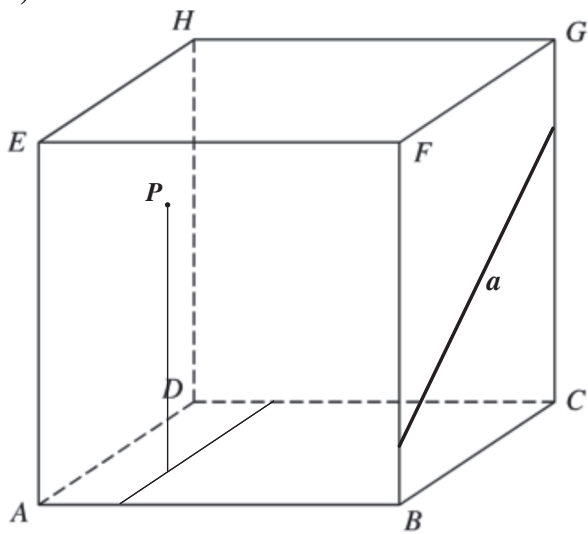
a)



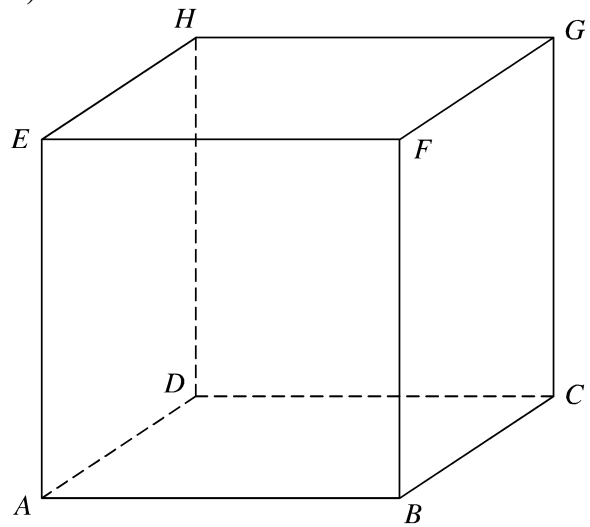
b)



c)



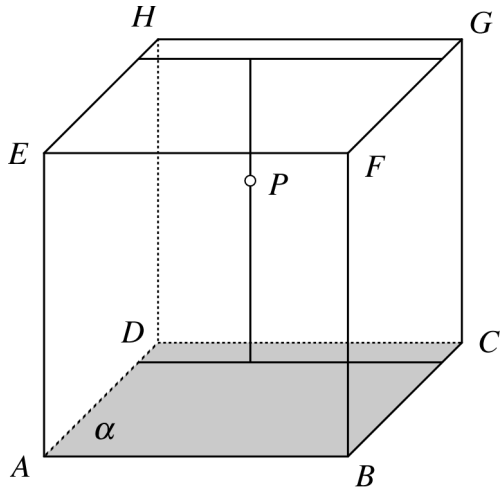
d)



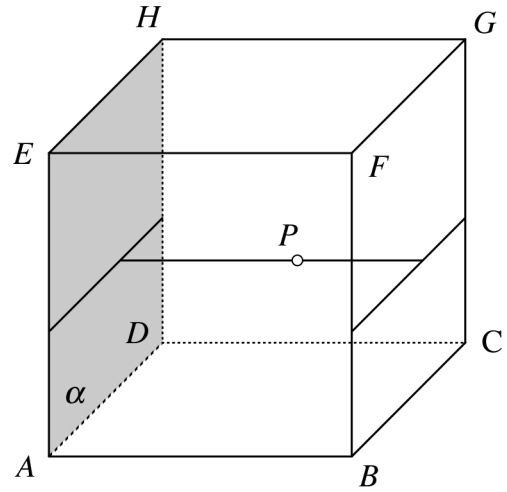
16. On donne un point P et un plan α . Construire la trace sur les faces du cube du plan parallèle à α et passant par P .

Indication : construire les traces sur le cube d'une parallèle d à α par P .

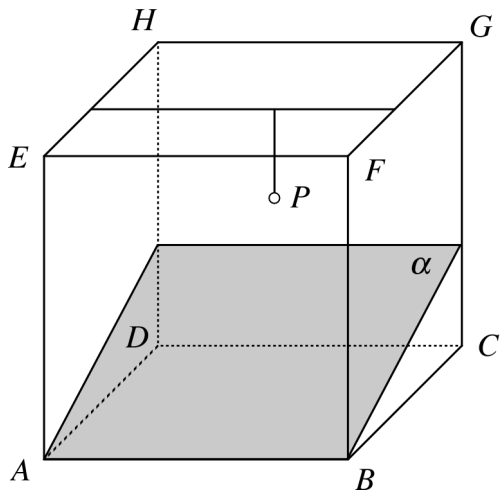
a)



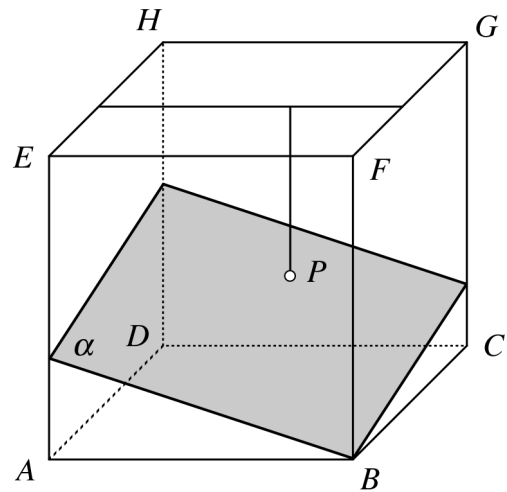
b)



c)



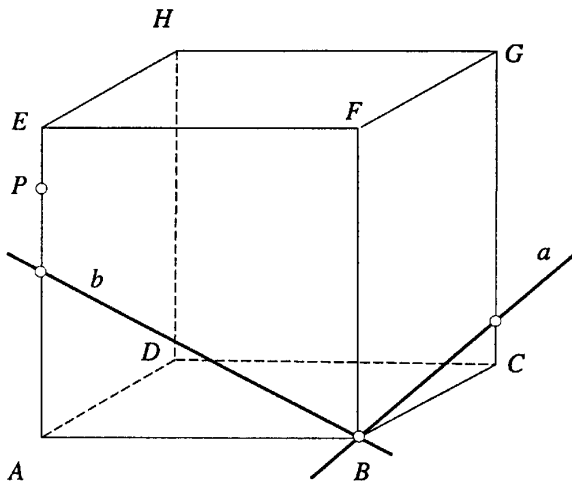
d)



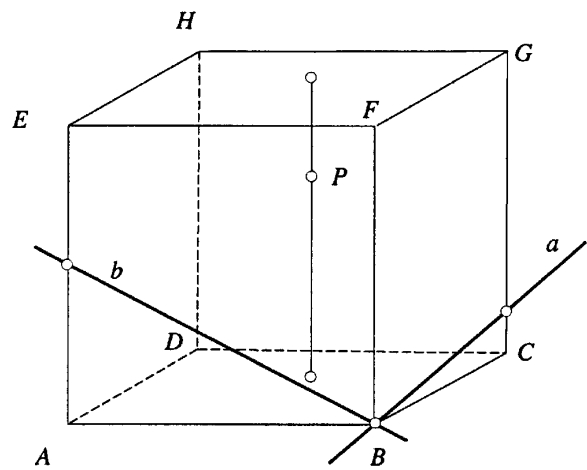
17. On donne un point P et un plan α déterminé par deux droites a et b . Construire la trace sur les faces du cube du plan parallèle à α et passant par P .

Indication : construire les traces sur le cube d'une parallèle à α par P .

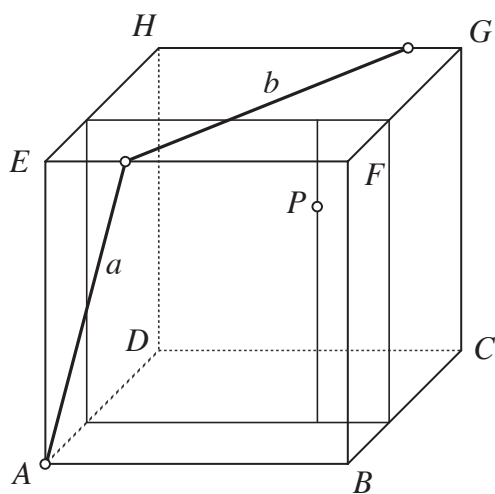
a)



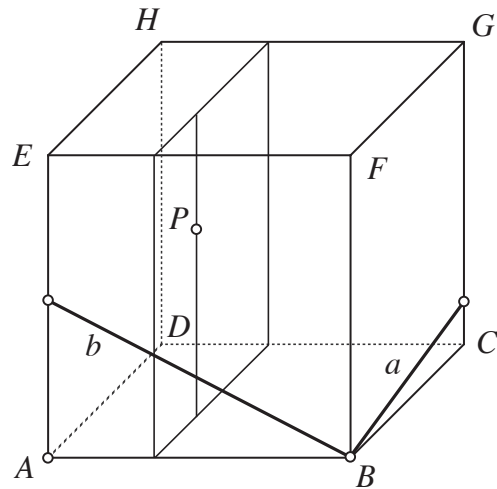
b)



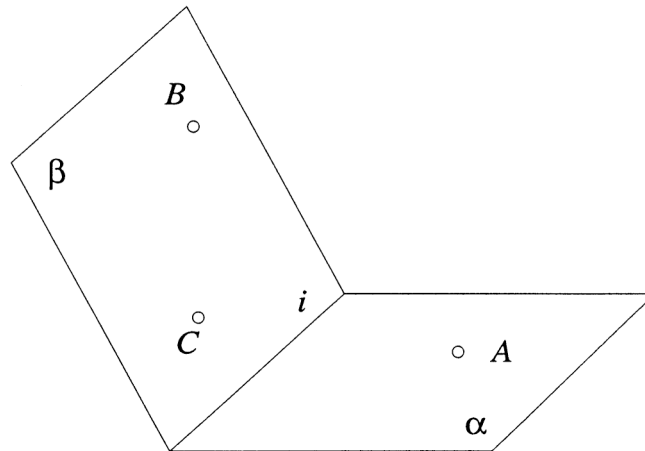
c)



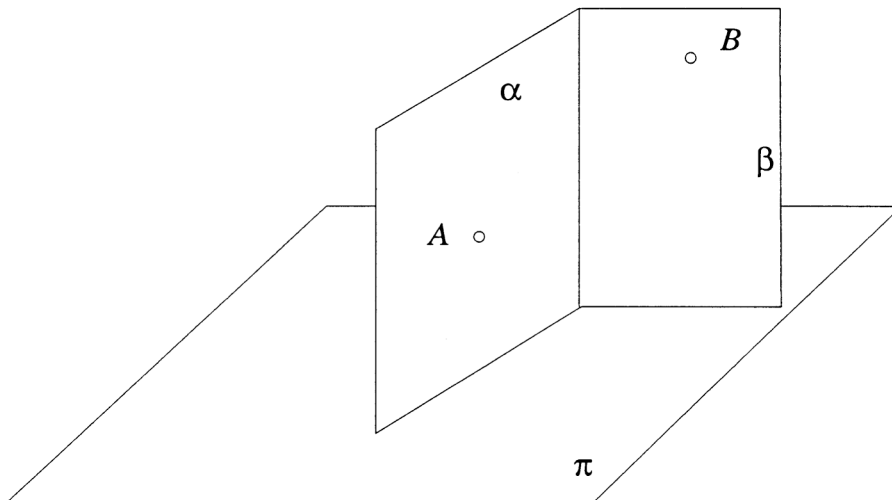
d)



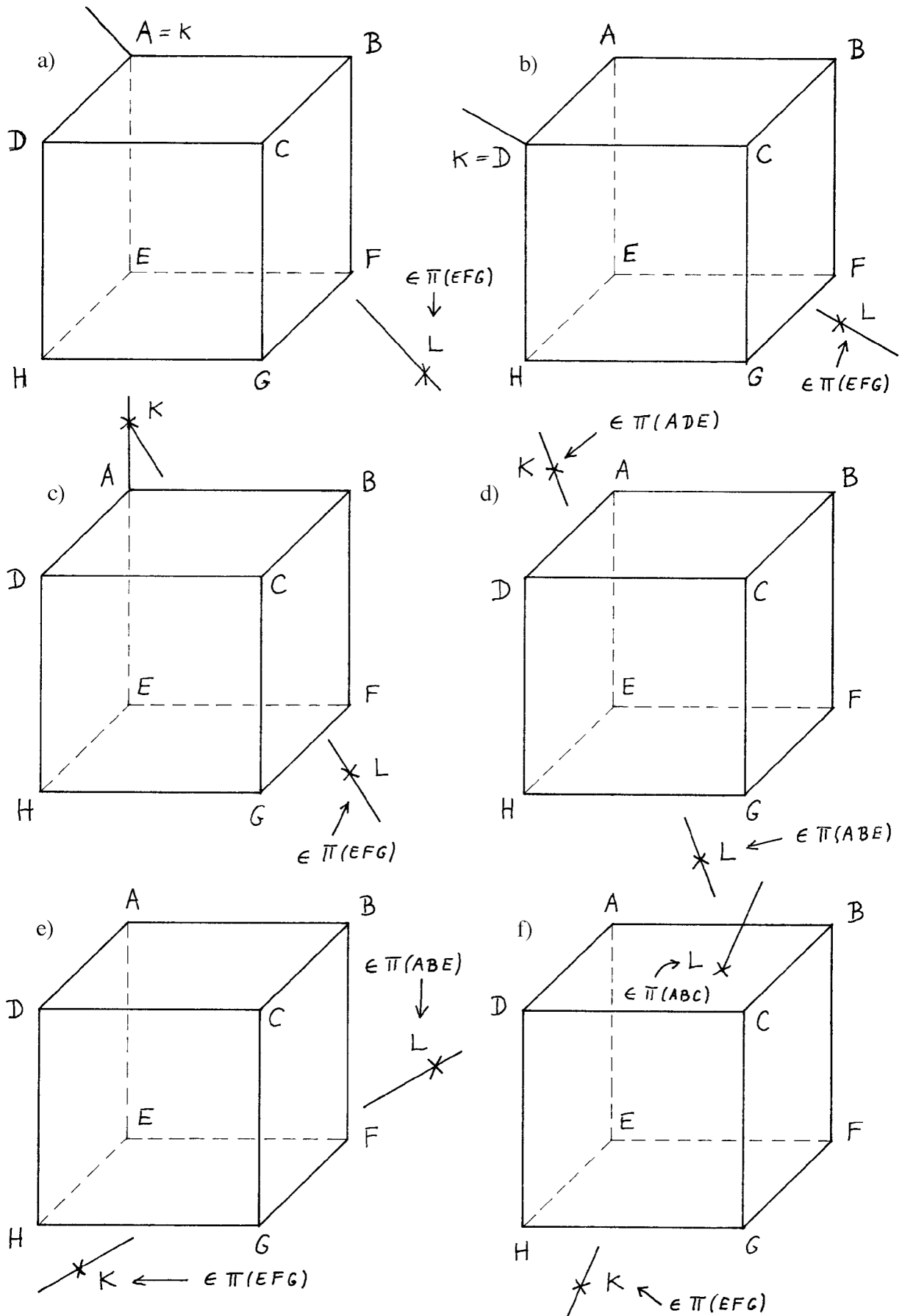
- 18.** Soit α et β deux plans sécants suivant une droite i , A un point de α et B, C deux points de β .
- Construire l'intersection d de α et du plan ABC .
 - Que peut-on dire de d lorsque la droite BC est parallèle à i ?



- 19.** Le point A est dans le plan α et le point B dans le plan β . Construire l'intersection P de la droite AB et du plan π .

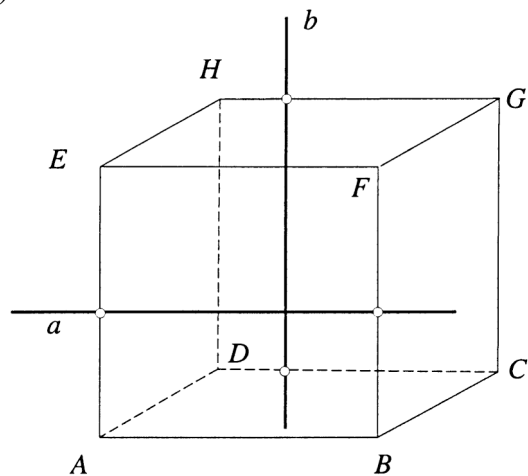


20. Construire l'intersection de la droite KL avec le cube. (Commencer par construire l'intersection avec le cube d'un plan contenant la droite KL .)

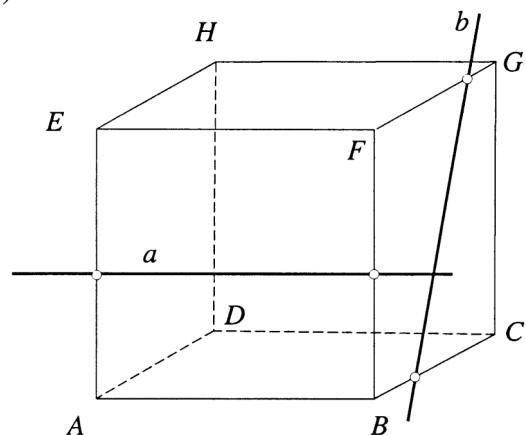


21. On donne deux droites gauches a et b . Construire deux plans parallèles α et β , α contenant a et β contenant b .

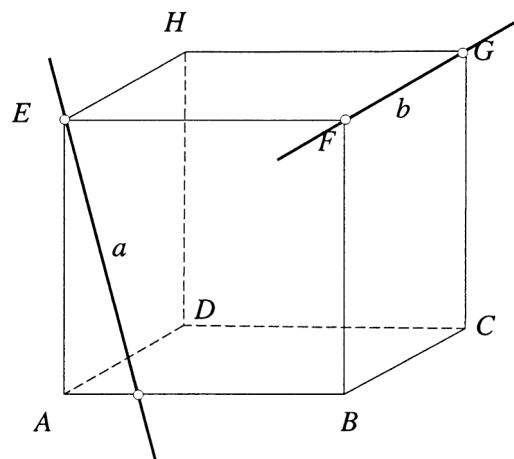
a)



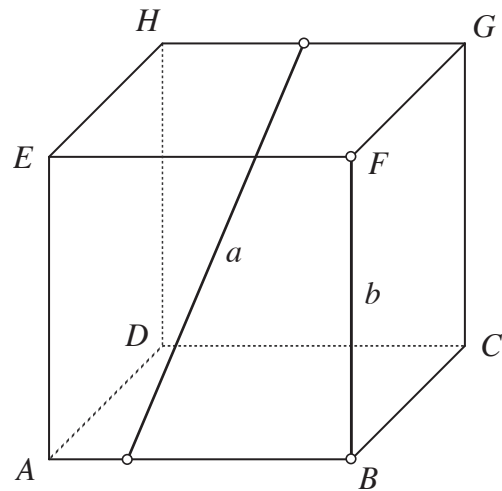
b)



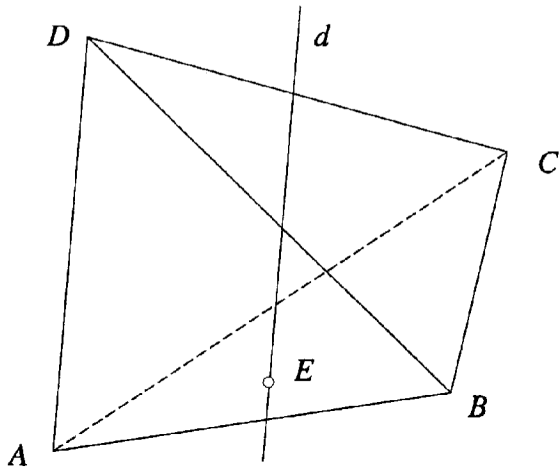
c)



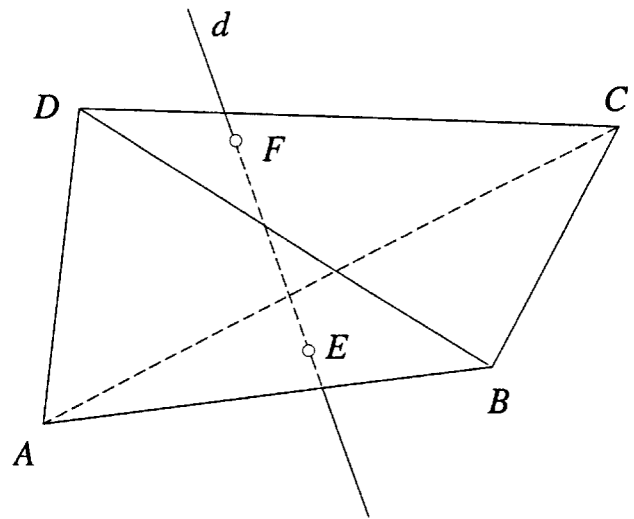
d)



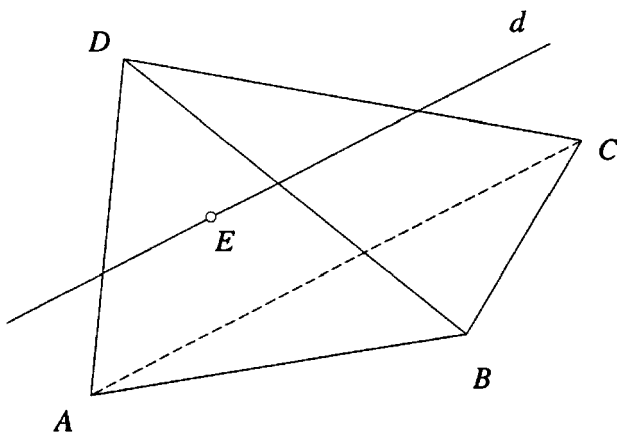
a) Le point E appartient à la face ABC , la droite d est parallèle à l'arête AD et passe par E . En quel point d recoupe-t-elle le tétraèdre ?



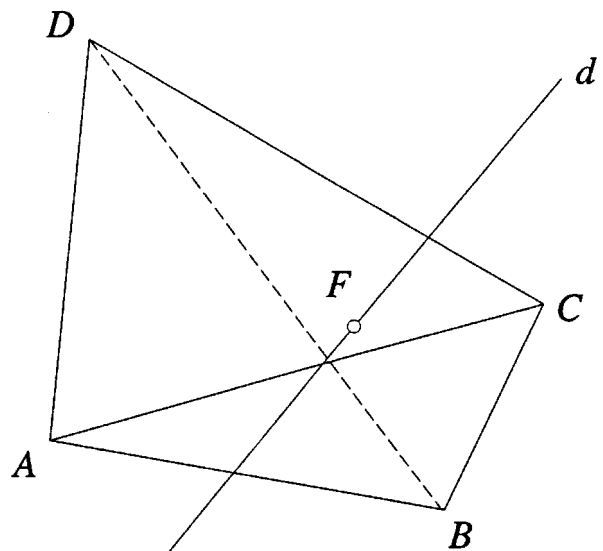
b) Le point E appartient à la face ABC , le point F à la face BCD et d coupe la droite AD . Le dessin est-il correct ?



c) Le point E appartient à la face ABD , la droite d est parallèle à l'arête AC et passe par E . En quel point d recoupe-t-elle le tétraèdre ?

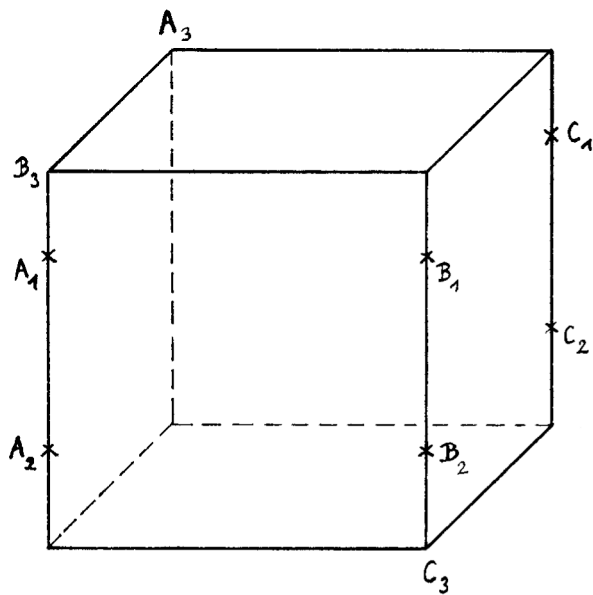


d) Le point F appartient à la face BCD et d coupe la droite AD . Construire la trace E de d sur la face ABC .

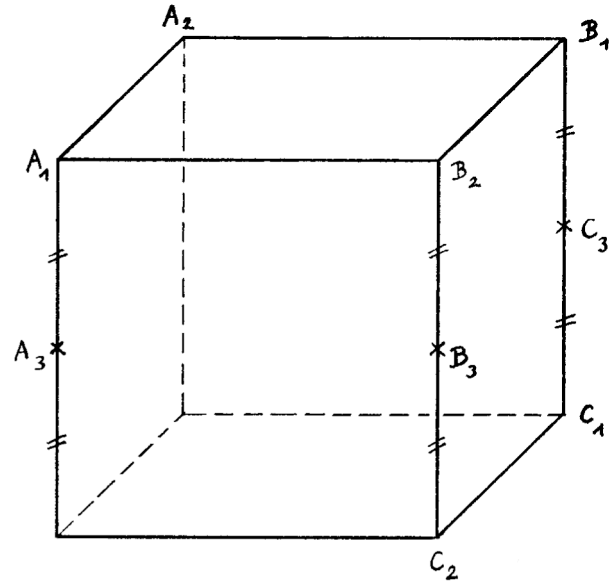


30. Construire les traces sur le cube des plans $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... , ainsi que les intersections de ces plans entre eux.

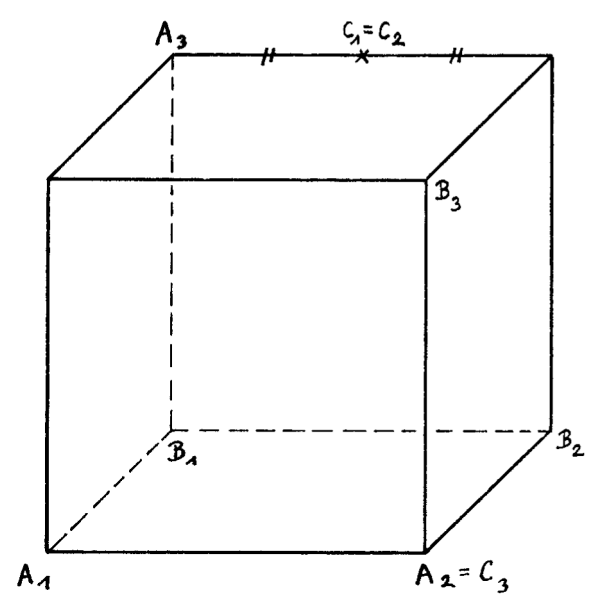
a)



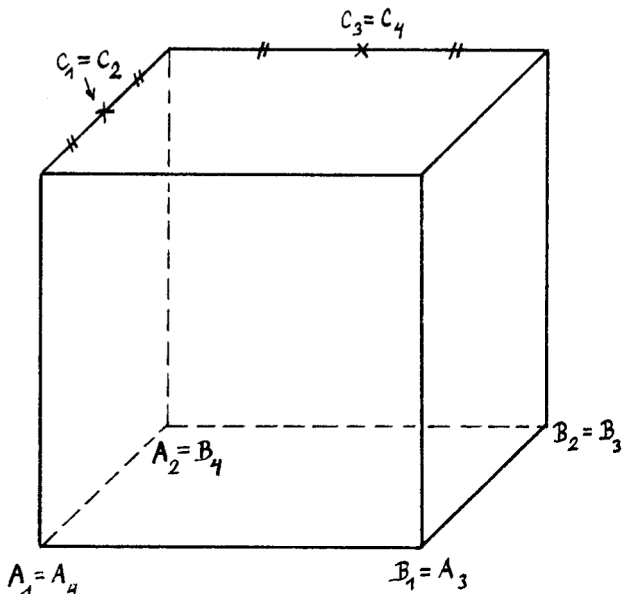
b)



c)

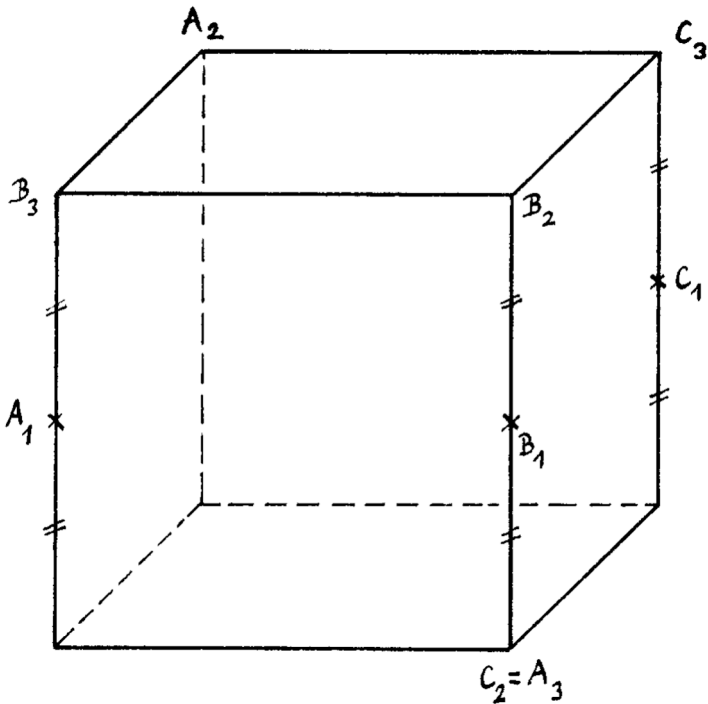


d)

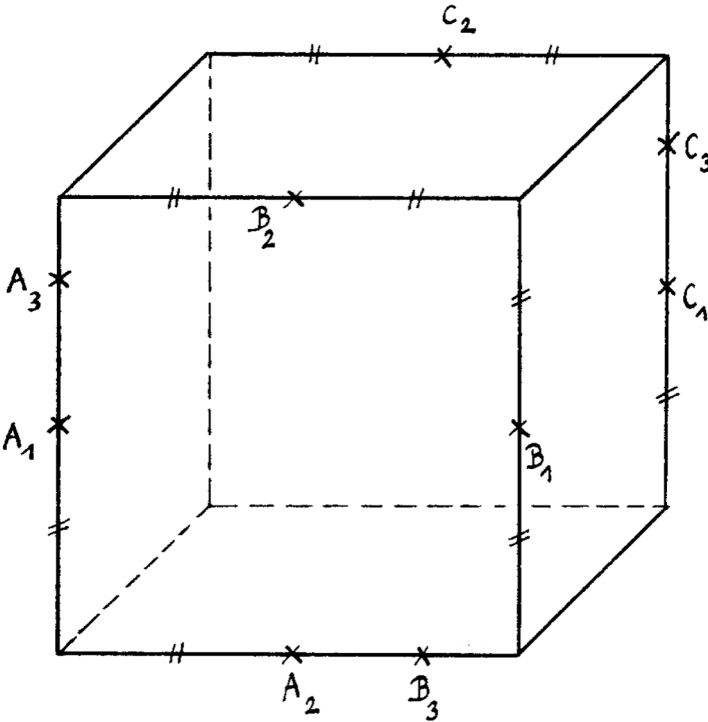


31. Construire les traces sur le cube des plans $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... , ainsi que les intersections de ces plans entre eux.

a)

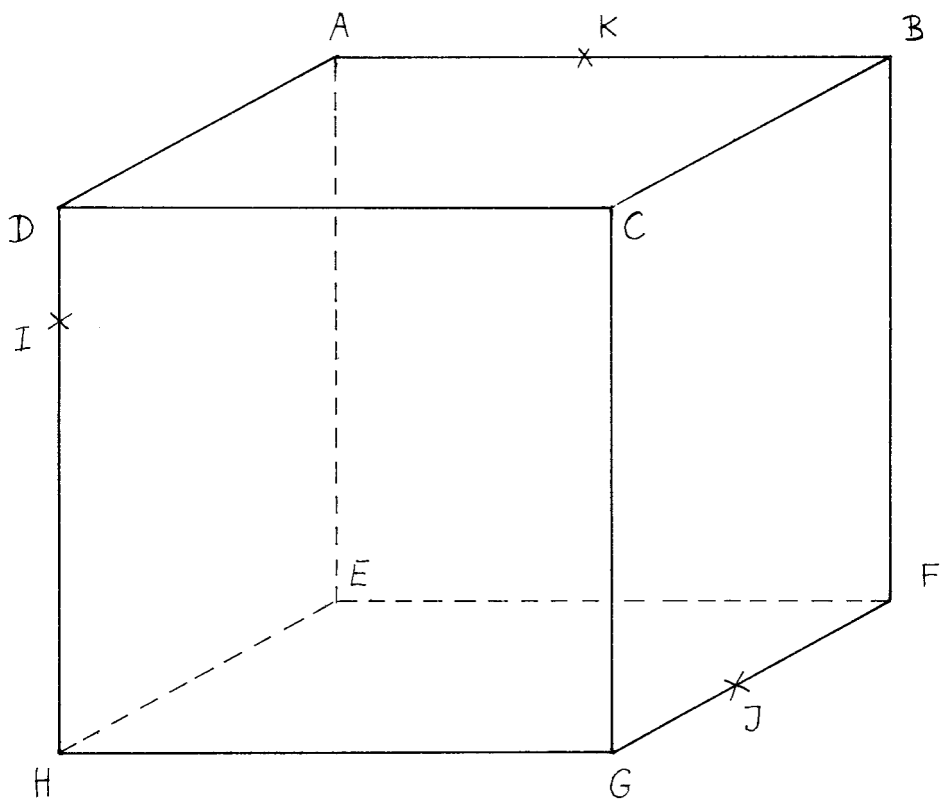


b)

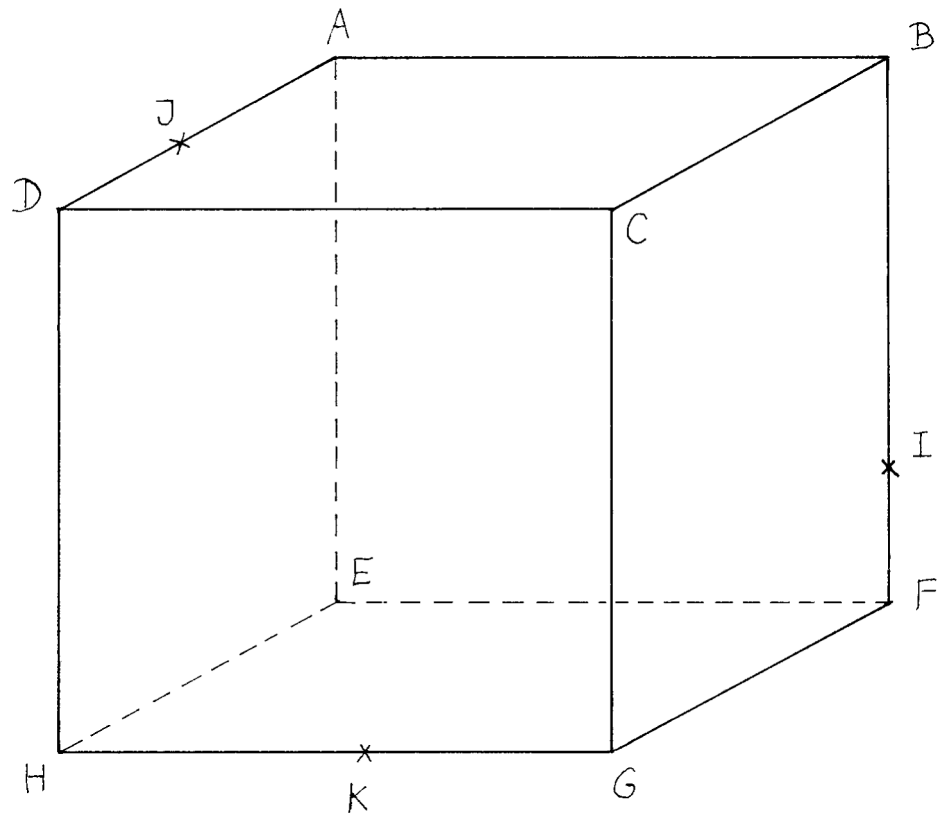


32. Dessiner l'intersection du plan IJK avec le cube.
 (Construire d'abord la trace de la droite IJ sur le plan de l'une des faces du cube contenant K .)

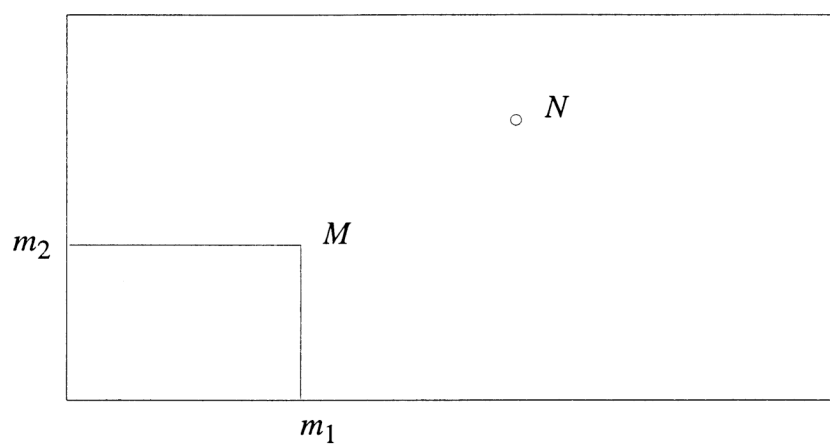
a)



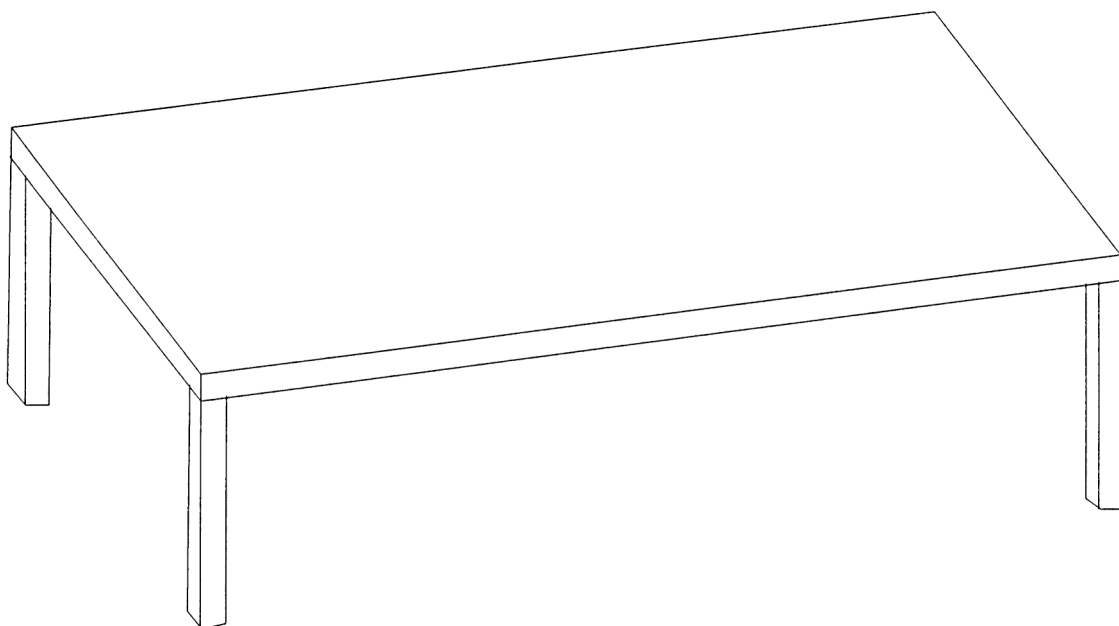
b)



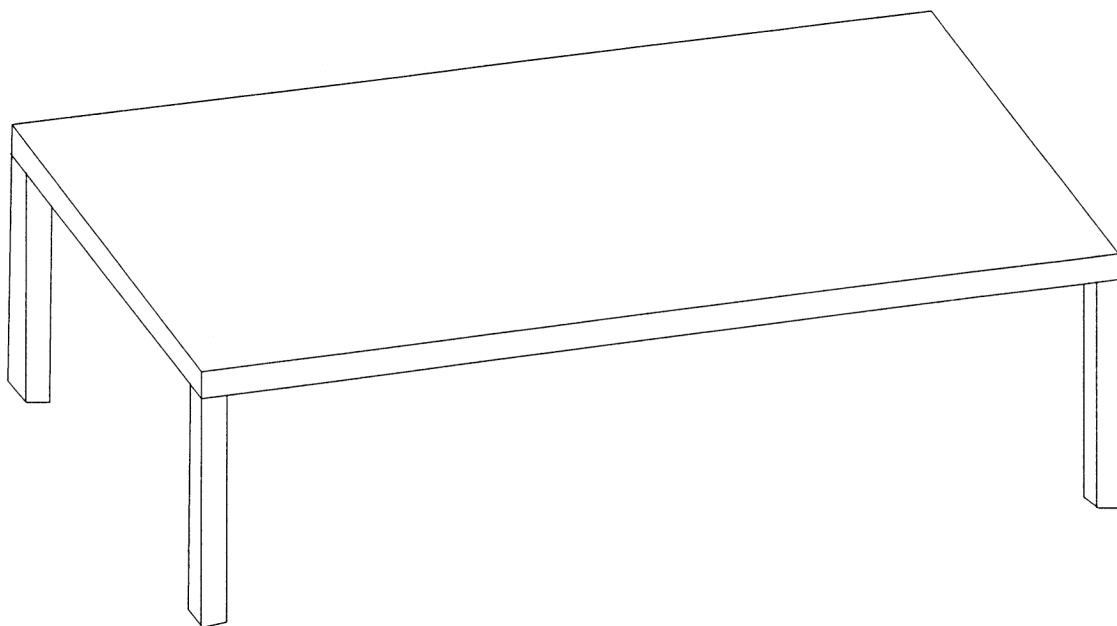
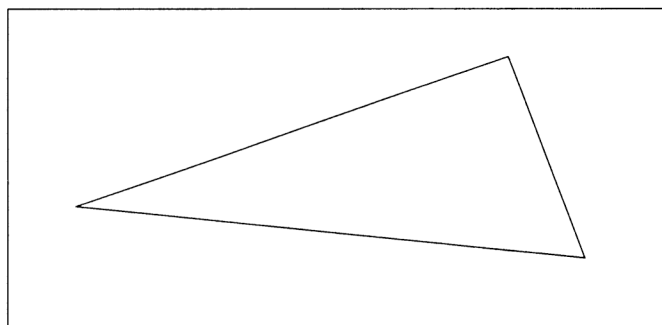
35. Le dessin ci-après représente une table vue de dessus.



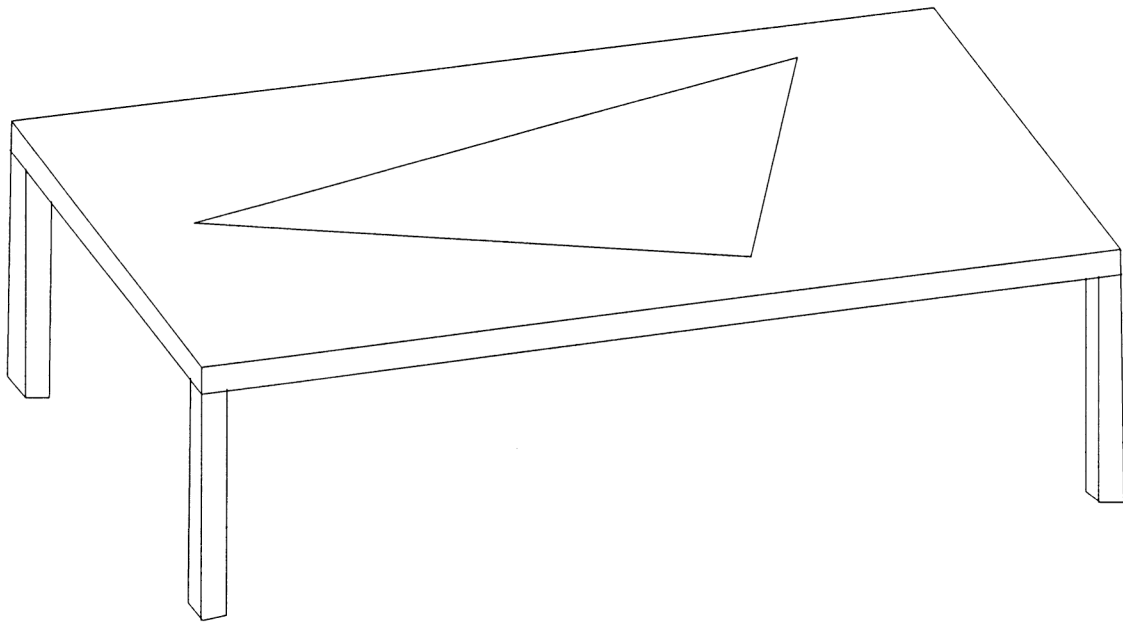
Le dessin ci-dessous représente la même table vue en perspective. Placer sur ce dessin les points M et N .



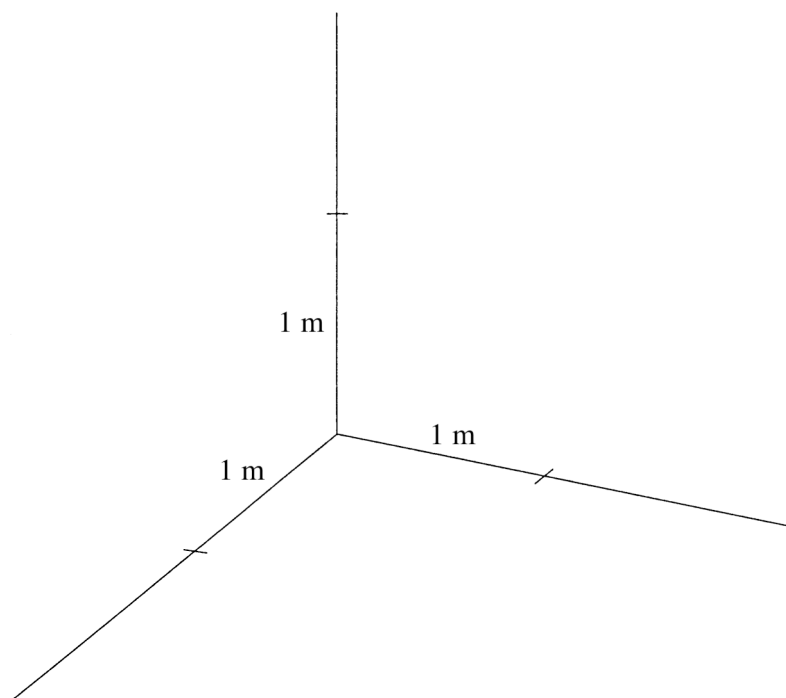
36. Le premier dessin ci-après représente une table vue de dessus, sur laquelle on a posé une équerre, et le second est une vue en perspective de cette table. Dessiner l'équerre sur la vue en perspective.



37. Sur le dessin ci-dessous, on a voulu représenter une table rectangulaire sur laquelle a été posée une équerre. Ce dessin est-il correct ? On sait que la longueur de la table est le double de sa largeur.

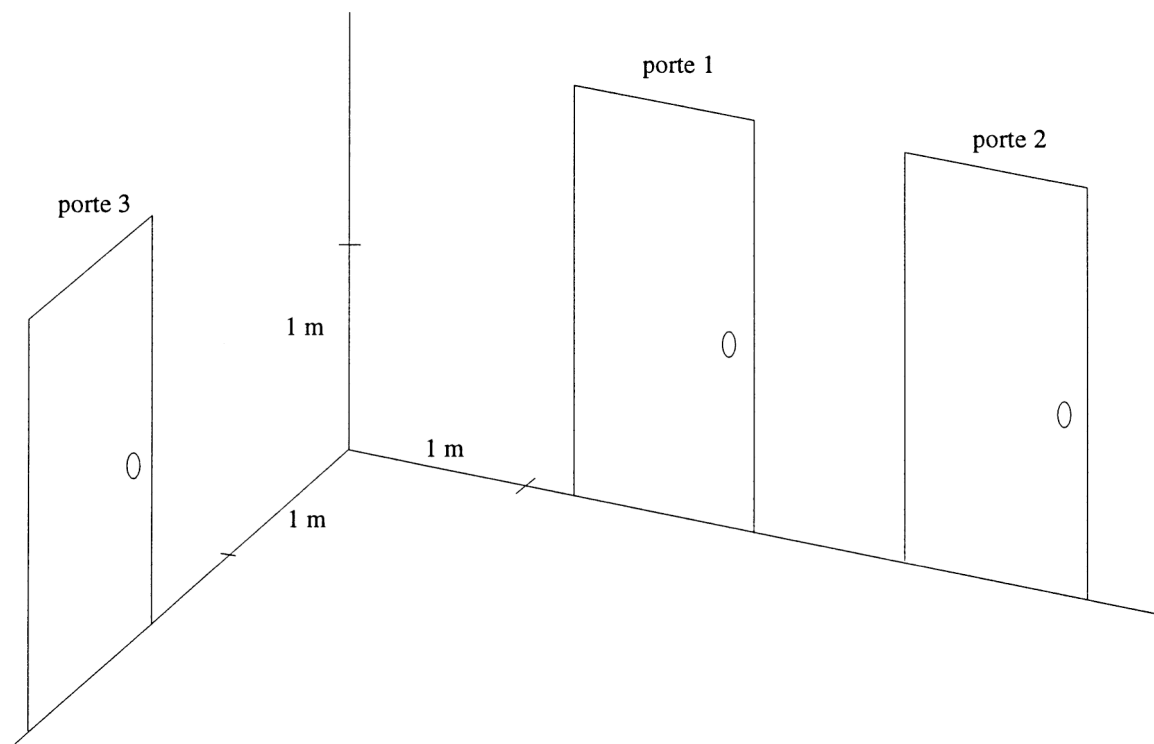


38. L'esquisse ci-après représente un coin de pièce. Contre chaque mur, on place une échelle mesurant 2 m et comportant 7 barreaux de 50 cm, régulièrement espacés. Le pied de chaque échelle est à 50 cm du mur d'appui. Elles sont situées toutes les deux à 1,50 m de l'autre mur. Dessiner ces échelles.

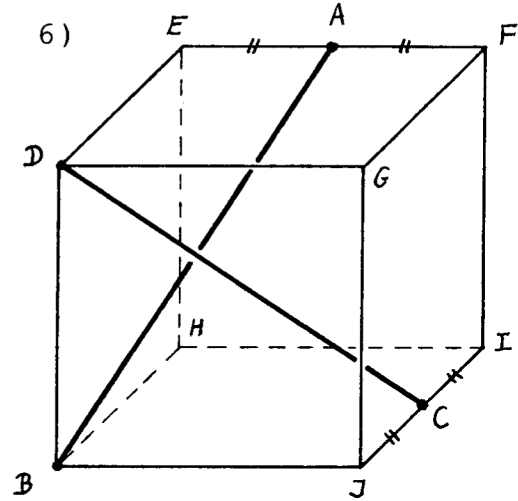
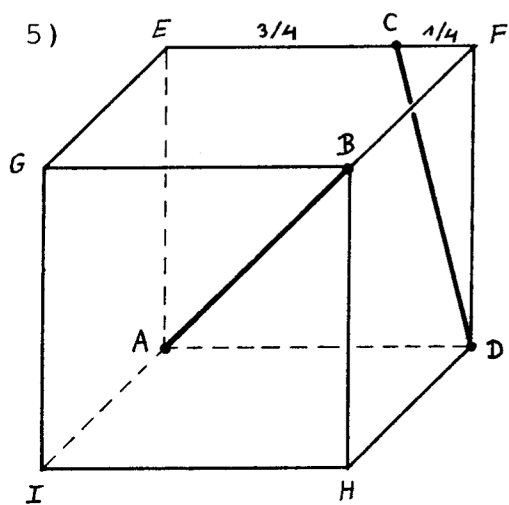
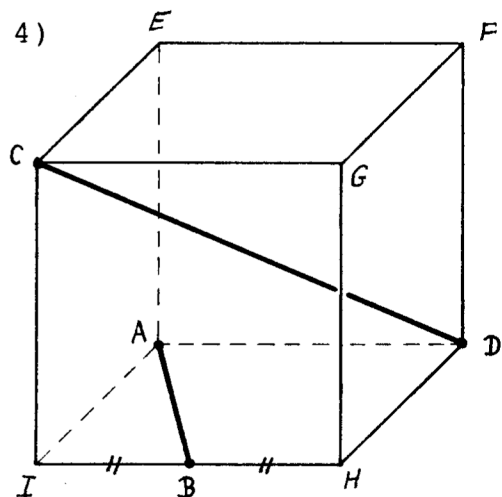
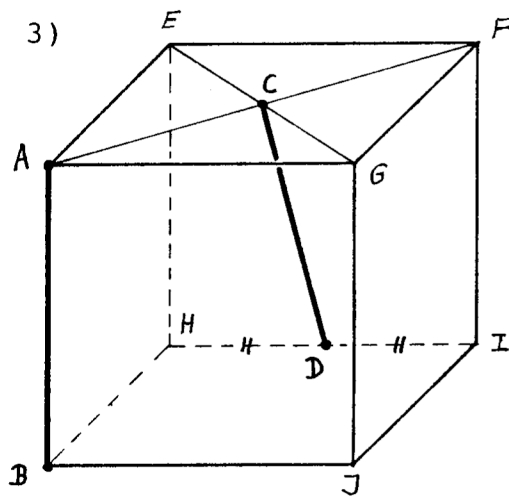
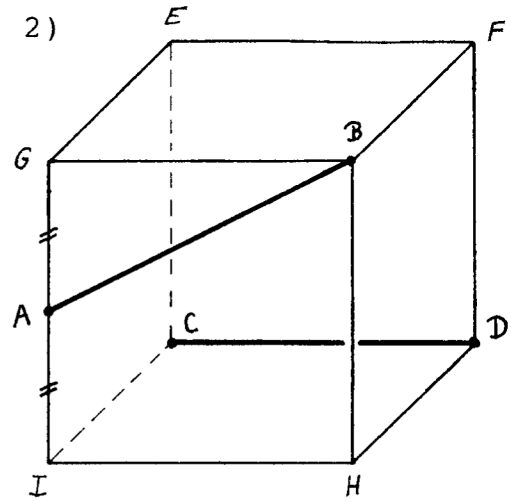
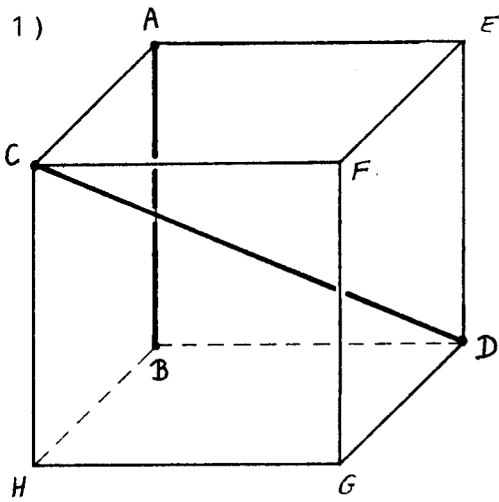


39. Le dessin ci-après figure un coin de salle. Le compléter en représentant :

- a) la porte 1 ouverte de 90° vers l'extérieur de la salle.
- b) la porte 2 ouverte de 45° vers l'intérieur.
- c) la porte 3 ouverte de 60° vers l'intérieur.

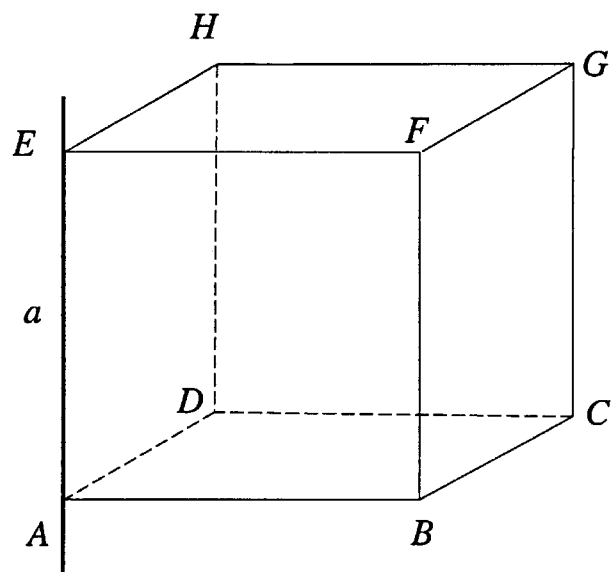


40. Calculer l'angle des droites AB et CD .

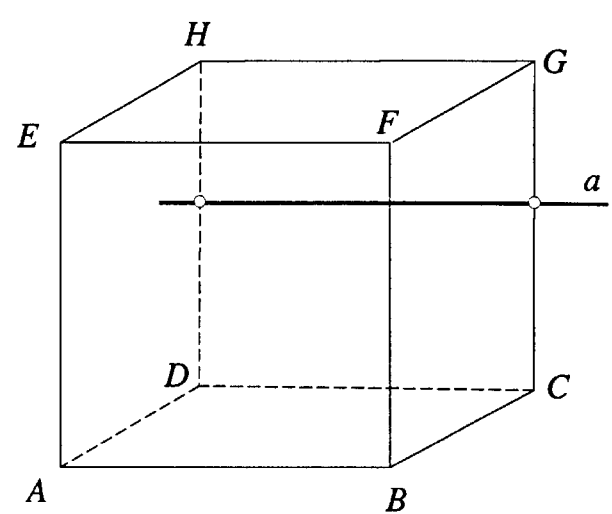


50. Représenter une droite b perpendiculaire à a et une droite c orthogonale à a , mais non perpendiculaire à a .

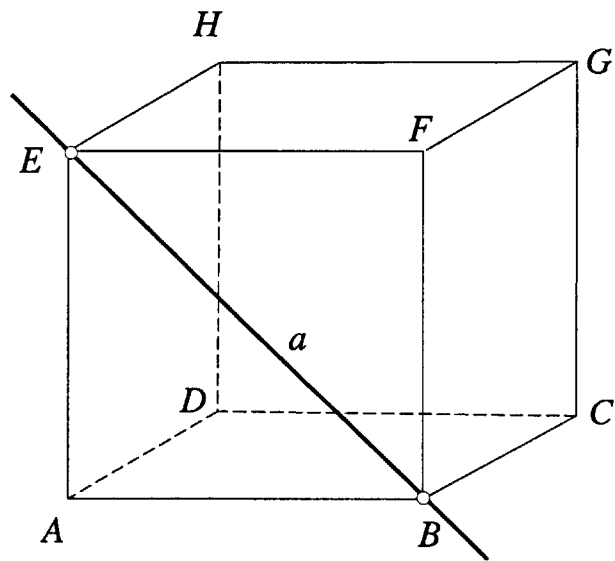
a)



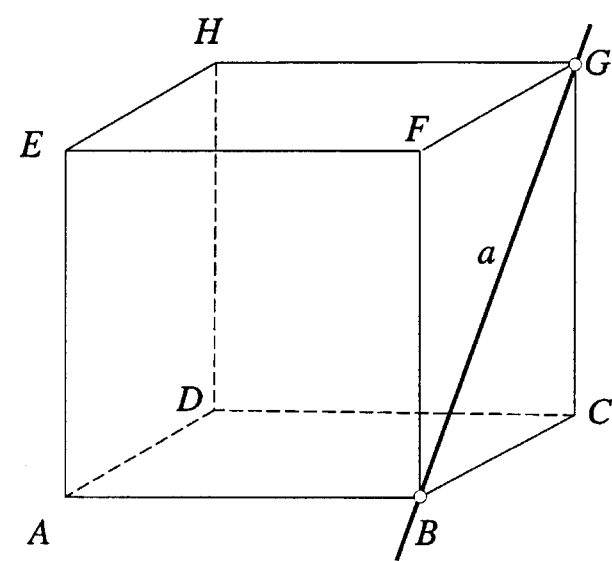
b)



c)

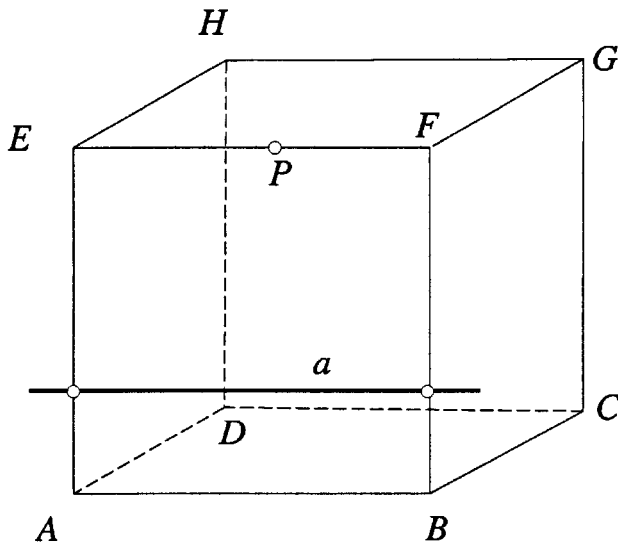


d)

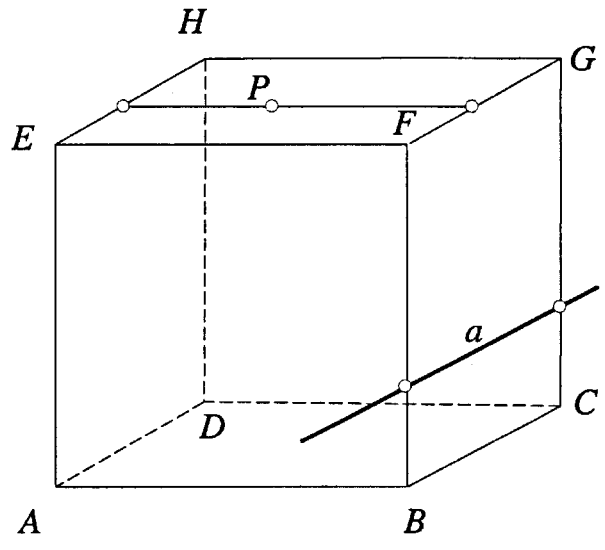


51. On donne une droite a et un point P . Représenter le plan α passant par P et perpendiculaire à a . Dessiner ensuite deux droites sécantes du plan α qui sont orthogonales à la droite a .

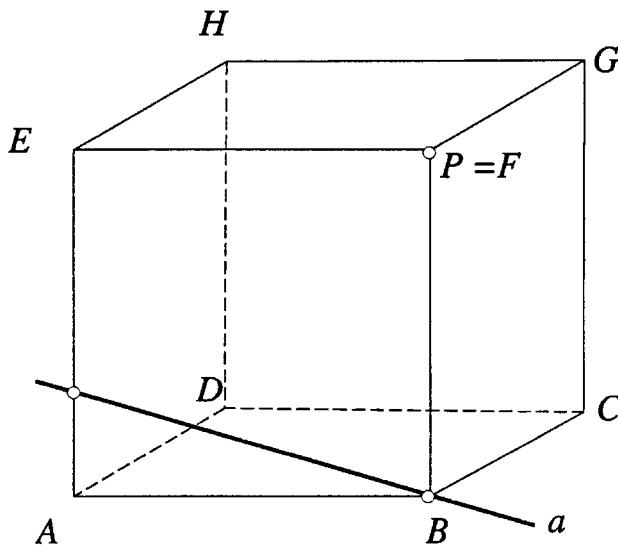
a)



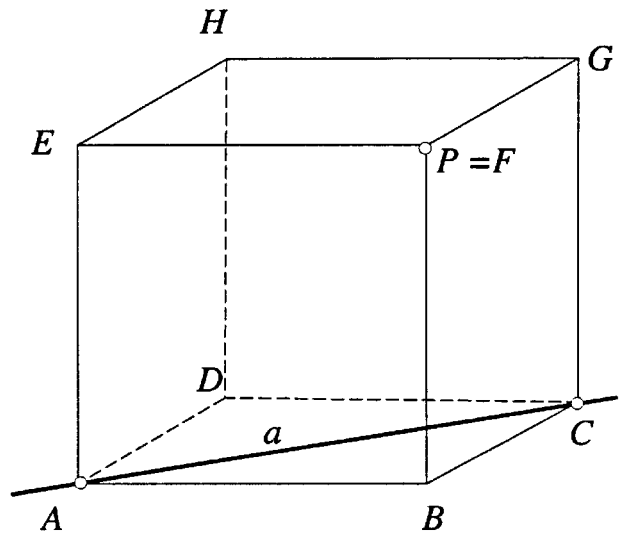
b)



c)

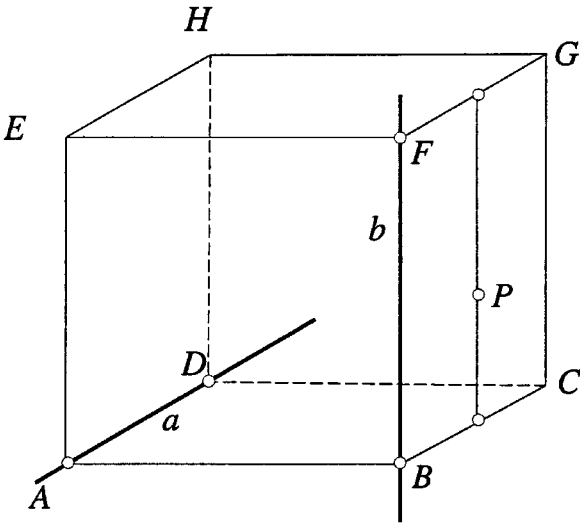


d)

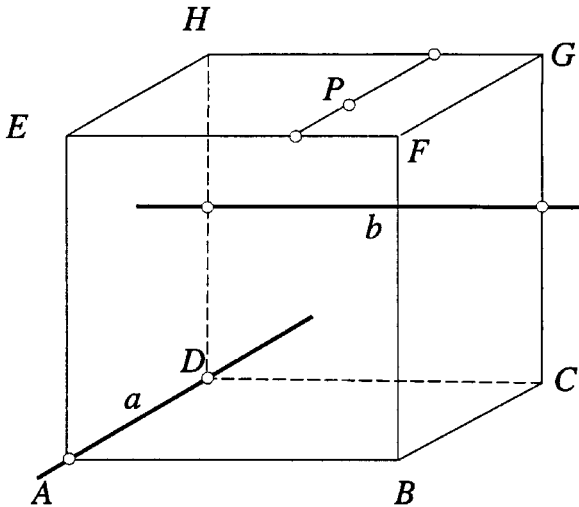


52. Représenter le plan α passant par P et perpendiculaire à la droite a , le plan β passant par P et perpendiculaire à b , ainsi que l'intersection i des deux plans.

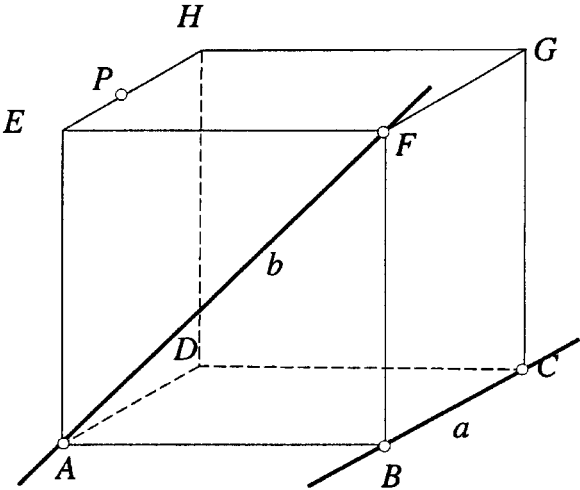
a)



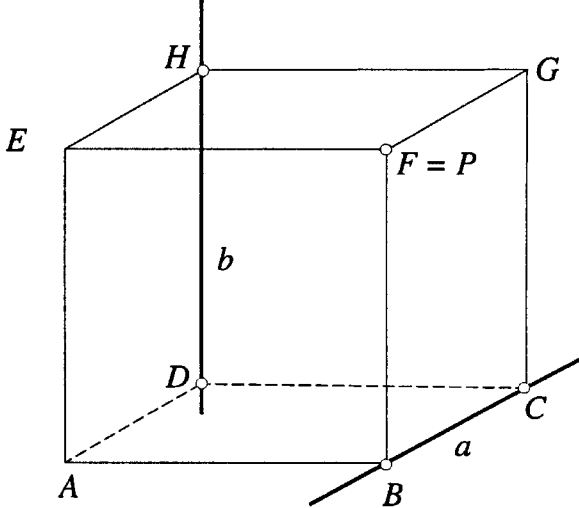
b)



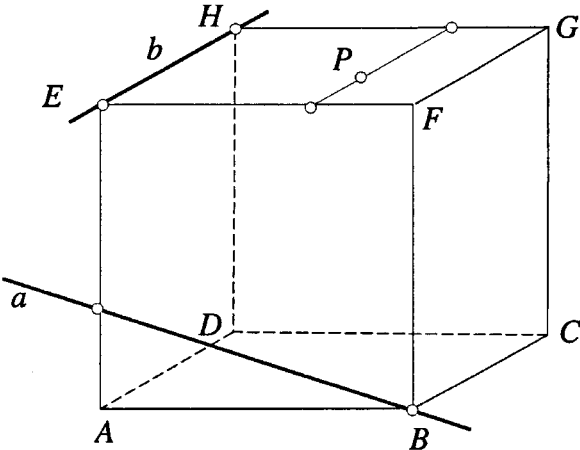
c)



d)

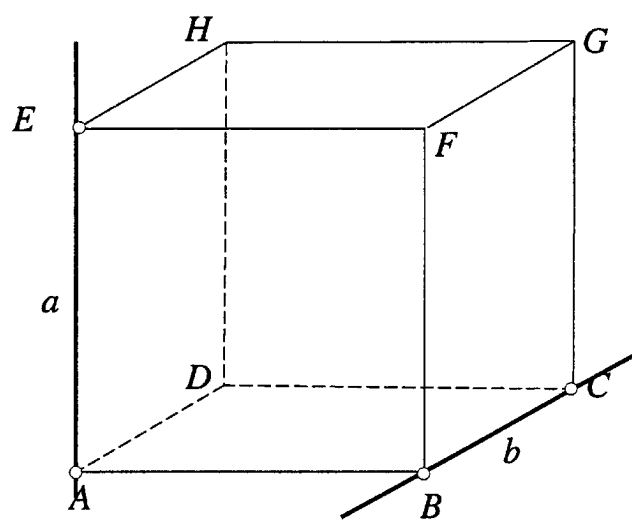


e)

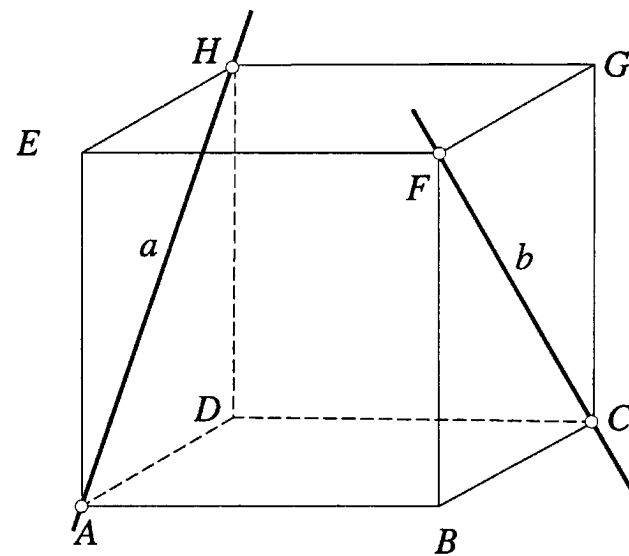


53. Construire la perpendiculaire commune c aux droites a et b .

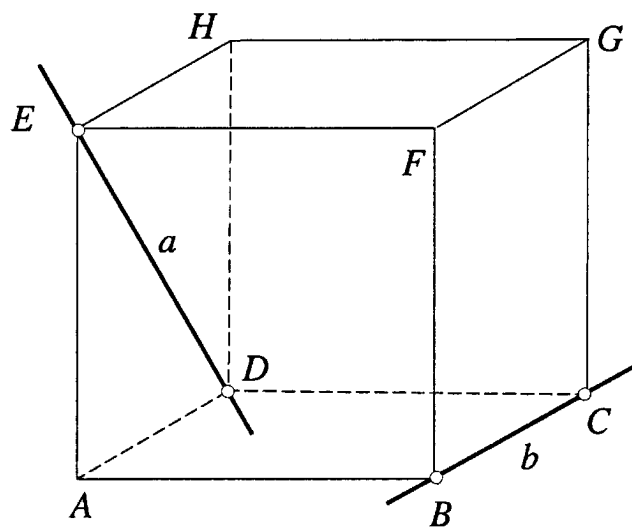
a)



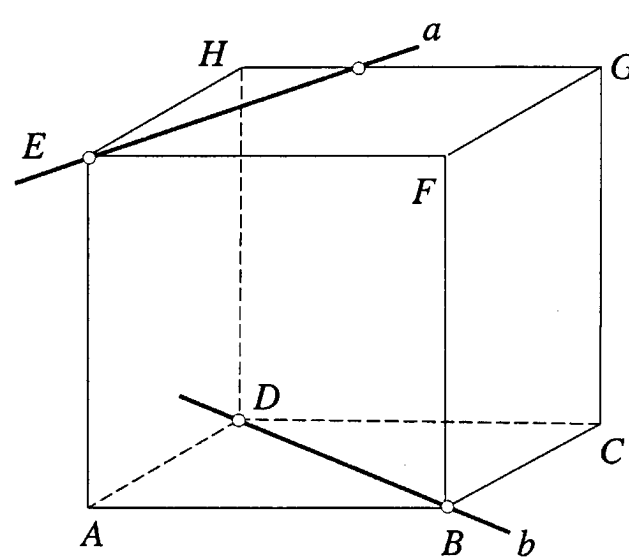
b)



c)

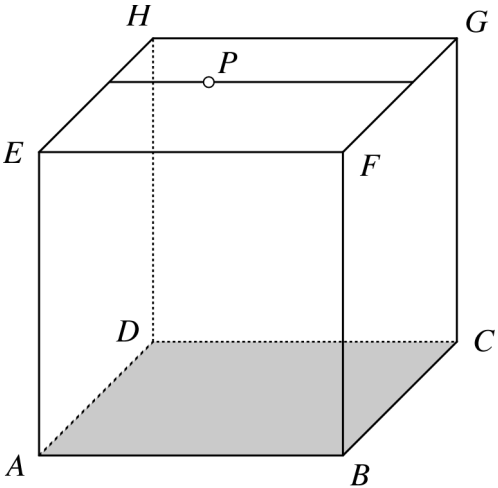


d)

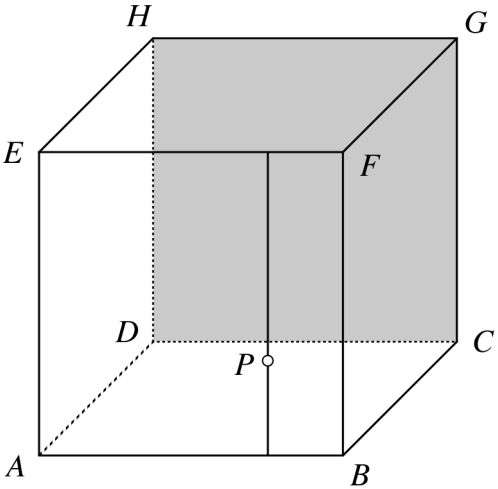


54. Représenter la normale n par P au plan α grisé ainsi que le pied K de cette normale.

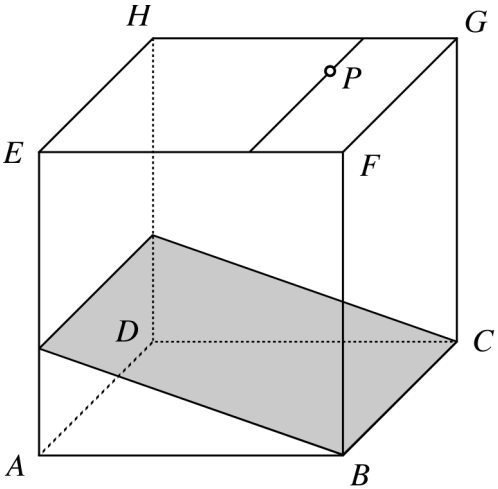
a)



b)

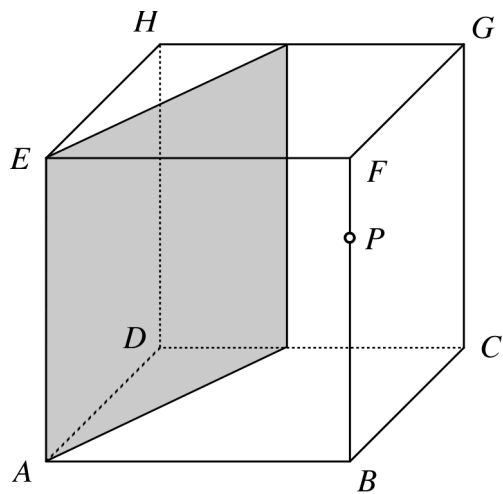


c)

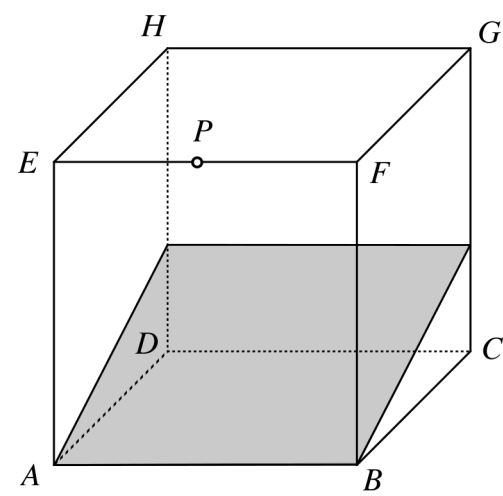


55. Représenter la normale n par P au plan α grisé ainsi que le pied K de cette normale.

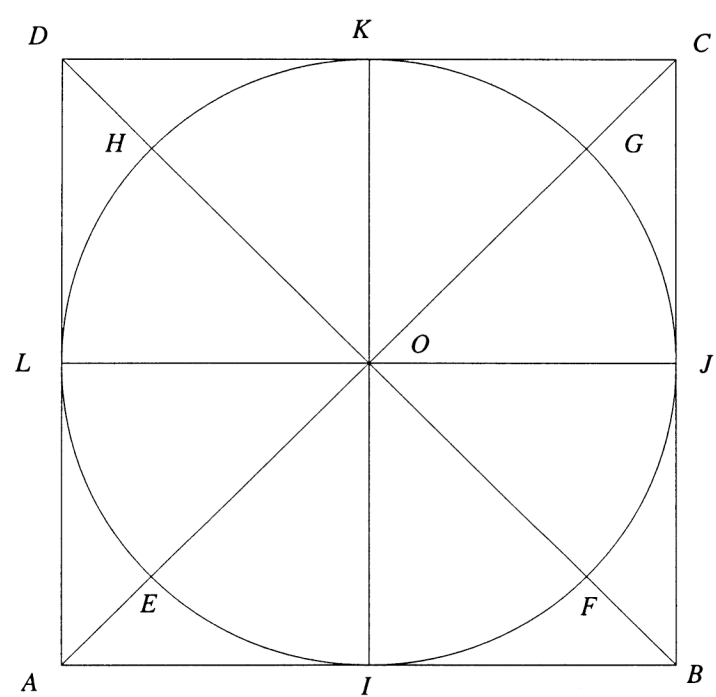
a)



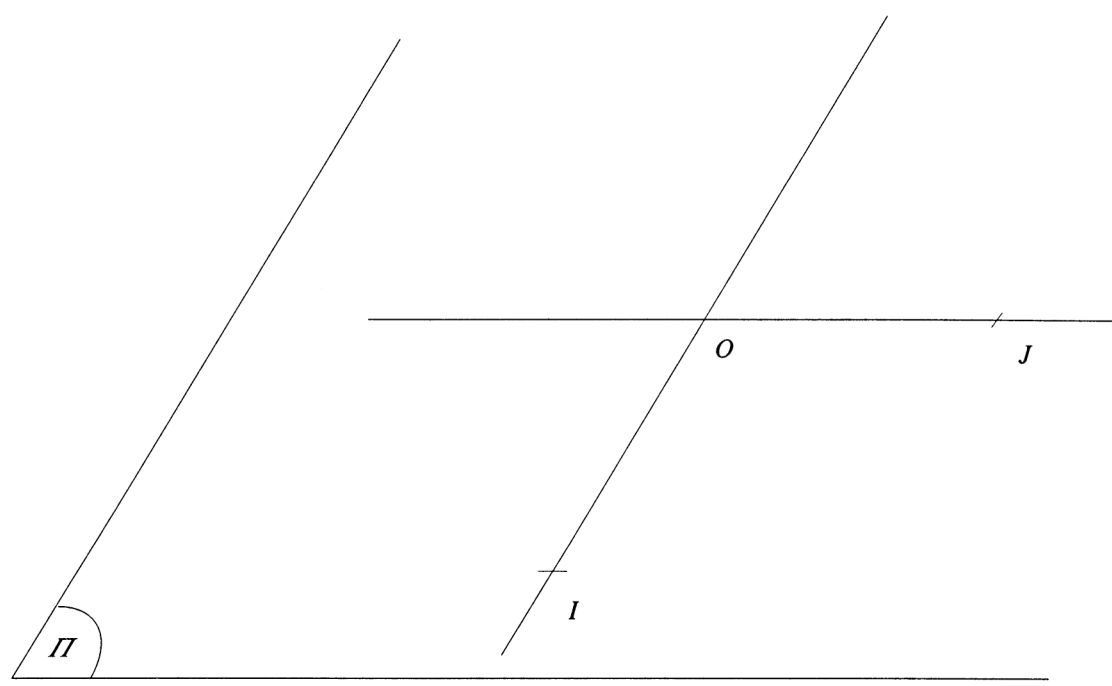
b)



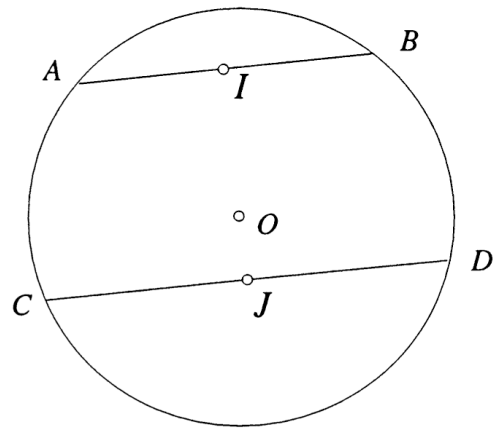
56. Sur le dessin qui suit, on a dessiné un carré circonscrit à un cercle.



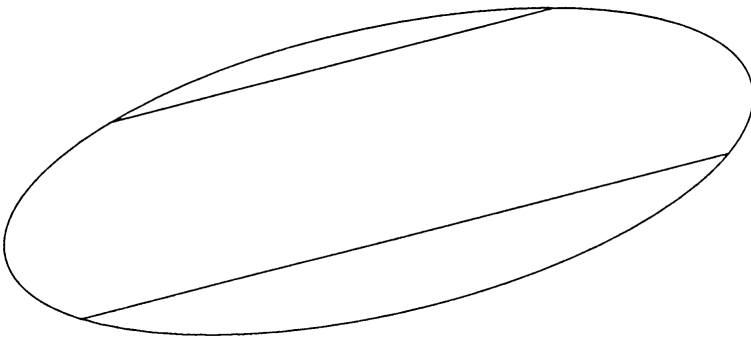
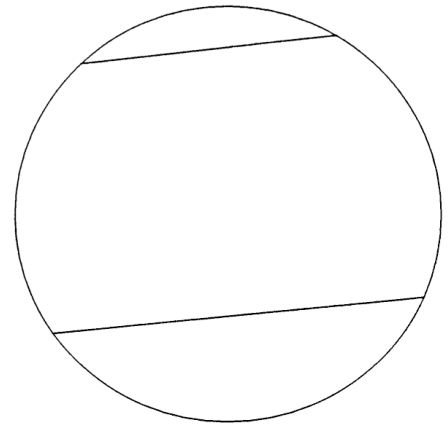
Représenter ci-dessous le cercle en perspective. On a déjà tracé les diamètres *OI* et *OJ*.



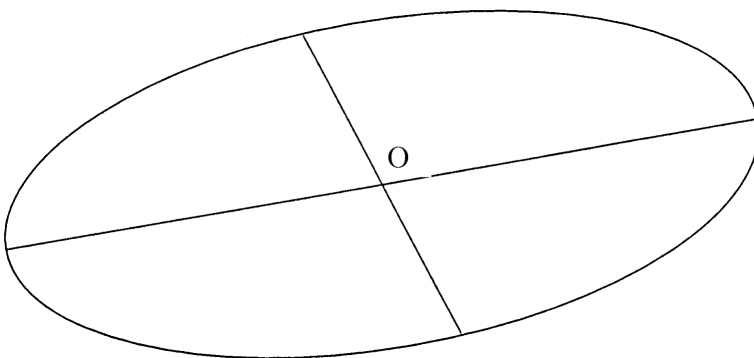
- a) Les points A, B, C, D sont situés sur un cercle de centre O et AB est parallèle à CD . On désigne par I le milieu de $[AB]$ et par J celui de $[CD]$. Prouver que O appartient à la droite IJ .



- b) La partie a) met en évidence une méthode permettant de construire un diamètre d'un cercle à partir de deux cordes parallèles. Construire le centre du cercle ci-contre.



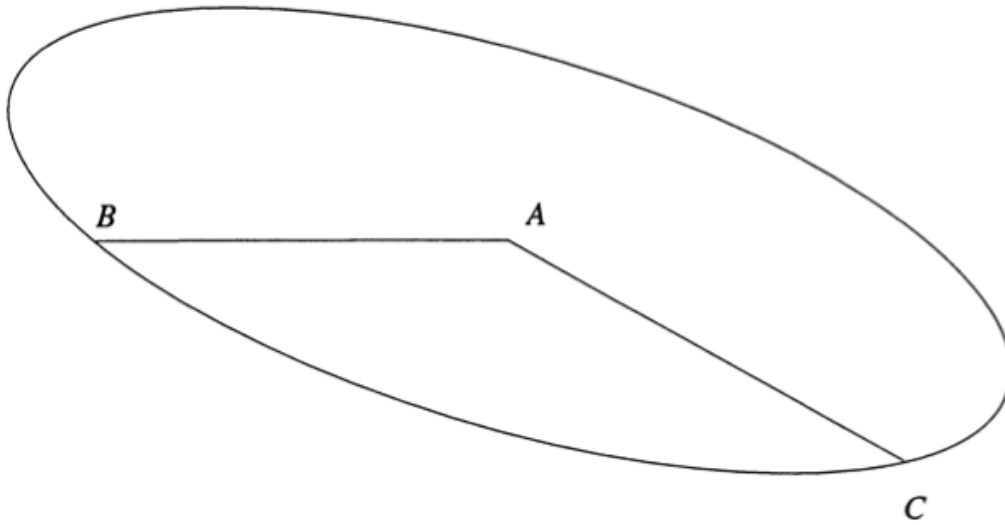
- c) Le dessin ci-contre représente un disque vu en perspective. Construire son centre, puis partager ce disque en quatre parties égales.



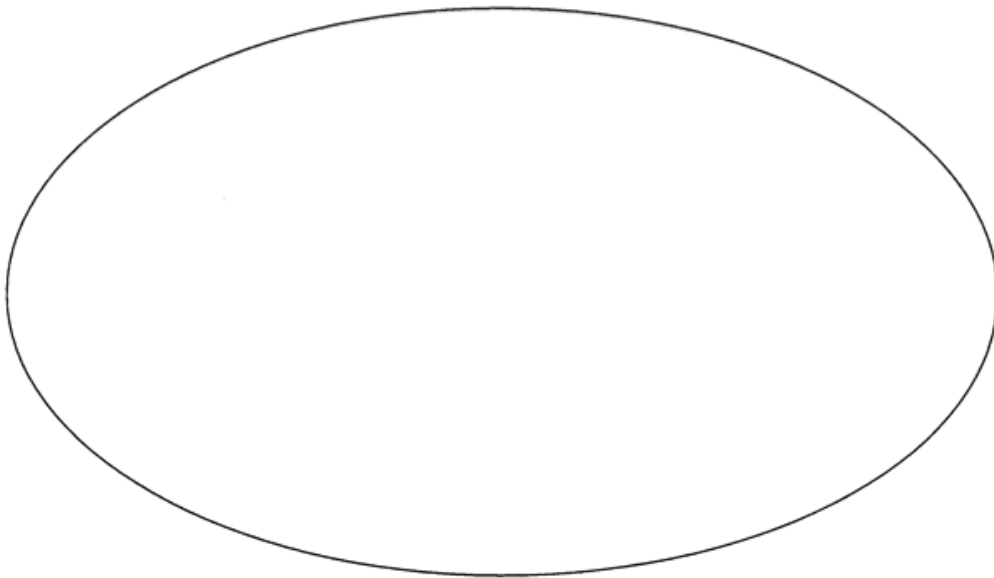
- d) Ce dessin représente un disque de centre O partagé en quatre parts. Ces parts sont-elles égales ?

58.—

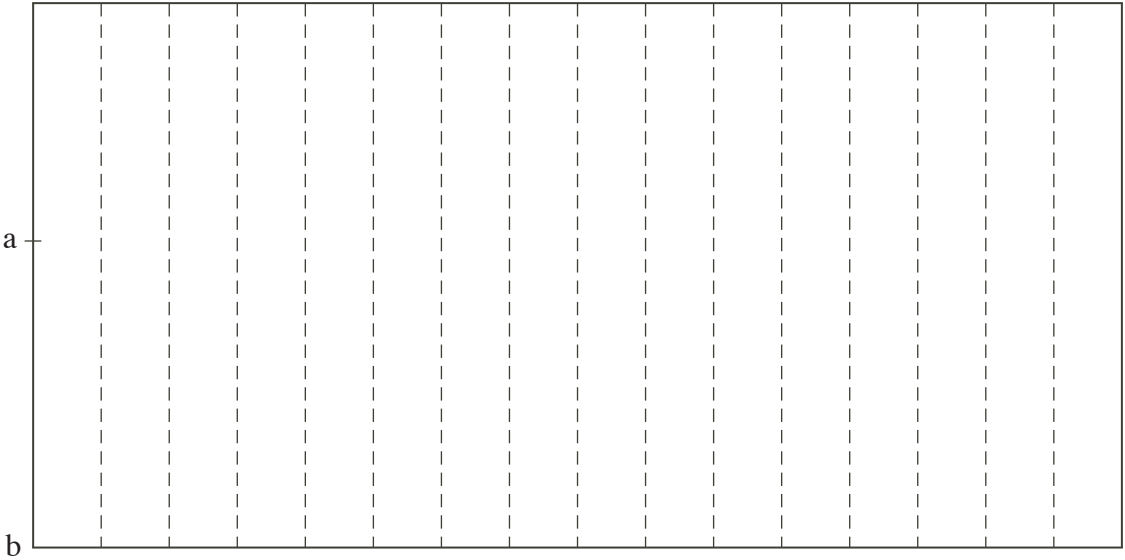
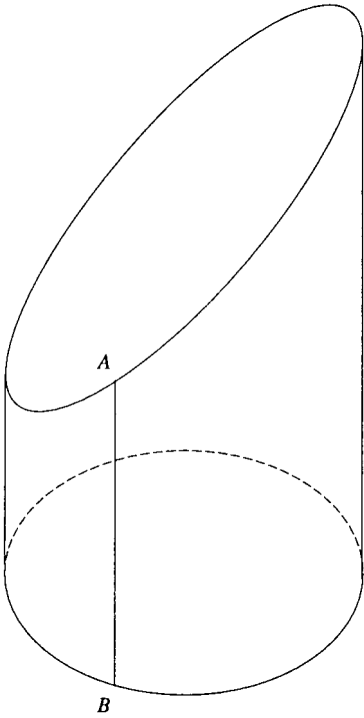
- a) Le dessin ci-dessous représente un disque de centre A vu en perspective. Partager le secteur BAC en deux secteurs égaux.

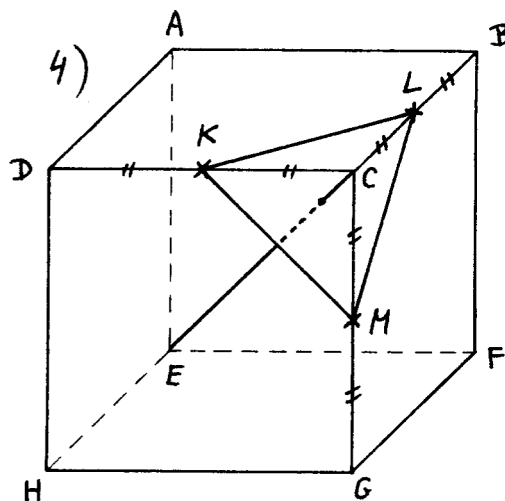
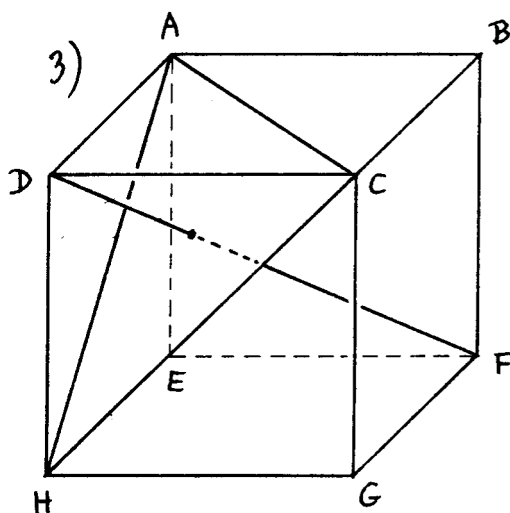
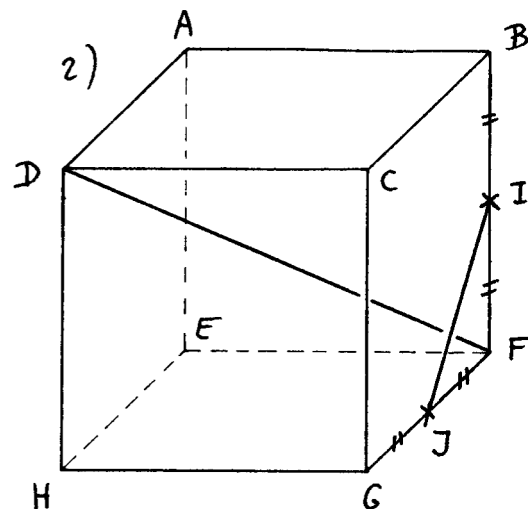
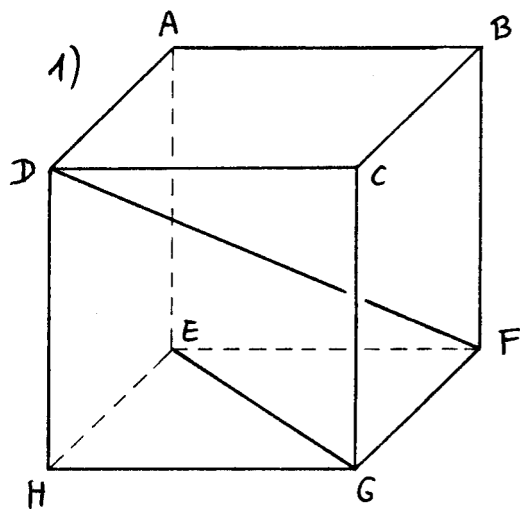


- b) Ce dessin représente un disque. Partager ce disque en huit parties égales.



59. Sur le premier dessin ci-après, on a représenté un cylindre en carton coupé par un plan oblique. On découpe cette partie de cylindre selon AB , puis on met à plat le morceau de carton ainsi obtenu. Le dessin suivant représente la surface développée du cylindre entier. Après avoir divisé le cercle inférieur en 16 parties égales, représenter le développement de la portion de cylindre sur le second dessin, en faisant correspondre a à A et b à B .





Démontrer que :

- 1) DF et EG sont orthogonales.
- 2) DF et IJ sont orthogonales.
- 3) DF est normale au plan ACH .
- 4) EC est normale au plan KLM .

Principes à utiliser :

- (A) Une droite est normale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- (B) Une normale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
- (C) Deux droites sont orthogonales si l'une est contenue dans un plan perpendiculaire à l'autre.

61. Calculer l'angle des plans ABC et RST . (Il faut donc trouver l'angle de deux perpendiculaires à la droite d'intersection, l'une étant contenue dans le premier plan et l'autre dans le second, ou — ce qui revient au même — déterminer l'angle des normales à ces plans.)

