

Introduction à la théorie des GRAPHES

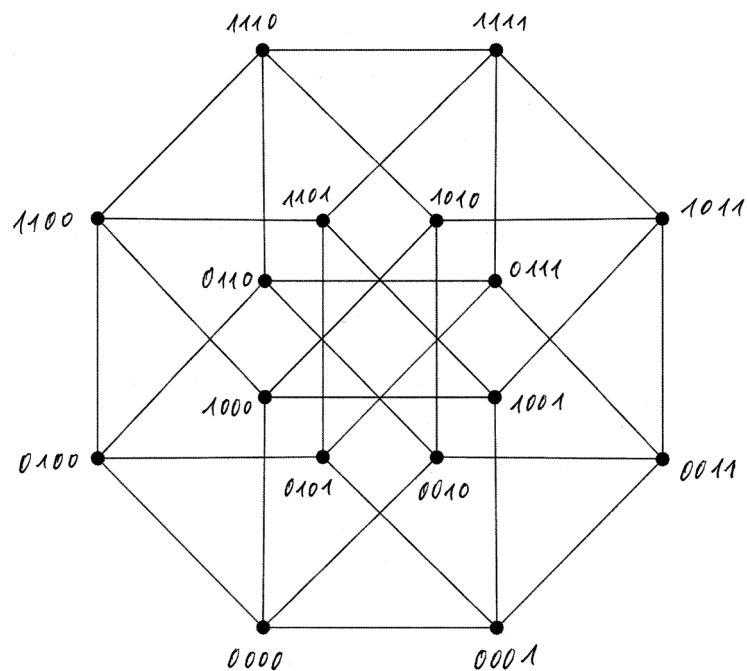


TABLE DES MATIÈRES

Théorie de graphes : tour d'horizon	2
Lexique	4
Propriétés et algorithmes	7
Lemme des poignées de mains	9
Théorème d'Euler	10
Colorations : introduction	11
Algorithme de Dijkstra : Justification	12

EXERCICES

THÉORIE DE GRAPHES : TOUR D'HORIZON*

Née des recherches d'Euler au XVIII^e siècle, la théorie des graphes est devenue une branche des mathématiques au début du XX^e siècle, grâce aux travaux de König, de Kuratowski, de Cayley et, plus récemment, de Berge, d'Erdős et de Harary. Les recherches récentes en informatique et surtout en algorithmique lui donnent un nouveau souffle. La théorie des graphes permet de résoudre efficacement une grande variété de problèmes pratiques ou récréatifs en les ramenant à des configurations qui se dessinent simplement à l'aide de points et de liaisons entre ces points.

On fait généralement remonter la théorie des graphes au problème dit "des ponts de Königsberg" (Kaliningrad). Résolu par Leonhard Euler en 1736, ce problème, à l'allure de casse-tête, s'énonce ainsi : est-il possible, en partant d'une zone de la ville, de retourner dans la même zone en traversant chacun de ses sept ponts une fois et une seule ?

La théorie des graphes sert avant tout à représenter et à organiser les tâches de façon optimale : après avoir traduit un problème sous forme de graphe, on cherche des méthodes systématiques qui permettent de trouver la succession la plus rapide ou la moins coûteuse pour effectuer toutes les tâches.

De fait, ses applications pratiques sont très diverses : optimisation des réseaux de transport — transports routiers ou transports d'information —, conception de réseaux électriques, de réseaux de communication, mécanique statistique, formules chimiques, informatique théorique, sciences sociales, géographie, architecture...

Qu'est-ce qu'un graphe ? C'est en 1822 que le mot "graphe" est introduit par l'Anglais J. J. Sylvester, et en 1936 que paraît le premier livre sur la théorie des graphes, écrit par D. König. Un graphe est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points (appelés sommets ou nœuds), reliés entre eux par un ensemble de lignes ou de flèches (appelées arêtes ou arcs). Chaque arête a pour extrémités deux points, éventuellement confondus. Le graphe est dit *orienté* si, pour chaque arête, on distingue une extrémité initiale et une extrémité terminale.

Un *arbre* est un graphe connexe qui ne contient pas de chemin fermé. Des exemples d'utilisation d'arbres, ou arborescences, se trouvent dans la gestion des bases de données. Connaître l'arbre suivant lequel sont organisées les informations facilite et optimise leur consultation. La mise en structure parallèle des ordinateurs se fait suivant une procédure d'ordonnancement des tâches : c'est actuellement un domaine de recherches extrêmement actif en informatique mathématique.

Les graphes planaires. Un graphe est dit *planair*e si on peut le dessiner sur une surface plane de telle façon que les arêtes ne se coupent pas. Ce type de graphe est particulièrement utilisé dans les problèmes de circuits imprimés (ces circuits, construits sur des surfaces planes, constituent actuellement l'une des limitations des développements de l'informatique).

Le problème récréatif classique des trois puits et des trois maisons a permis au Polonais Kuratowski de trouver en 1930 une caractérisation des graphes planaires : un graphe est planair si et seulement si sa configuration ne contient pas trois nœuds reliés à trois autres nœuds, ou cinq nœuds tous reliés aux quatre autres.

Par ailleurs, les graphes planaires vérifient la formule d'Euler reliant le nombre s de sommets, le nombre f de faces (ou régions) au nombre a d'arêtes : $f + s - a = 2$. Cette formule est aussi valable pour tous les polyèdres convexes.

Flots et tensions dans la théorie des graphes. La théorie des graphes connaît également de nombreuses applications pratiques dans le domaine de la gestion, qui utilise des graphes dits *valués*.

* D'après l'encyclopédie Yahoo!

Les arêtes ou les sommets du graphe sont affectés d'un paramètre économique correspondant à certaines contraintes : coûts (transport, distances, durées de travaux, stocks...) ou débits (circulation automobile, courant électrique, débits de ventes, informations binaires...).

Deux types de problèmes caractérisent ce domaine : celui de l'ordonnancement des tâches et celui du voyageur de commerce.

Problème d'ordonnancement de tâches. L'ordonnancement de tâches consiste à planifier les différentes tâches conduisant à la réalisation d'un produit sur une chaîne de fabrication ou d'un grand projet de construction. Chaque sommet du graphe est associé à un nombre qui caractérise un événement (date ou durée limite de réalisation, par exemple). Les arêtes peuvent porter, elles aussi, des valeurs correspondant à d'autres contraintes (temps minimal entre deux événements, par exemple). On a un problème de tension type : trouver un chemin optimal ou un chemin critique entre le début et la fin du processus.

Problème du voyageur de commerce. Le voyageur de commerce doit trouver le plus court chemin qui, partant d'une ville, y revient en passant par toutes les autres villes. Les arêtes portent des valeurs correspondant à des distances, qui peuvent être mesurées en temps, en coûts de parcours, en débits d'électricité ou d'eau... Ce type de problème a des solutions d'autant plus longues à trouver que le nombre de villes est grand. Si avec 10 villes il faut, par exemple, 64 étapes de calculs (réalisées en une microseconde par un ordinateur), avec 100 villes, il faudrait 264 étapes de calculs, qui mobiliseraient un ordinateur pendant des centaines d'années.

Algorithmes efficaces. Certains algorithmes permettent de trouver une solution optimale à ces problèmes, avec une efficacité fonction du nombre de paramètres. Citons les plus connus :

- la méthode du chemin critique, qui détermine les marges de manœuvre en chaque nœud ;
- la méthode PERT (*program evaluation and research task*), qui permet de trouver des chemins solutions dans les problèmes de tension en introduisant, pour mesurer les durées de travail en chaque poste, une valeur moyenne calculée à partir de probabilités optimiste et pessimiste. Sans obtenir encore des solutions exactes, on aboutit à des solutions approchées très satisfaisantes.

Calculabilité et complexité. La théorie des graphes illustre une démarche mathématique de résolution de problèmes qui connaît aujourd'hui de nombreux développements grâce à l'informatique. On distingue, dans cette démarche, trois étapes :

- montrer qu'il y a une ou plusieurs solutions possibles au problème posé ;
- montrer que cette solution est calculable à l'aide d'un algorithme que l'on pourra programmer ;
- s'assurer que cet algorithme est efficace, qu'il conduit à la solution dans un temps de calcul raisonnable, qui n'augmente pas de façon exponentielle en fonction du nombre de paramètres.

Cette dernière étape est un domaine des recherches mathématiques qui s'est développé depuis 1935, à partir des travaux de K. Gödel, A. Church et A. Turing.

Des problèmes aussi voisins apparemment que les chemins eulériens ou les chemins hamiltoniens sont des problèmes de complexité très différente. La recherche de chemins solutions dans chaque type de problème conduit à des algorithmes d'efficacité fort différente. Les chemins eulériens se trouvent grâce à des algorithmes qui ont des temps de calcul raisonnables : ils correspondent à des problèmes de faible complexité. Les chemins hamiltoniens se trouvent grâce à des algorithmes dont les temps de calcul augmentent de façon exponentielle avec le nombre de sommets à relier : ils répondent à des problèmes algorithmiques difficiles, appelés problèmes complexes.

Signalons enfin que la théorie des graphes a de nombreux liens avec la plupart des autres domaines des mathématiques discrètes : la combinatoire, la théorie des ensembles, la théorie des groupes, l'algèbre linéaire, la théorie des polyèdres, la programmation linéaire, la théorie des jeux, l'algorithmique...

LEXIQUE

Acyclique Un graphe est acyclique s'il ne contient aucun cycle.

Adjacent Deux sommets sont adjacents (ou *voisins*) s'ils sont reliés par une arête. Deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune.

Arbre Graphe connexe ne contenant aucun cycle.

Arête Une arête relie deux sommets dans un graphe.

Biparti Un graphe est biparti si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y , de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans X à un sommet dans Y . Les arbres sont des exemples des graphes bipartis. Si G est biparti, il est habituellement noté par $G = (X, Y, A)$, où A est l'ensemble des arêtes.

Boucle Arête partant d'un sommet et allant vers lui-même. Les boucles ne sont pas autorisées dans les graphes simples.

Chemin Une chemin (ou *parcours*) de longueur n dans un graphe est une suite $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de n arêtes telle que chaque arête autre que a_1 et a_n ait une extrémité en commun avec la précédente et l'autre extrémité en commun avec la suivante. Un chemin est *fermé* si ses deux sommets extrêmes sont confondus ; il est *ouvert* dans le cas contraire.

Complet Un graphe simple et dit complet lorsque deux sommets distincts quelconques sont reliés par une arête et une seule. K_n dénote le graphe complet à n sommets.

Composante connexe Dans un graphe, une composante connexe est un sous-graphe maximal connexe.

Connexe Un graphe connexe est un graphe dans lequel deux sommets quelconques sont toujours reliés par un chemin.

Cycle Un cycle est un chemin fermé ne visitant pas deux fois le même sommet.

C_n Cycle à n sommets.

Degré Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de ce sommet. Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.

Eulérien On appelle *chemin eulérien* d'un graphe tout chemin qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe. On appelle *graphe eulérien* un graphe admettant un chemin eulérien fermé. On appelle *graphe semi-eulérien* un graphe non eulérien admettant un chemin eulérien (ouvert).

Forêt Graphe qui ne contient aucun cycle. Les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.

Graphe Un graphe est un ensemble de points, dont certaines paires sont reliées par des lignes. Les points sont appelés *sommets* et les lignes sont nommées *arêtes*. Un graphe est composé de deux ensembles, l'ensemble des sommets (X) et l'ensemble des arêtes (A).

Graphe simple Ne contient ni boucles, ni arêtes multiples.

Hamiltonien Un chemin est dit hamiltonien si chaque sommet du graphe y apparaît exactement une fois. Un graphe contenant un cycle hamiltonien est appelé *graphe hamiltonien*.

Incident Un sommet est incident à une arête s'il est situé à une des deux extrémités de cette arête. Inversement, une arête est incidente à un sommet si elle "touche" ce sommet.

Indice chromatique L'indice chromatique d'un graphe est le plus petit nombre k pour lequel il existe une k -coloration des arêtes.

Isomorphe Deux graphes sont isomorphes si « ce sont les mêmes graphes, dessinés différemment ». Plus précisément : deux graphes (X, A) et (X', A') sont isomorphes s'il existe une bijection (= correspondance un-un) $\varphi : X \rightarrow X'$ qui conserve l'adjacence, multiplicité comprise ;

$$(x \text{ est } k\text{-adjacent à } y) \text{ si et seulement si } (\varphi(x) \text{ est } k\text{-adjacent à } \varphi(y))$$

quels que soient $x, y \in X$ et $k \in \mathbb{N}$.

K_n Graphe *complet* à n sommets : graphe simple tel que deux sommets distincts quelconques sont reliés par une arête et une seule.

k -colorable Un graphe est dit k -colorable si à chacun de ses sommets peut être assignée une parmi k couleurs de sorte qu'à deux sommets adjacents soit assignée une couleur différente. Cette assignation est appelée *coloration*.

Matrice d'un graphe La matrice (a_{ij}) associée à un graphe non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est une matrice symétrique, de dimension $n \times n$, dans laquelle le terme a_{ij} situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j .

Nombre chromatique Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre k pour lequel il existe une k -coloration des sommets. Le nombre chromatique du graphe G est noté $\chi(G)$.

Ordre L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.

Orientation Une assignation de direction aux arêtes d'un graphe. Une arête orientée est un *arc*. Le graphe auquel on a donné une orientation est un *graphe orienté* (ou *digraphe*).

Planaire Un graphe planaire est un graphe que l'on peut dessiner sur une surface plate sans que ses arêtes se croisent.

Pont Arête dont la suppression déconnecte le graphe.

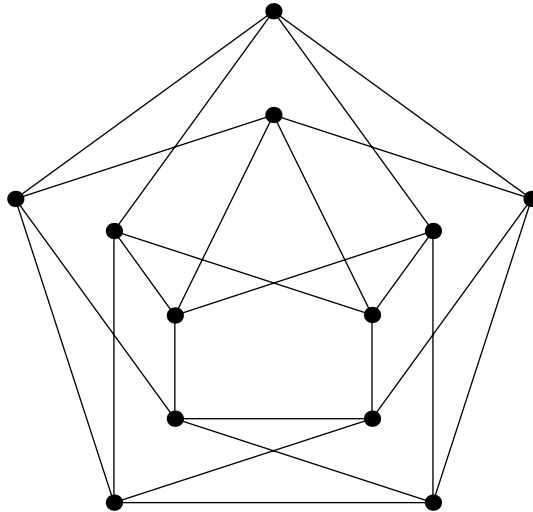
Régulier Dans un graphe régulier, tous les sommets ont le même degré. Si le degré commun est k , alors on dit que le graphe est k -régulier.

Sous-graphe Un graphe $H = (Y, B)$ est un sous-graphe du graphe $G = (X, A)$ si $Y \subset X$ et $B \subset A$.

Sous-graphe induit Un sous-graphe induit G' d'un graphe G est un graphe composé de certains sommets de G , ainsi que de toutes les arêtes de G qui relient ces sommets.

Stable Un stable d'un graphe G est un sous-graphe induit de G sans arêtes.

Voisinage Le voisinage d'un sommet est l'ensemble de tous ses sommets adjacents.



Le graphe de Chvátal est un graphe 4-régulier à 12 sommets. Il est hamiltonien et sans triangles.

PROPRIÉTÉS ET ALGORITHMES

1. **Lemme des poignées de mains** La somme des degrés des sommets d'un graphe est égal à deux fois le nombre de ses arêtes. (La somme des degrés est donc un nombre pair.)
2. Dans tout graphe, il y a un nombre pair de sommets de degré impair.
3. **Théorème d'Euler** Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2. Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

4. **Algorithme de Fleury** Permet de trouver un cycle eulérien dans un graphe eulérien.

Choisir un sommet de départ, puis parcourir arbitrairement les arêtes en respectant toutefois les règles suivantes :

- Supprimer chaque arête déjà parcourue.
- A chaque étape, *n'utiliser un pont que s'il n'y a pas d'alternative.*

5. **Conditions nécessaires pour qu'un graphe soit hamiltonien.**

- Un graphe hamiltonien n'admet aucun point d'articulation.
- *Théorème d'Ore.* Soit G un graphe simple d'ordre n , $n \geq 3$. G est hamiltonien dès que, pour toute paire de sommets x et y non voisins, $\deg(x) + \deg(y) \geq n$.
- *Théorème de Dirac.* Soit G un graphe simple d'ordre n , $n \geq 3$. G est hamiltonien dès que, pour chaque sommet x , $\deg(x) \geq \frac{n}{2}$.

6. **Algorithme de coloration des sommets**

- On commence par numéroter arbitrairement les sommets du graphe ($\rightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$) ainsi que les couleurs à disposition.
- On affecte la couleur 1 au sommet x_1 .
- On considère ensuite le sommet suivant x_2 et on lui attribue la première couleur non déjà attribuée à ses voisins. Plus généralement, soit le sommet x_i tel que tous les sommets précédents $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ soient déjà colorés. On attribue alors à x_i la première des couleurs non déjà attribuées à ses voisins.
- On poursuit de cette manière jusqu'à ce que tous les sommets soient colorés.

Remarque : cet algorithme fournit une coloration, mais le nombre r de couleurs utilisées peut être supérieur au nombre chromatique. D'où l'intérêt parfois de comparer r à un minorant r' du nombre chromatique : si $r = r'$, on a trouvé le nombre chromatique.

7. Le nombre chromatique d'un graphe simple G est inférieur ou égal à $\Delta+1$, Δ étant le plus haut degré des sommets :

$$\chi(G) \leq \Delta+1$$

8. **Théorème de Brooks** Soit G un graphe simple et connexe, non complet, le plus haut degré des sommets étant Δ , $\Delta \geq 3$. Alors :

$$\chi(G) \leq \Delta$$

9. **Algorithme de Dijkstra** On donne un graphe connexe pondéré, avec un poids strictement positif sur chaque arête, un sommet initial a et un sommet final b . Le but est de trouver un chemin de poids minimal entre les sommets a et b .

Appelons *distance* entre deux sommets le minimum des poids des chemins reliant ces sommets.

L'idée de l'algorithme est d'attribuer à chaque sommet — partant de a et de proche en proche — un "poids" égal à sa distance au sommet initial a .

- 1) Affecter tout d'abord le poids 0 à a , et attribuer *provisoirement* aux sommets voisins de a le poids des arêtes qui les relient à a .
- 2) Déterminer le minimum des poids provisoires, et attribuer définitivement celui-ci à l'un des sommets déjà marqués provisoirement de ce poids.
- 3) Soit x ce sommet. Pour tout sommet y adjacent à x et non déjà marqué d'un poids définitif, calculer la somme s du poids de x et du poids de l'arête reliant x à y . Si s est inférieure au poids provisoire de y (ou si y n'est pas encore marqué), affecter s à y comme nouveau poids provisoire et noter " $s(x)$ " à côté du sommet y afin de mémoriser la provenance de cette nouvelle affectation.
- 4) Reprendre au point 2) ci-dessus, et poursuivre jusqu'à ce que b ait été définitivement pondéré.

Les sommets indiqués entre parenthèses à côté des poids attribués aux sommets permettent alors d'explicitier le "plus court chemin" joignant a et b .

LEMME DES POIGNÉES DE MAINS

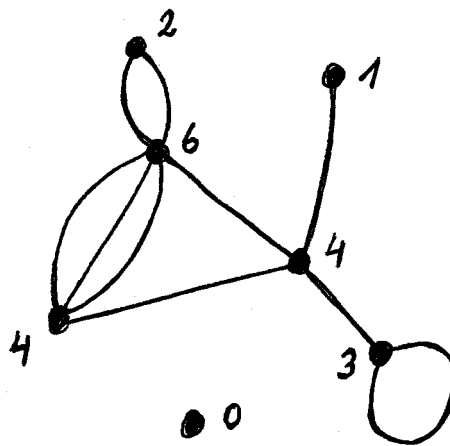
Théorème

Dans tout graphe, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

(la somme des degrés des sommets est donc un nombre pair...)

Preuve. On peut diviser chaque arête en deux demi-arêtes. Chacune de ces demi-arêtes est incidente à un sommet. Or, le degré d'un sommet étant égal au nombre d'arêtes incidentes en ce sommet, la somme des degrés des sommets est égale au nombre de demi-arêtes, c'est-à-dire au double du nombre d'arêtes.

Remarque. On appelle ce théorème *lemme des poignées de mains* par analogie avec la situation d'une réunion de personnes où sont échangées un certain nombre de poignées de mains. Si n_i est le nombre de mains serrées par la personne i , alors la somme des n_i est le double du nombre total de poignées de mains. Les personnes correspondent aux sommets d'un graphe et les poignées de mains aux arêtes.



$$\text{Nombre d'arêtes} = \frac{4 + 2 + 6 + 0 + 4 + 1 + 3}{2} = 10$$

THÉORÈME D'EULER

Définitions

Un *chemin* de longueur n dans un graphe est une séquence $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de n arêtes telle que chaque arête autre que a_1 et a_n ait une extrémité en commun avec la précédente et l'autre extrémité en commun avec la suivante. Un chemin est *fermé* si ses deux sommets extrêmes sont confondus ; il est *ouvert* dans le cas contraire.

On appelle *chemin eulérien* d'un graphe tout chemin qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe.

On appelle *graphe eulérien* un graphe admettant un chemin eulérien fermé.

On appelle *graphe semi-eulérien* un graphe non eulérien admettant un chemin eulérien (ouvert).

Théorème (Euler, 1736)

Un graphe connexe est eulérien si et seulement si chaque sommet est de degré pair.

Preuve

1) La condition est nécessaire

Soit G un graphe connexe eulérien et P un chemin eulérien fermé de G . Quand P arrive en un sommet x de G , il en repart par une autre arête. Le degré de x est donc 2 ou plus. Si P repasse par x , il y arrivera par une 3e arête et en ressortira par une 4e. Le degré de x sera alors 4 ou plus. En poursuivant le raisonnement, et en se souvenant que P contient toutes les arêtes de G , on conclut que le degré de x est pair : il vaut 2 fois le nombre d'apparitions de x dans le chemin P . Chaque sommet de G est donc de degré pair.

2) La condition est suffisante

Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. Les longueurs des chemins de G sans répétition d'arêtes sont majorées par le nombre d'arêtes de G . Soit donc $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un chemin sans répétition d'arêtes de longueur maximale ; comme il n'est pas prolongeable (maximalité), il est fermé*. S'il existe une arête de G qui n'est pas une arête de P , alors, puisque G est connexe, il existe une arête e de G qui n'est pas une arête de P et dont l'une des extrémités est un sommet de P . Soit k l'indice de la première arête de P adjacente à e . Le chemin $P' = (a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_k)$ est alors sans répétition d'arêtes, de longueur maximale, mais prolongeable par l'arête e . Cette contradiction établit que P contient toutes les arêtes de G : P est eulérien.

Corollaire Un graphe connexe est semi-eulérien si et seulement si il a exactement deux sommets de degré impair (un chemin eulérien ouvert relie alors ces deux sommets).

* Si P n'était pas fermé, ses deux extrémités seraient incidentes à un nombre impair de ses arêtes a_i . Et comme ces extrémités sont de degré pair dans G , on pourrait prolonger P d'une arête au moins, ce que contredit l'hypothèse de maximalité.

COLORATIONS : INTRODUCTION

La coloration est un thème central en théorie des graphes car être en mesure de colorer un graphe, sommets ou arêtes, en respectant certains critères, permet la résolution de nombreux problèmes. Dans ce domaine, les problèmes s'énoncent facilement, mais ont suscité un considérable travail théorique. En particulier, on ne connaît pas de méthode générale efficace pour calculer effectivement les colorations recherchées lorsqu'elles existent.

Exemple : le problème du carrefour

Il s'agit de déterminer un cycle de feux de croisement pour le carrefour schématisé en figure 1, où deux rues sont à sens unique, de telle sorte que les flux de véhicules autorisés à circuler en même temps puissent se fondre mais jamais se croiser.

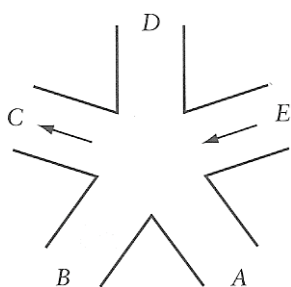


Fig. 1

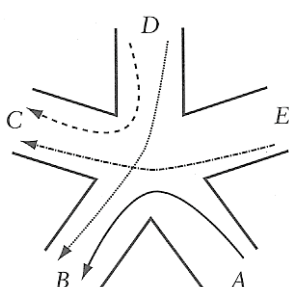


Fig. 2

Par exemple, les flux AB , DB ou DC peuvent être autorisés à circuler en même temps, les flux AB , EC et DC peuvent être autorisés à circuler en même temps, mais les flux AB , DB , DC et EC ne le peuvent pas car EC et DB se croiseraient (figure 2), ce qui oblige à ne les autoriser qu'à des temps différents des feux de croisement. Le problème posé est celui de la **minimisation du nombre de phases** de ces feux.

Traduction du problème en termes de graphes

Les flux possibles de véhicules, compte tenu des deux sens uniques, sont au nombre de 13. Ils sont deux à deux compatibles ou non, c'est-à-dire qu'ils peuvent ou non avoir droit de passage simultanément dans un même temps des feux de croisement. Le graphe des incompatibilités des flux est donné figure 3. En attribuant arbitrairement une couleur spécifique à chaque phase du feu de croisement, chaque solution au problème posé revient à attribuer à chaque sommet du graphe une couleur **de sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur**.

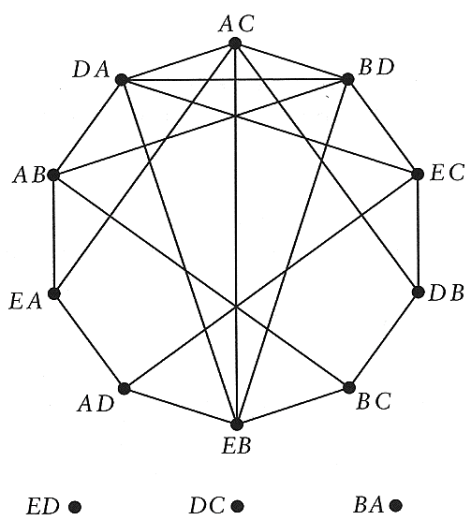


Fig. 3

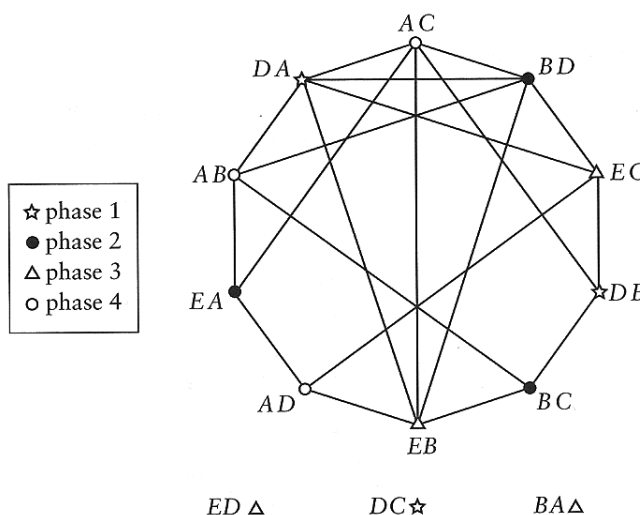


Fig. 4

Ce qui est fait à la figure 4, et donne une organisation en 4 phases. Il existe manifestement d'autres façons d'attribuer les couleurs aux sommets. Existe-t-il une solution en moins de 4 phases ?

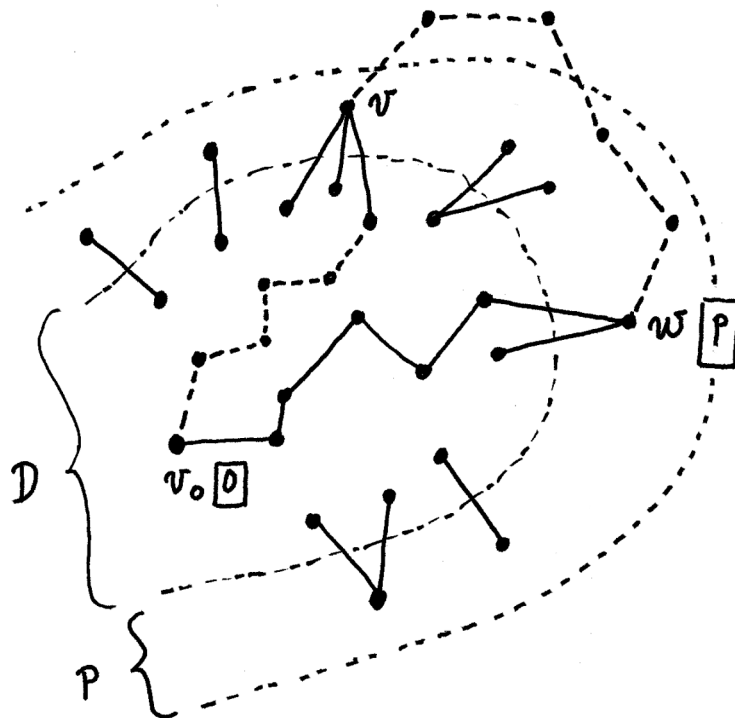
ALGORITHME DE DIJKSTRA : JUSTIFICATION

Pour la description de l'algorithme, voyez p. 8.

Soit v_0 le sommet initial. Il suffit de montrer que **chaque fois que l'on attribue le poids définitif d'un sommet u , ce poids est égal à la distance de v_0 à u** , c'est-à-dire à la longueur d'un chemin de longueur minimale reliant v_0 à u . On procède par récurrence :

- C'est vrai lorsque l'on attribue le poids 0 à v_0 !
- Soit D l'ensemble des sommets dont le poids est définitivement attribué et P l'ensemble des sommets dont le poids est provisoirement attribué. Soit encore w le prochain sommet qui va être définitivement pondéré, et p son poids (définitif).

On doit prouver que p est la distance de v_0 à w .



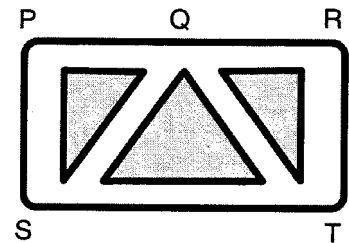
Tout chemin $v_0 w$ (voyez par exemple le chemin $v_0 w$ en traitillé sur la figure) contient un premier sommet $v \in P$, dont le poids provisoire est forcément $\geq p$ puisque p est le minimum des poids provisoires. La longueur de ce chemin est donc $\geq p$. On en déduit que la distance de v_0 à w est bien égale à p .

EXERCICES

100. Représenter la situation suivante à l'aide d'un graphe :

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays.

101. Dessiner le graphe représentant les chemins de la figure ci-contre, puis dénombrer les sommets et les arêtes. Quels sont les degrés des sommets ?



102. Les serpents mangent les grenouilles et les oiseaux mangent des araignées ; les oiseaux et les araignées mangent tous deux des insectes. Les grenouilles mangent des escargots, des araignées et des insectes. Dessiner un graphe orienté représentant le comportement alimentaire de ces prédateurs.

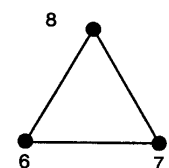
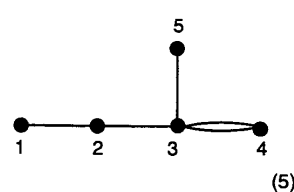
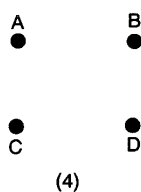
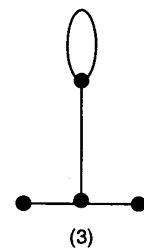
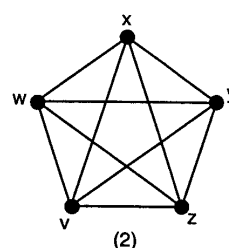
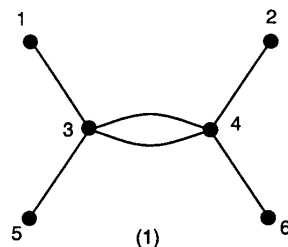
103. Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses commerces en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4. Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

104. (*Théorème de Ramsey*) Supposons qu'il y ait 6 personnes à une soirée. Prouver qu'il est toujours possible de trouver soit 3 personnes qui se connaissent entre elles, soit 3 personnes dont aucune ne connaît les deux autres.

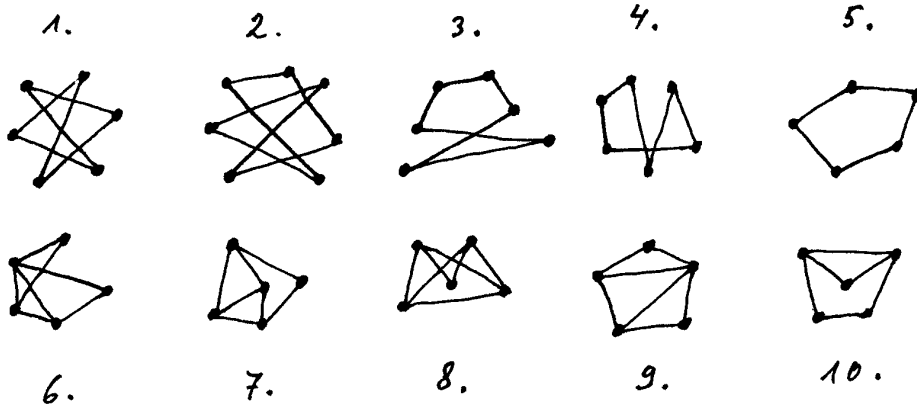
Indication : Représenter les 6 personnes par les sommets d'un graphe et considérer les 5 arêtes possibles issues de l'un des sommets.

107. Parmi les graphes ci-contre, lesquels...

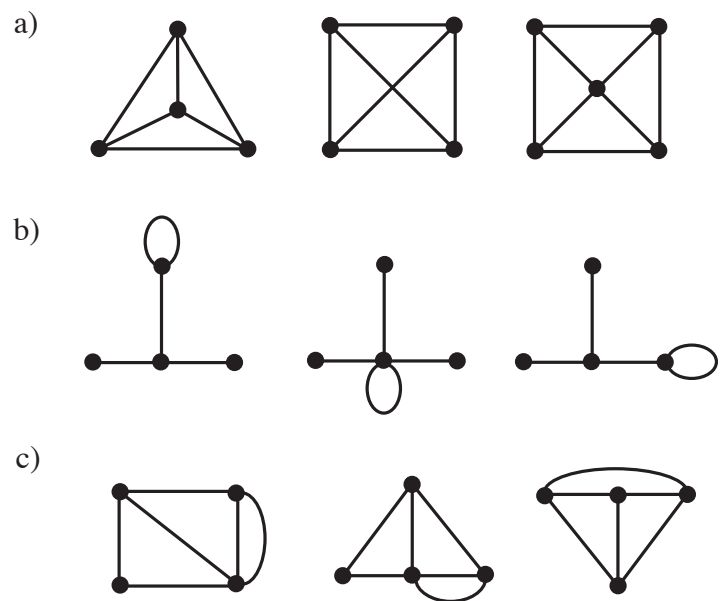
- contiennent des arêtes multiples ?
- contiennent une boucle ?
- sont simples ?
- sont connexes ?



108. Parmi les graphes ci-dessous, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.

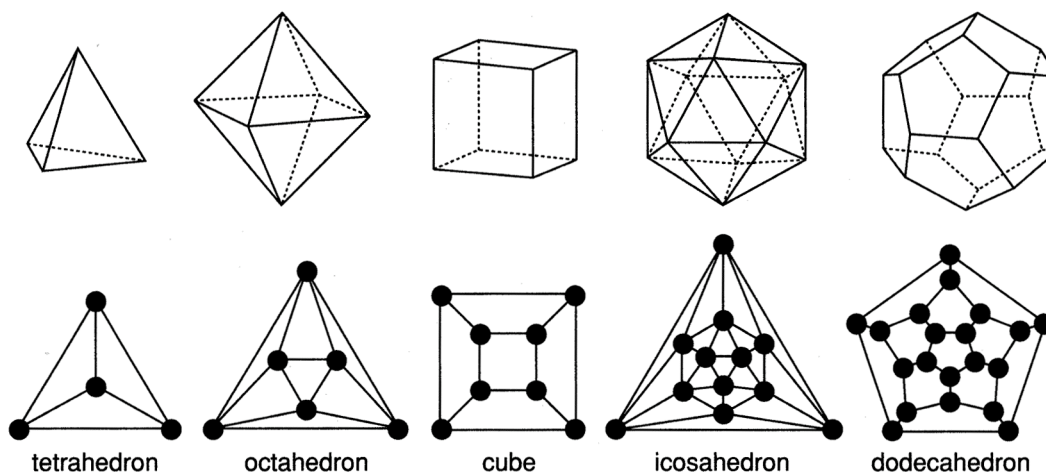


109. Dans chacune des lignes ci-contre, deux des graphes sont isomorphes et le troisième est différent. Identifier l'intrus.

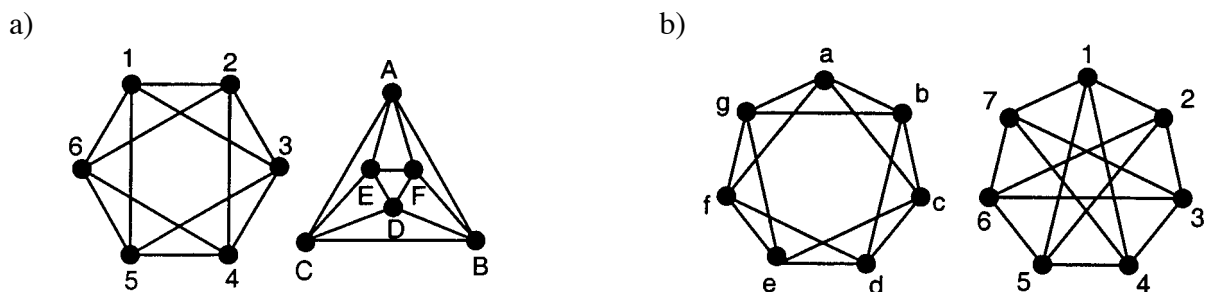


110. Comparer les trois graphes définis ci-dessous :

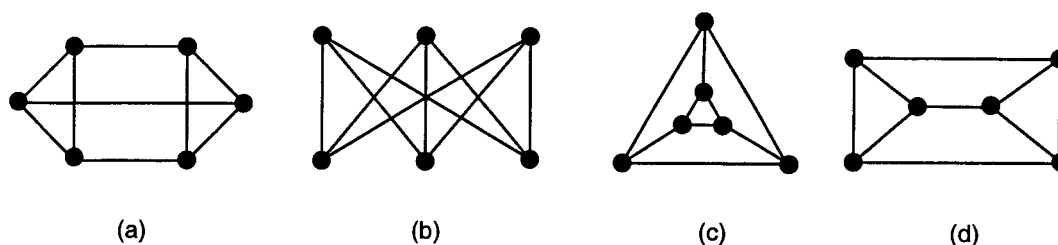
- 1) On considère un octaèdre ; un sommet du graphe est associé à un sommet de l'octaèdre et une arête correspond à une arête de l'octaèdre.
- 2) On considère un cube ; un sommet du graphe est associé à une face du cube et deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune.
- 3) Les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de $\{1; 2; 3; 4\}$; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.



111. Montrer que les graphes ci-dessous sont isomorphes.



112. Déterminer les paires de graphes isomorphes :



113.—

- a) En étiquetant convenablement les sommets, montrer que les deux graphes de la figure 1 sont isomorphes.
- b) Expliquer pourquoi les deux graphes de la figure 2 ne sont pas isomorphes.

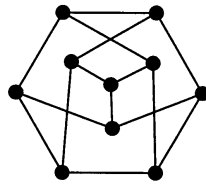
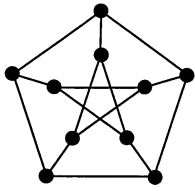


Fig. 1

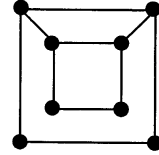
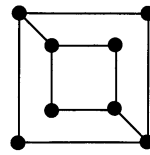


Fig. 2

114. Donner la liste de tous les graphes simples d'ordre 4 (graphes à 4 sommets).

115. Soit G un graphe contenant s sommets et a arêtes, v un sommet de G de degré k et e une arête de G . Donner le nombre de sommets et d'arêtes :

- a) du graphe G_1 obtenu à partir de G en supprimant e .
- b) du graphe G_2 obtenu à partir de G en supprimant v .
- c) du graphe G_3 obtenu à partir de G en contractant e .

118. Dans un graphe, peut-il y avoir 3 sommets (exactement) de degré impair ?

119. Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit connecté à 3 autres exactement ?

120. Montrer que le nombre total des gens qui ont habité la Terre et qui ont donné un nombre impair de poignées de mains est pair.

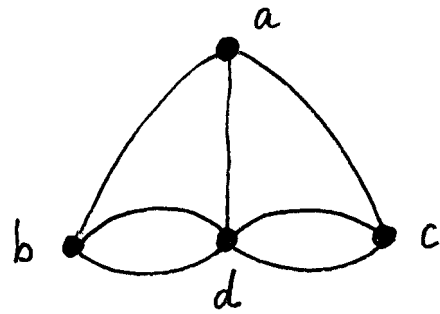
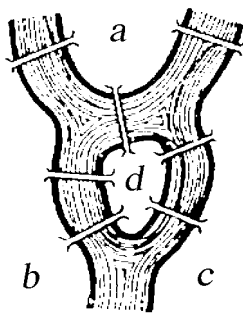
121. Déterminer tous les graphes simples d'ordre 5 dont les sommets sont de degré 2.

122. M. et Mme Euler assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. Euler constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts. Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

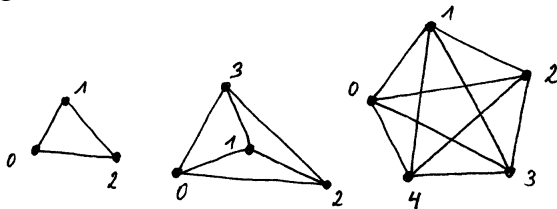
200. Peut-on parcourir une fois et une seule les arêtes des graphes ci-dessous sans lever le crayon ?



201. *Les ponts de Königsberg.* Au XVIII^e siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?

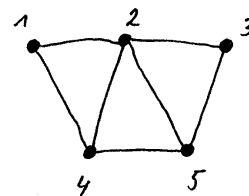
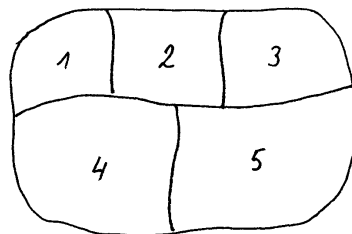


202. Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ? On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à n , pour $n = 2, 3, 4$.

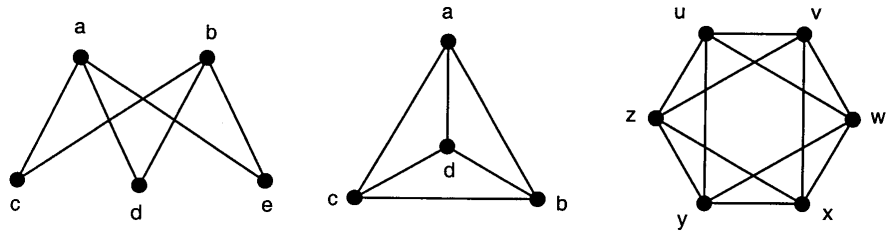


Une arête représente un domino. Il faut trouver une chaîne qui permet de parcourir toutes les arêtes une fois et une seule. On ne s'est pas occupé ici des "doubles" puisqu'on peut toujours les intercaler.

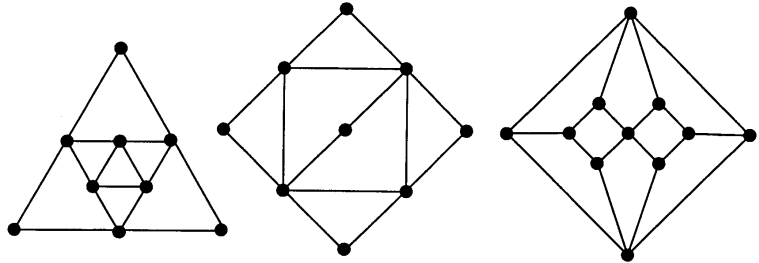
203. Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?



204. Parmi les graphes ci-contre, déterminer ceux qui sont semi-eulériens et préciser le chemin correspondant.



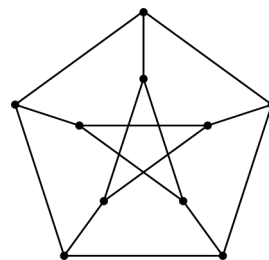
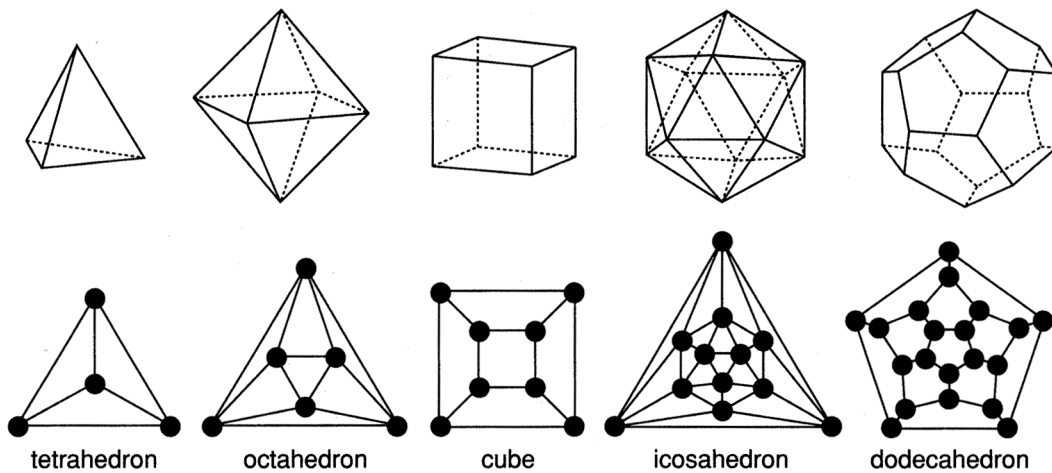
205. Déterminer si les graphes ci-contre sont eulériens, semi-eulériens ou ni l'un ni l'autre.



206. Déterminer si les graphes suivants sont eulériens, semi-eulériens ou ni l'un ni l'autre.

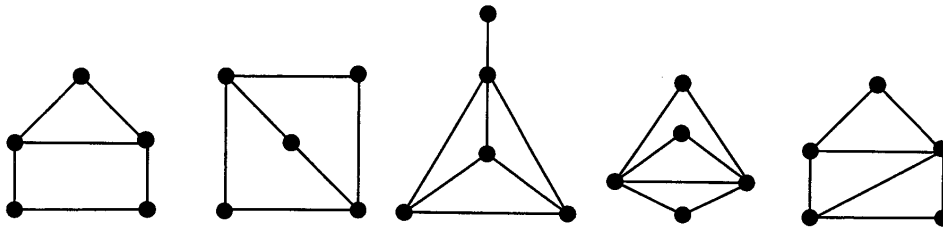
- a) Le graphe complet K_5
- c) Le graphe de l'octaèdre

- b) Le graphe du cube
- d) Le graphe de Petersen

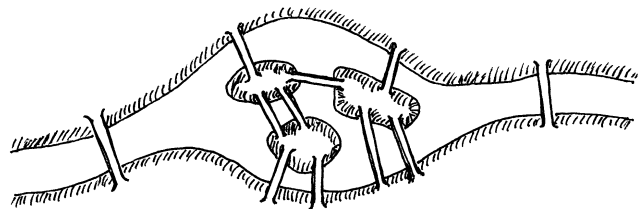


Graphe de Petersen

207. Déterminer si les graphes suivants sont eulériens, semi-eulériens ou ni l'un ni l'autre.

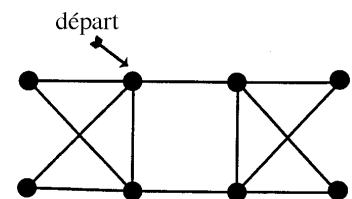


208. On a représenté ci-contre la ville de Dreamtown avec sa rivière et ses trois îles. Est-il possible de parcourir chaque pont une fois et une seule lors d'une balade dans cette ville ?

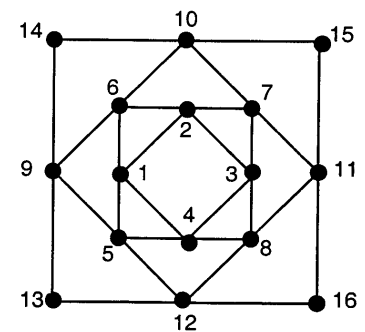


209. Démontrer qu'un graphe eulérien n'a pas de pont. (Un *pont* est une arête dont la suppression déconnecte le graphe.)

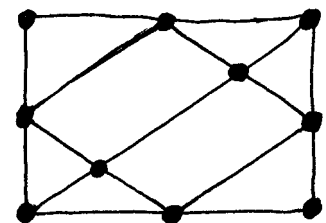
210. Utiliser l'algorithme de Fleury pour trouver un chemin eulérien fermé dans le graphe ci-contre.



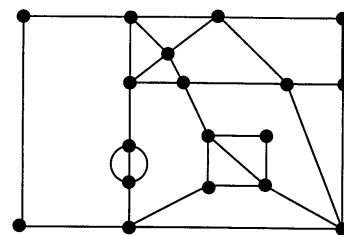
211. Utiliser l'algorithme de Fleury pour trouver un chemin eulérien fermé dans le graphe ci-contre.



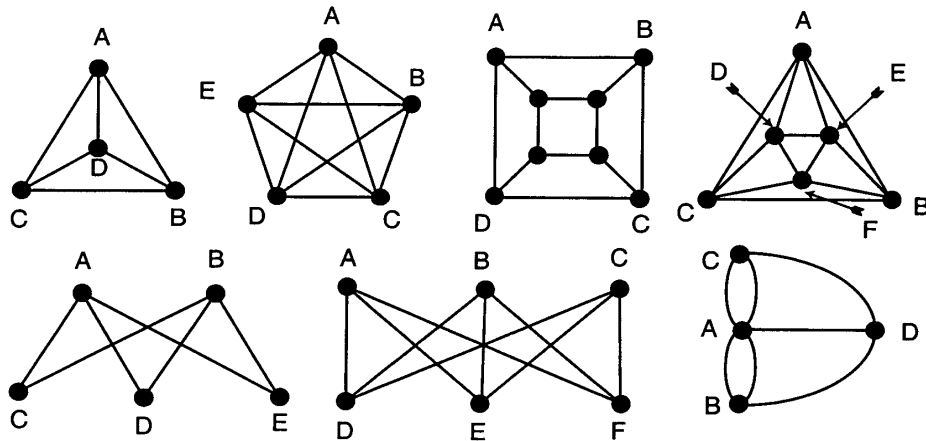
212. Utiliser l'algorithme de Fleury pour trouver un chemin eulérien dans le graphe ci-contre.



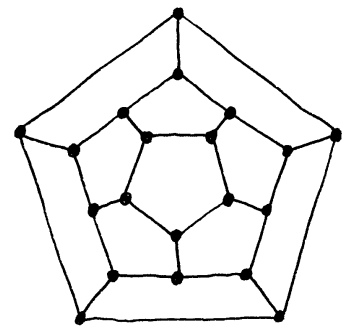
213. Vous êtes un agent de police et la carte des routes de votre secteur est représentée ci-contre. Est-il possible de patrouiller sur chacune de ces routes sans parcourir aucune d'elle plus d'une fois ?



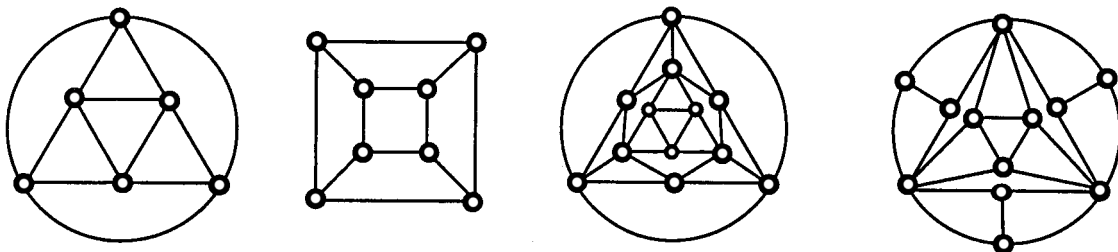
300. Parmi les graphes suivants, déterminer ceux qui sont hamiltoniens et trouver, le cas échéant, un cycle hamiltonien.



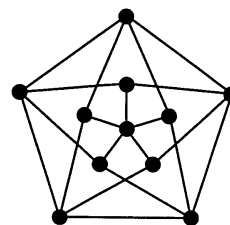
301. Trouver un cycle hamiltonien pour le graphe de l'*icosian game* représenté ci-contre.



302. Déterminer quels sont les graphes hamiltoniens :



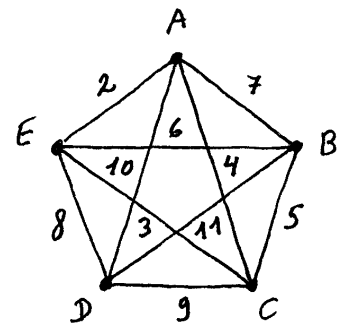
303. Montrer que le graphe de Grötzsch est hamiltonien.



304. Donner un exemple comportant au moins six sommets de...

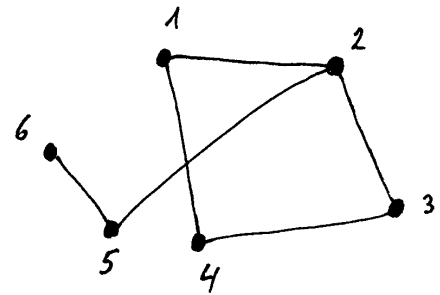
- graphe hamiltonien qui n'est pas eulérien.
- graphe eulérien qui n'est pas hamiltonien.

305. Un gardien de zoo, commençant sa visite par les antilopes, veut encore passer chez les boas, les chameaux, les dingos et les éléphants. Ces lieux sont notés respectivement par A, B, C, D, E et leurs distances sont indiquées sur le diagramme ci-contre. Trouver l'itinéraire le plus court possible commençant et finissant par A , et passant une et une seule fois par les autres lieux.

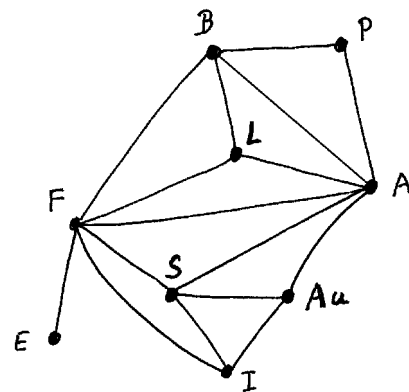
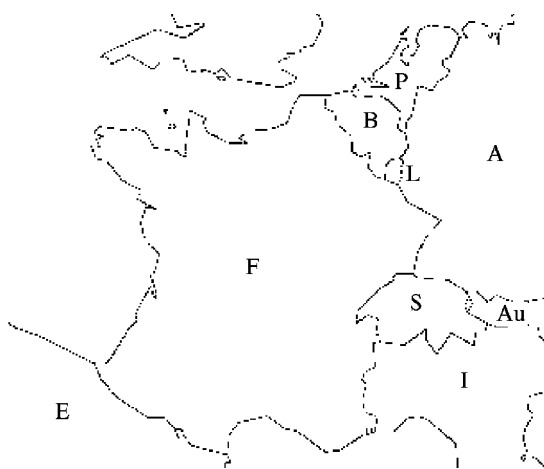


306. Combien de cycles hamiltoniens distincts y a-t-il dans le graphe complet à n sommets K_n ?

400. La figure ci-contre est le graphe d'incompatibilité de six produits chimiques. Quel est le nombre minimum de wagons nécessaires à leur transport ?



401. On veut colorer chaque pays de la carte ci-dessous de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur. Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs, et que quatre couleurs suffisent. (Deux pays n'ayant qu'un nombre fini de points communs ne sont pas considérés comme voisins.)



Le théorème des quatre couleurs. On peut colorer les sommets d'un graphe planaire (sans boucles) en utilisant au plus quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes. Cette conjecture a été formulée pour la première fois par l'Écossais Francis Guthrie en 1852. Il était alors question de coloration de carte de géographie. La preuve de ce théorème n'arriva qu'en... 1976, grâce à Kenneth Appel et Wolfgang Haken. La démonstration fit grand bruit car c'est le premier théorème de l'histoire des mathématiques qui a nécessité l'usage systématique de l'ordinateur. La communauté mathématique se divisa alors en deux camps : ceux pour qui le théorème des quatre couleurs était définitivement démontré, et ceux pour qui tout restait à faire...

402. A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		x	x	x			x	x
B	x				x	x	x	
C	x			x		x	x	x
D	x		x		x			x
E		x		x		x	x	
F		x	x		x			
G	x	x	x		x			
H	x		x	x				

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?

403. Prenez une feuille de papier. Tracez une droite quelconque qui traverse la feuille de part en part. Recommencez l'opération n fois. Démontrez que la "carte" ainsi obtenue peut être colorée en deux couleurs.

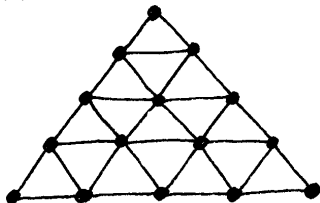
404. On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, 6 matières d'options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet (I), Sport (S) ; les profils des candidats à options multiples sont : F-A-M ; D-S ; I-S ; I-M .

- Quel est le nombre maximum d'épreuves qu'on peut mettre en parallèle ?
- Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour cet examen ?

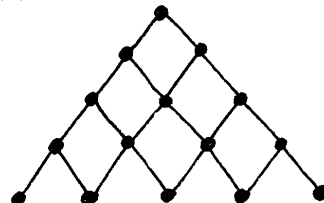
405.—

- Montrer que le nombre chromatique du graphe (a) ci-dessous vaut 3. Pour trois couleurs données, combien y a-t-il de colorations possibles ?
- Montrer que le nombre chromatique du graphe (b) ci-dessous vaut 2.

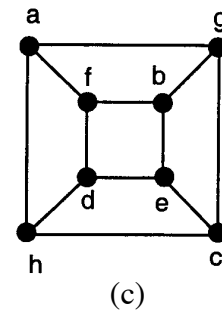
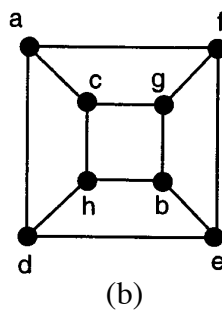
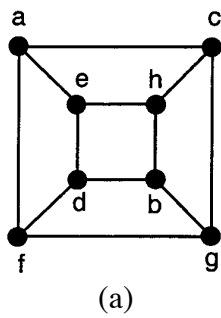
(a)



(b)

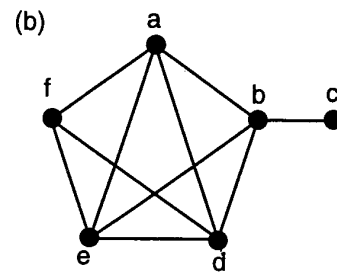
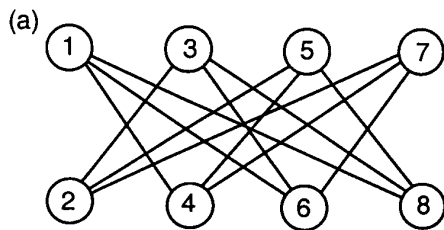


406. Appliquer l'algorithme de coloration aux graphes ci-dessous en suivant l'ordre proposé alphabétiquement.

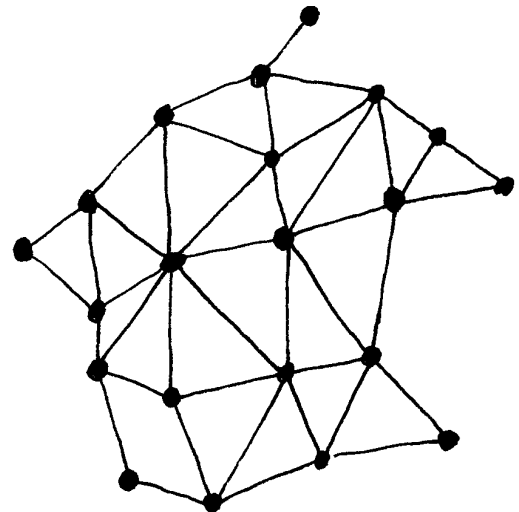


Quelle est la valeur de $\chi(G)$?

407. Appliquer l'algorithme de coloration aux graphes suivants :



408. Montrer que le graphe ci-contre nécessite au moins 4 couleurs (coloration des sommets), puis appliquer l'algorithme de coloration.

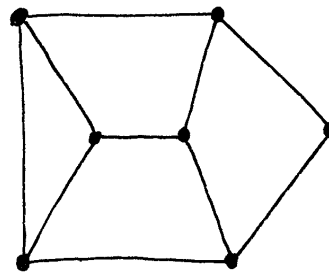


409. Tout graphe contenant un triangle (K_3) ne peut pas être coloré (coloration des sommets) en moins de trois couleurs.

- Construire un graphe sans K_3 qui nécessite également trois couleurs.
- Comment, à partir du graphe précédent, construire un graphe sans K_4 nécessitant 4 couleurs ?
- Un graphe sans K_5 nécessitant 5 couleurs ?

410. Dessiner cinq graphes tels que le degré maximum de leurs sommets soit 5 et leur nombre chromatique respectivement 2, 3, 4, 5 et 6.

411. Déterminez le nombre chromatique de ce graphe.



412. Sept élèves, désignés par A, B, C, D, E, F et G , se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise "qui a rencontré qui" (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement...).

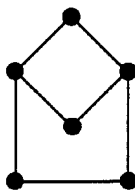
L'élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D, E	D, E, F, G	E, G	A, B, E	A, B, C, D, F, G	B, E, G	B, C, E, F

De combien de places assises doit disposer la bibliothèque pour que chacun ait pu travailler correctement au cours de cette journée ?

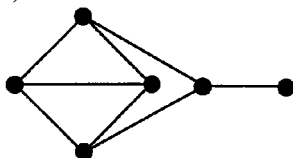
413. Un lycée doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et enfin 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps, et cela sur une durée minimale ?

414. Déterminer le nombre chromatique de chacun des graphes suivants :

a)



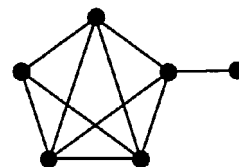
b)



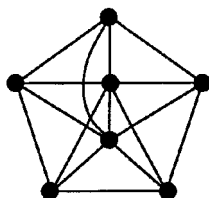
c)



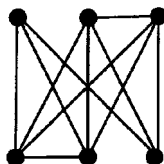
d)



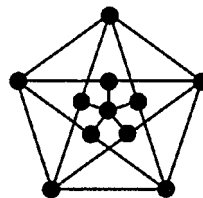
e)



f)



g)



415. Que pouvez-vous dire des graphes G simples et connexes pour lesquels :

a) $\chi(G) = 1$?

b) $\chi(G) = 2$?

416. Dans un congrès, on cherche à planifier l'horaire d'une série de 7 conférences qui doivent être toutes de même durée. Dans le tableau ci-dessous, les croix indiquent les interventions qui ne peuvent coïncider. Comment procéder pour que la durée totale des interventions soit minimale ?

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>		x	x	x			x
<i>b</i>	x		x	x	x		x
<i>c</i>	x	x		x		x	
<i>d</i>	x	x	x			x	
<i>e</i>		x					
<i>f</i>			x	x			x
<i>g</i>	x	x				x	

- 417.** a) Montrer qu'ajouter une arête à un graphe simple augmente son nombre chromatique d'au plus une unité.
b) Montrer qu'enlever un sommet d'un graphe simple diminue le nombre chromatique d'au plus 1.

418. Dessiner un graphe G simple et connexe, comportant 5 sommets, avec $\chi(G) = \Delta + 1$, Δ étant le degré maximum des sommets. Trouver un deuxième graphe satisfaisant les mêmes conditions, différent de G .

419. A la fin d'une année académique, tous les étudiants doivent passer un examen d'une heure avec leurs maîtres.

Le maître A doit interroger les étudiants a, b et c . Le maître B doit interroger les étudiants b, c et d . Le maître C doit interroger les étudiants a, b et d .

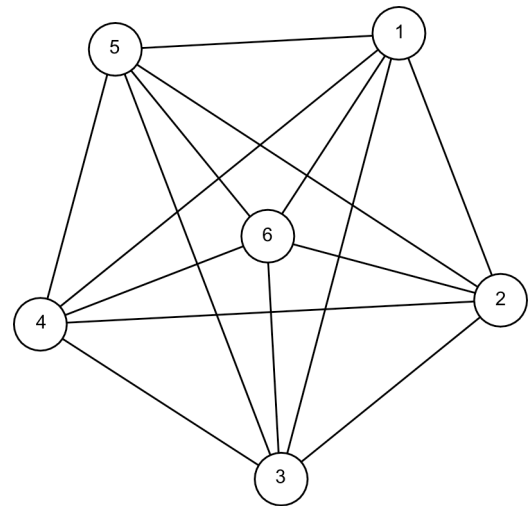
Comment organiser la session pour qu'elle prenne le moins de temps possible ?

420. Sept agences de voyage romaines proposent des visites de monuments et lieux touristiques : le Colisée, le Forum romain, le musée du Vatican et les thermes de Caracalas. Un même lieu ne peut être visité par plusieurs groupes de compagnies différentes le même jour.

La première compagnie fait visiter uniquement le Colisée ; la seconde le Colisée et le musée du Vatican ; la troisième les thermes de Caracalas ; la quatrième le musée du Vatican et les thermes de Caracalas ; la cinquième le Colisée et le Forum romain ; la sixième le Forum romain et les thermes de Caracalas ; la septième le musée du Vatican et le forum romain.

Ces agences peuvent-elles organiser toutes les visites sur les trois premiers jours de la semaine ?

421. Trouver une coloration des arêtes de K_6 en 5 couleurs (les arêtes adjacentes doivent être de couleurs différentes).

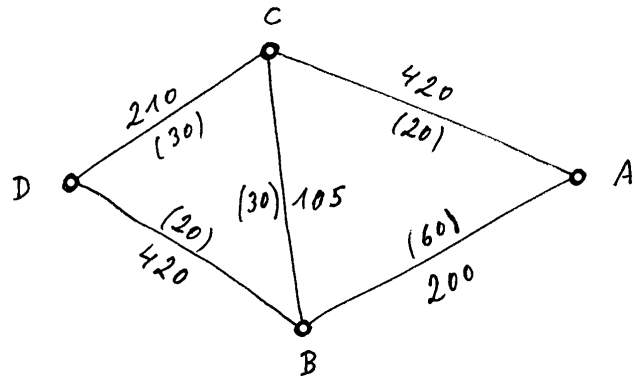


- 422.** a) Une ligue de football comporte 5 équipes. Il est décidé par le bureau de la ligue que, lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera 4 matches d'une heure, deux équipes ne pouvant se rencontrer plus d'une fois. Comment organiser ces rencontres afin de minimiser le temps total nécessaire ?
- b) Le calendrier étant trop chargé, on décide que chaque équipe ne jouera que 3 matches. Organisez les rencontres.

423. Dans un tournoi d'échecs, chaque engagé doit rencontrer tous les autres. Chaque partie dure une heure. Déterminer la durée minimum du tournoi dans le cas où le nombre d'engagés est 3, 4, 5 ou 6.

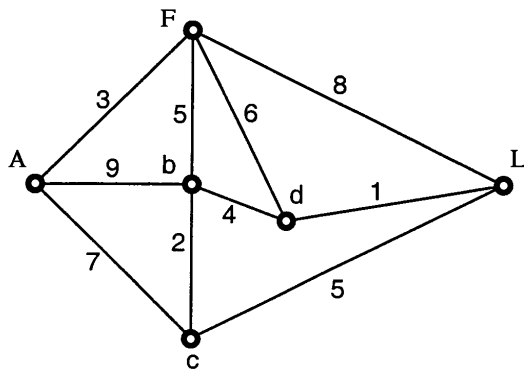
502. Sur les arêtes du graphe ci-contre, représentant un réseau autoroutier, on a marqué les distances entre deux étapes et, entre parenthèses, les prix des péages. Entre D et A , déterminer :

- le chemin le plus court ;
- le chemin qui minimise la somme dépensée en péage.

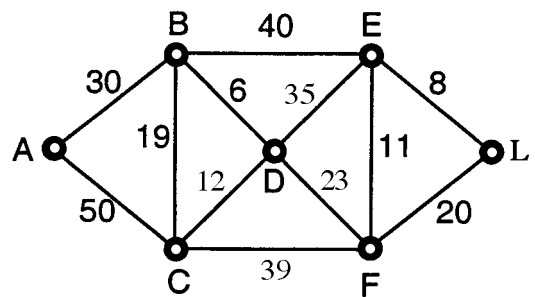


503. Utiliser l'algorithme du plus court chemin (Dijkstra) pour trouver un chemin de poids minimal entre A et L dans les graphes ci-dessous :

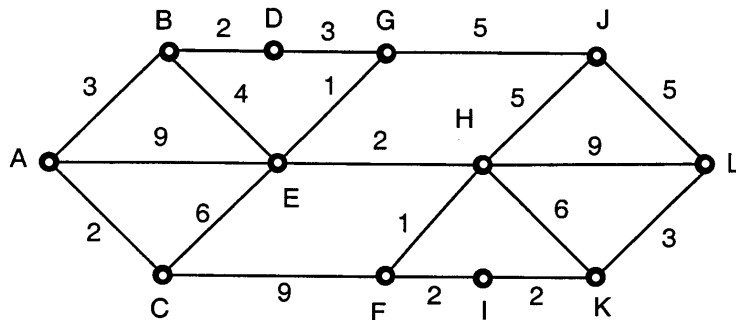
a)



b)

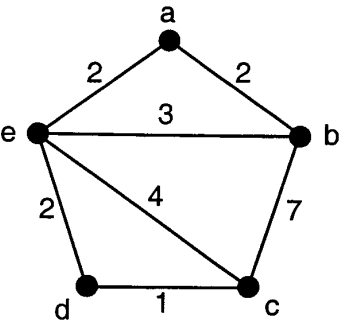


c)

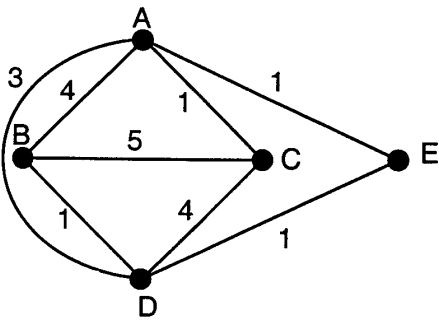


504. Résoudre le *problème du postier chinois* pour les graphes ci-dessous (le postier doit parcourir toutes les rues au moins une fois et revenir à son point de départ, tout en minimisant la distance parcourue) :

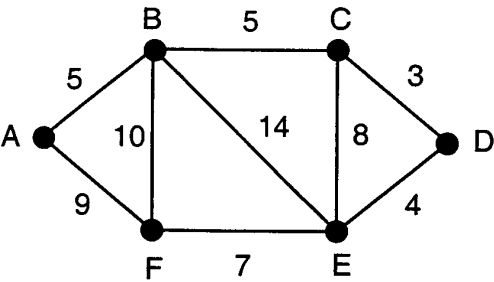
a)



b)

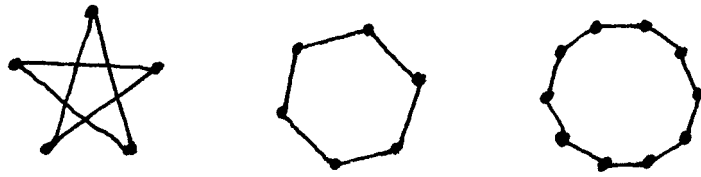


c)

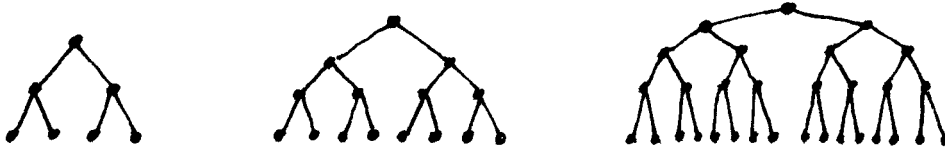


510.—

- a) Trouver le *diamètre* des graphes ci-dessous (= plus longue distance entre deux sommets, la distance de deux sommets étant la longueur du plus court chemin les reliant).

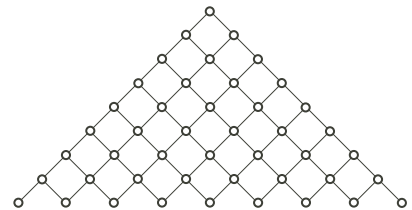


- b) Caractériser les graphes de diamètre 1.
 c) Quels sont les diamètres des graphes ci-dessous ? Si l'on continuait à construire des graphes sur le même modèle, quels seraient les nombres de sommets et d'arêtes en fonction du diamètre ?



511.—

- a) Quel est le diamètre du graphe ci-contre ?
 b) Si l'on prolongeait ce graphe vers le bas, comment évoluerait le nombre des sommets en fonction du diamètre ?



RÉPONSES

122. M. Euler : 3 ; Madame : 3

206. a) eulérien b) non eulérien, non semi-eulérien
c) eulérien d) non eulérien, non semi-eulérien

212. Impossible, car il y a 2 sommets de degré 3. Ce graphe n'est que semi-eulérien.

213. Possible, mais sans revenir au point de départ. Graphe semi-eulérien.

302. Tous hamiltoniens, sauf le dernier, qui est semi-hamiltonien.

$$306. \frac{(n-1)!}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)}{2}$$

400. 2 wagons

401. 4 couleurs

402. 4 aquariums

404. a) 3 épreuves b) 3 demi-journées

405. Nombre de colorations possibles : 6

406. a) 4 b) 3 c) 2

411. $\chi = 3$

412. Au moins 4 places assises

414. a) 3 b) 3 c) 2 d) 4 e) 5 f) 4 g) 4

416. Durée minimale = $4 \cdot (\text{durée d'une conférence})$

420. Possible en 3 jours, mais pas moins

423. 3 h ; 3 h ; 5 h ; 5 h

504. Longueur d'une tournée minimale : a) 27 b) 24 c) 79