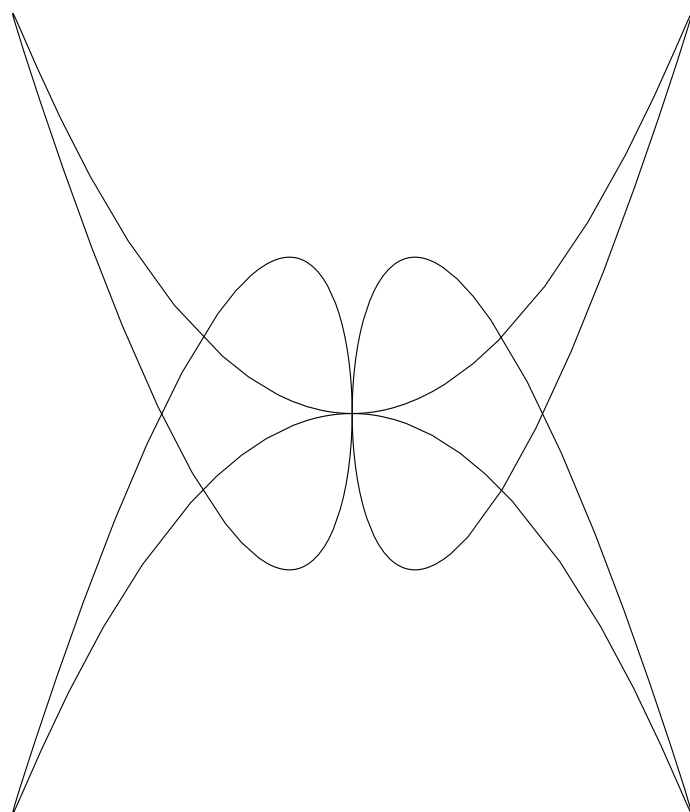


PROGRAMMATION LINÉAIRE

PETITE INTRODUCTION



$$\begin{cases} x = 2 \cos t - 2 \cos(3t) \\ y = 2 \sin t - 2 \sin(5t) \end{cases}$$

Le contenu de cette brochure est en partie extrait d'un cours de H. Bovet.

TABLE DES MATIÈRES

1. Equations du premier degré à 2 inconnues	4
2. Inéquations du premier degré à 2 inconnues	5
3. Inéquations du premier degré à 2 inconnues	6
4. Systèmes d'inéquations	9
5. Programmation linéaire	13
<i>EXERCICES</i>	16

§ 1. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À 2 INCONNUES

Ces équations sont du type $\boxed{ax+by=c}$, où a , b et c sont des nombres non tous nuls.

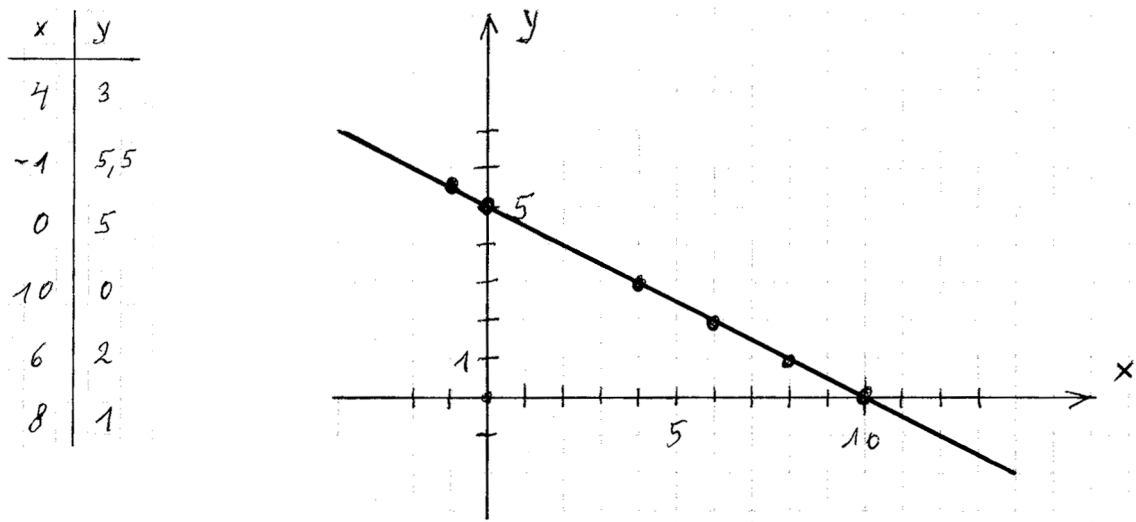
Exemple

$$x + 2y = 10 \quad (a=1, b=2, c=10)$$

$(x; y) = (4; 3)$ est une solution de cette équation, car $4 + 2 \cdot 3 = 10$;

$(x; y) = (-1; 5,5)$ en est une autre, car $-1 + 2 \cdot 5,5 = 10$.

Chaque solution peut être représentée par un point dans le plan muni d'un système de coordonnées Oxy . L'ensemble de toutes les solutions correspond alors à **une droite** du plan :



§ 2. INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À 2 INCONNUES

Exemple 1 :

$$x + 2y > 8$$

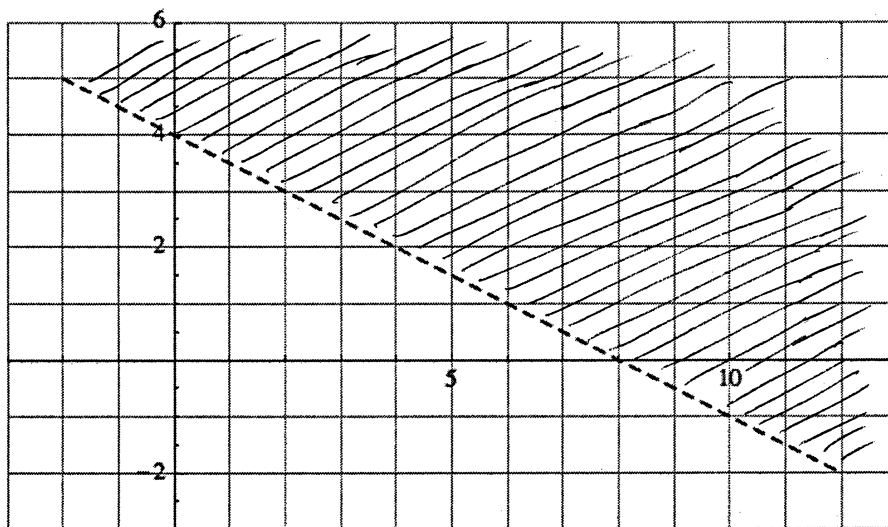
$(x; y) = (2; 6)$ est une solution de cette inéquation, car $2 + 2 \cdot 6 = 14$ et $14 > 8$;

$(4; 3)$ en est une autre, car $4 + 2 \cdot 3 = 10$ et $10 > 8$;

Par contre, $(2; 1)$ n'est pas une solution, car $2 + 2 \cdot 1 = 4$ et 4 n'est pas > 8 .

En faisant d'autres essais, on constate, graphiquement, que toutes les solutions correspondent à des points situés du même côté de la droite $x + 2y = 8$.

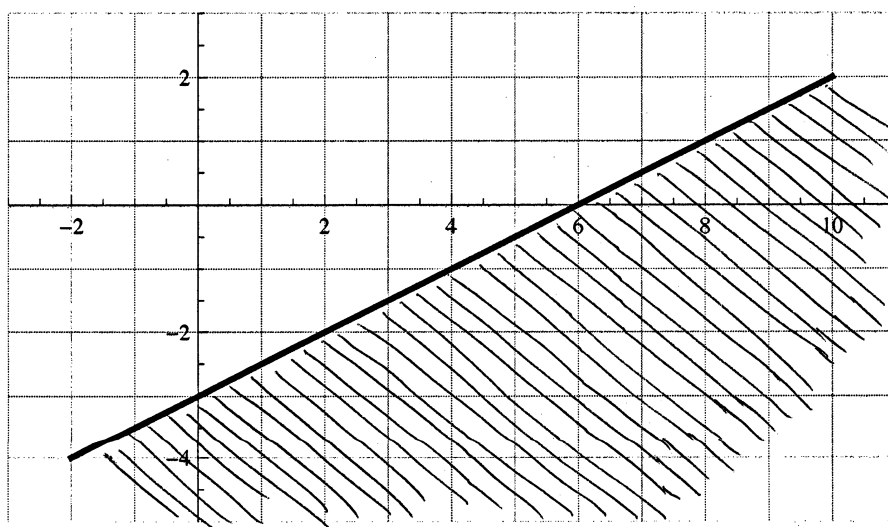
L'ensemble de toutes les solutions est en fait un *demi-plan* limité par la droite $x + 2y = 8$:



Remarque : les points de la droite elle-même ne sont pas des solutions.

Exemple 2 :

$$x - 2y \geq 6$$



Remarque : la droite est cette fois incluse dans l'ensemble des solutions.

§ 3. INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À 2 INCONNUES

Une inéquation du premier degré à deux variables peut se ramener à l'une ou l'autre des 4 formes canoniques :

$$y \leq ax + b$$

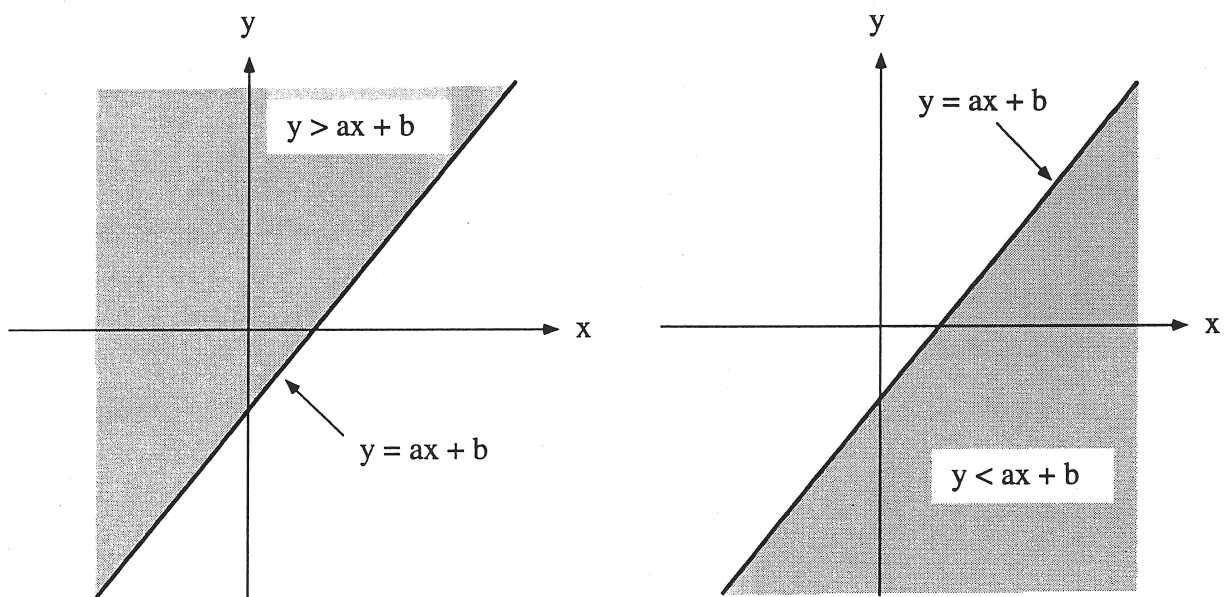
$$y \geq ax + b$$

$$y < ax + b$$

$$y > ax + b$$

L'équation $y = ax + b$ a une infinité de solutions qui sont situées sur la droite représentative de cette équation. De même, l'inéquation $y > ax + b$ a une infinité de solutions qui sont situées au-dessus de la droite représentative de l'équation $y = ax + b$. L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc le demi-plan situé au-dessus de la droite. Pour les mêmes raisons, les points du plan situés en-dessous de la droite $y = ax + b$ correspondent aux solutions de l'inéquation $y < ax + b$.

La droite $y = ax + b$ est dite **associée** à l'inéquation. On représente les solutions d'une inéquation linéaire par un demi-plan mis en évidence graphiquement :

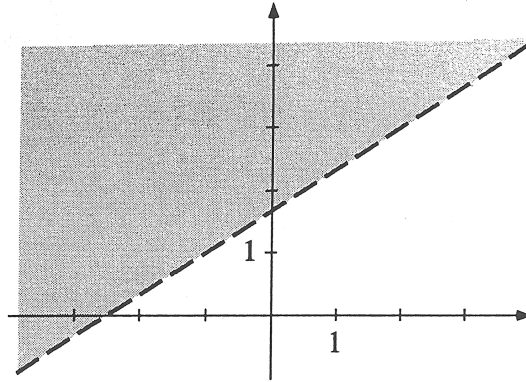


Exemple 1

Représenter graphiquement les solutions de l'inéquation $-2x + 3y > 5$.

$$-2x + 3y > 5 \Leftrightarrow 3y > 2x + 5 \Leftrightarrow y > \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

On commence par tracer la droite associée $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.



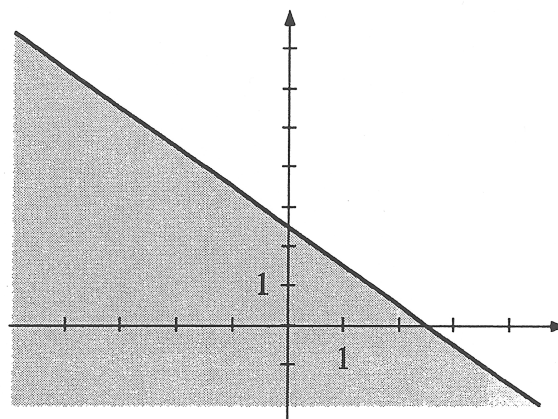
La solution de l'inéquation est le demi-plan situé au-dessus de la droite associée. Les points situés sur la droite n'appartiennent pas à l'ensemble des solutions; nous la représentons par un trait pointillé.

Exemple 2

Représenter graphiquement les solutions de l'inéquation $2x + 2y \leq 5$.

$$2x + 2y \leq 5 \Leftrightarrow 2y \leq -2x + 5 \Leftrightarrow y \leq -x + \frac{5}{2}$$

On trace la droite associée $y = -x + \frac{5}{2}$.



La solution de cette inéquation est le demi-plan situé en dessous de la droite associée. Les points situés sur la droite vérifient l'inéquation; nous la représentons par un trait plein.

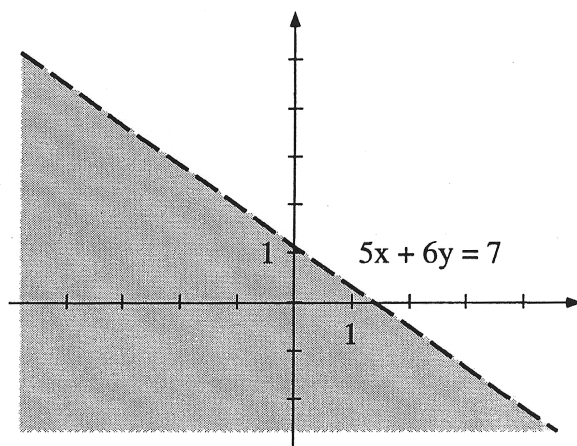
Remarque

La droite d'équation $y = ax + b$ subdivise le plan en deux demi-plans. Les solutions sont toutes situées du même côté de la droite. On ne peut pas avoir deux points de l'ensemble des solutions situés de part et d'autre de la droite. On utilise cette propriété pour déterminer lequel des deux demi-plans est solution de l'inéquation. En effet, si un point qui n'est pas sur la droite vérifie l'inéquation, alors tout le demi-plan contenant ce point fait partie de l'ensemble des solutions; on ajoute à ce demi-plan la droite elle-même, si l'inégalité est large. Par contre, si un point hors de la droite ne vérifie pas l'inéquation, alors c'est le demi-plan ne contenant pas ce point qui est solution. On choisit généralement le point (0;0) pour faciliter les calculs. Si la droite passe par l'origine, on choisit alors un autre point en dehors de la droite.

Exemple 3

Représenter graphiquement les solutions de l'inéquation $5x + 6y < 7$

Représentons la droite associée : $5x + 6y = 7 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{6}x + \frac{7}{6}$



L'origine est située en-dessous de cette droite. De plus, elle vérifie l'inéquation car $5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 < 7$. Ainsi, l'ensemble des solutions est le demi-plan situé en-dessous de la droite. La droite n'est pas incluse dans l'ensemble des solutions; on la représente par un trait pointillé.

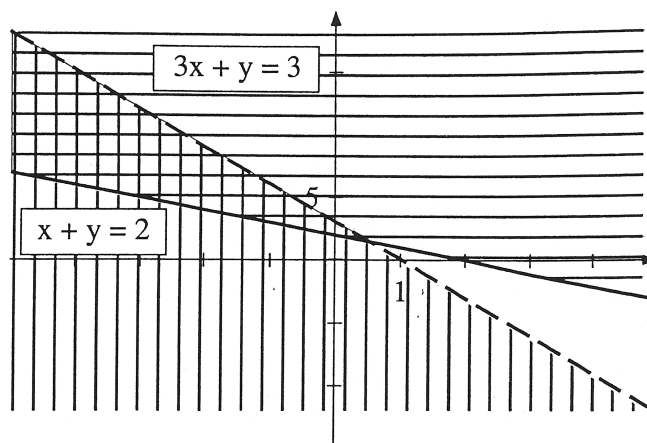
§ 4. SYSTÈMES D'INÉQUATIONS

Il est fréquent de chercher les valeurs des variables qui satisfont plusieurs inéquations à 2 inconnues, **un système d'inéquations**. Il faut déterminer l'intersection des ensembles des solutions de chacune des inéquations, région du plan formée par l'intersection de plusieurs demi-plans.

Exemple 4

$$\begin{cases} 3x + y < 3 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$

Les droites associées : $3x + y = 3$
 $x + y = 2$

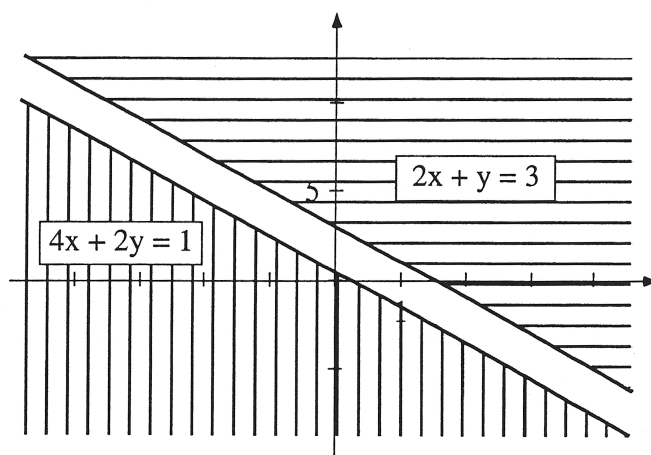


La solution de l'inéquation $3x + y < 3$ est le demi-plan hachuré verticalement situé en-dessous la droite en trait pointillé. La solution de l'inéquation $x + y \geq 2$ est le demi-plan hachuré horizontalement situé au-dessus de la droite en trait plein. La solution du système d'inéquations est la région hachurée dans les deux sens (zone quadrillée).

Exemple 5

Si les droites associées sont parallèles, un système de deux inéquations n'a pas toujours de solution :

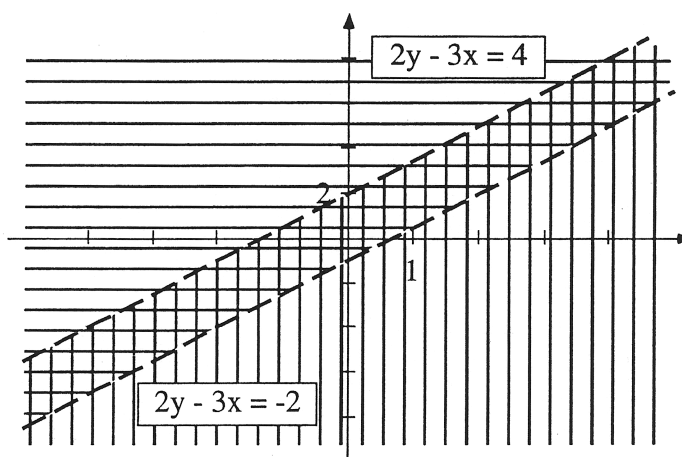
$$\begin{cases} 2x + y \geq 3 \\ 4x + 2y \leq 1 \end{cases}$$



La solution du système est formée de l'ensemble des points situés à la fois au-dessus de la droite d'équation $2x + y = 3$ et en dessous de la droite d'équation $4x + 2y = 1$, ce qui est impossible. L'ensemble des solutions est donc vide.

Exemple 6

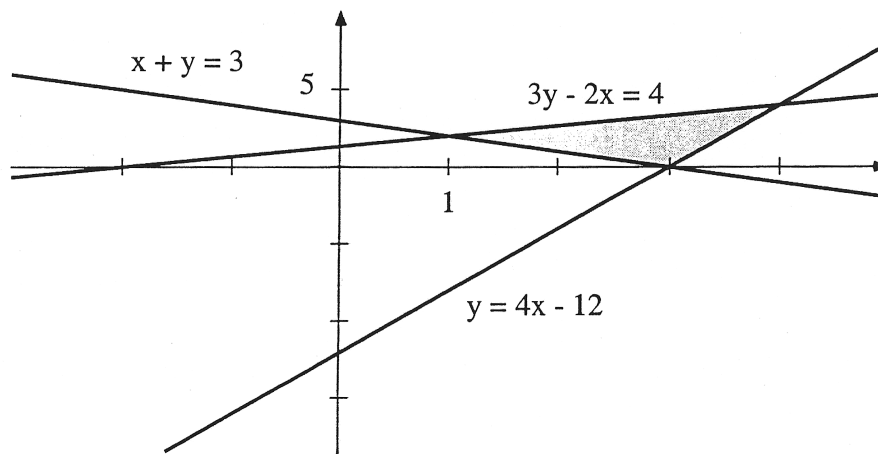
$$\begin{cases} 2y - 3x < 4 \\ y > \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$$



La solution du système est l'ensemble des points du plan situés dans la bande quadrillée comprise entre les deux droites parallèles. Les droites elles-mêmes, représentées par des lignes pointillées, ne font pas partie de l'ensemble solution, puisqu'on a des inégalités strictes.

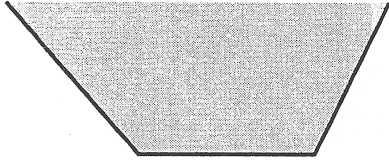
Exemple 7

On rencontre des systèmes d'inéquations de plus de deux inéquations :

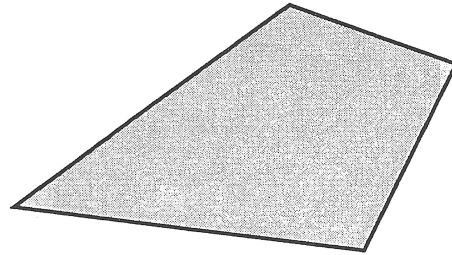
$$\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 3y - 2x \leq 4 \\ y \geq 4x - 12 \end{cases}$$


La solution du système est l'ensemble des points du plan situés à l'intérieur et sur les frontières de la zone triangulaire grise formée par l'intersection des demi-plans solutions de chacune des inéquations.

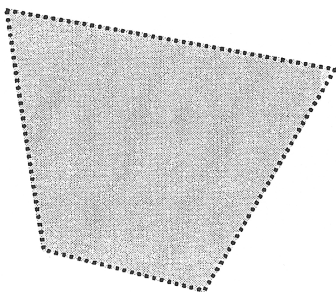
Un **polygone** est une figure plane dont les bords sont des droites, des demi-droites ou des segments de droites. Un polygone peut être **borné** ou **non borné**, selon qu'il s'étend ou non jusqu'à l'infini. Un polygone peut être **fermé** ou **ouvert**, selon qu'il contient ou non toutes ses frontières. Un polygone est **convexe** si tout segment de droite reliant deux de ses points est entièrement situé dans ce polygone. Illustrons ces dernières définitions par des exemples graphiques :



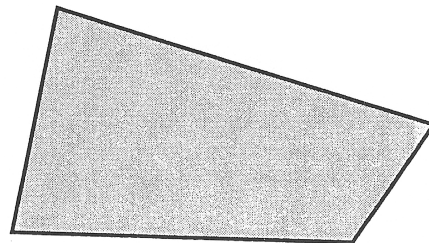
polygone non borné



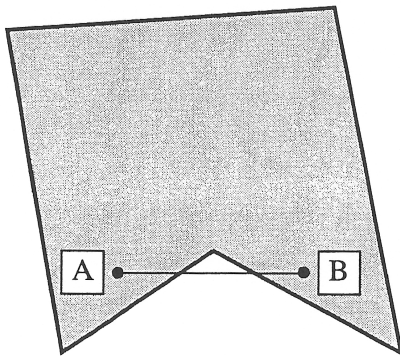
polygone borné



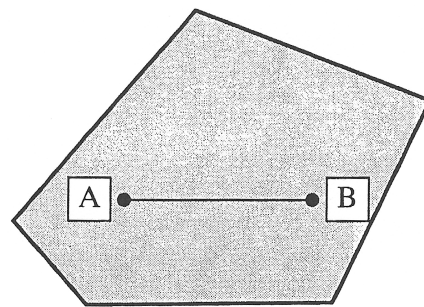
polygone ouvert



polygone fermé



polygone non convexe



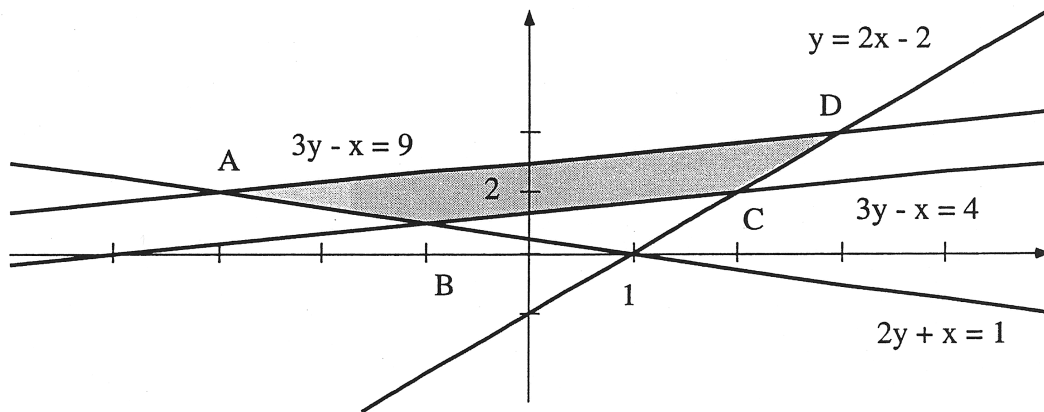
polygone convexe

L'intersection d'un nombre fini de demi-plans est un polygone convexe. Ainsi, la solution d'un système d'inéquations linéaires est un polygone convexe. Un point situé à l'intersection de deux droites, demi-droites ou segments de droites qui sont des frontières d'un polygone est un **sommet** du polygone. On trouve les coordonnées d'un sommet en résolvant le système de deux équations formé par les équations des droites associées concernées.

Exemple 8

Représenter graphiquement les solutions du système d'inéquations et trouver les sommets du polygone convexe solution de ce système :

$$\begin{cases} y \geq 2x - 2 \\ 3y - x \leq 9 \\ 2y + x \geq 1 \\ y \geq \frac{x}{3} + \frac{4}{3} \end{cases}$$



La solution du système d'inéquations linéaires est le polygone convexe fermé et borné représenté en gris sur le graphique. Les 4 sommets du polygone sont les solutions des 4 systèmes d'équations :

$$\begin{cases} 3y - x = 9 \\ 2y + x = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-3;2)$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3} \\ 2y + x = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-1;1)$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3} \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow C(2;2)$$

$$\begin{cases} 3y - x = 9 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow D(3;4)$$

§ 5. PROGRAMMATION LINÉAIRE

Au cours de la seconde guerre mondiale, l'armée de l'air des Etats-Unis d'Amérique eut de nombreux problèmes concernant l'allocation de ses ressources, tant humaines que matérielles. Naturellement, plusieurs spécialistes se penchèrent sur la question et parmi eux, George Dantzig. Peu après la guerre, en 1946, ce dernier formula de manière plus générale ce genre de problèmes et proposa une méthode de résolution, **la méthode du simplexe**.

Ce problème général peut se formuler ainsi : trouver la valeur maximale (ou minimale) d'une fonction à plusieurs variables si ces variables sont soumises à des contraintes. Par exemple, supposons qu'une compagnie fabrique plusieurs produits différents et que pour chacun de ces produits il y a des coûts de fabrication différents en main-d'oeuvre et en matières premières. La compagnie connaît le bénéfice qu'elle réalise en vendant chacun de ces produits. La compagnie doit alors se poser la question suivante : quelle quantité de chacun des produits doit-on fabriquer pour obtenir un bénéfice global maximal ? En général, de tels problèmes peuvent être assez complexes. Cependant, dans le cas où la fonction à optimiser, c'est-à-dire à rendre minimum ou maximum, est linéaire et où les contraintes peuvent s'exprimer par des inéquations, on peut développer une théorie assez simple pour résoudre ce genre de problèmes, **la programmation linéaire**. La programmation linéaire est appliquée avec succès dans de nombreux problèmes de gestion : problèmes de production ou d'investissement, organisation des transports, détermination de la politique des stocks, étude des schémas d'information. Elle permet de résoudre divers problèmes de production, d'affectation, de transport, de régime alimentaire, ... Nous nous limiterons à des problèmes comportant seulement deux variables. Ceci nous permettra d'illustrer la solution par des représentations graphiques simples. Cependant, il faudra pour cela considérer des problèmes simplifiés, idéalisés. On comprend qu'en pratique, le nombre de variables est généralement beaucoup plus grand. La méthode de résolution demeure cependant la même, sauf qu'elle amène beaucoup plus de calculs numériques, ce qui demande généralement l'utilisation d'un ordinateur. Précisons que la méthode de résolution proposée dans ce paragraphe n'est pas la méthode du simplexe. Cette méthode du simplexe est généralement utilisée lorsque le nombre de variables est assez grand.

Mathématiquement, la programmation linéaire est la recherche **du maximum** ou **du minimum** (c'est-à-dire de la plus grande ou de la plus petite valeur) d'une fonction linéaire, appelée pour la circonstance **la fonction économique**. Il s'agit dès lors de rechercher **l'extremum** (maximum ou minimum) de la fonction économique que l'on écrira sous la forme $f(x;y) = ax + by$. Bien entendu, une telle fonction linéaire n'admet généralement pas de valeur optimale si les variables x et y ne sont pas soumises à certaines conditions, **les contraintes**. Dans la pratique, les grandeurs x et y doivent toujours être positives ou nulles (conditions de non-négativité), ce qui peut souvent être expliqué par leur signification concrète (quantités produites, vendues ou transportées, nombre d'heures de travail à effectuer, prix de vente, ...) De plus, certaines contraintes, spécifiques du problème traité, peuvent être de nature très diverse et porter, par exemple, sur des disponibilités de matières premières, des capacités de production, des frais de transport, des prix de stockage, des délais d'approvisionnement,

des spécifications de qualités physiques, chimiques ou technologiques (telles que la volatilité, la pression de vapeur, la viscosité ...); toutes ces conditions, qualifiées de vraies contraintes, s'expriment par des inéquations linéaires. Dans le plan, le sous-ensemble E des points dont les coordonnées vérifient toutes les contraintes, **l'ensemble des programmes réalisables**, est inclus dans le premier quadrant. Il se présente souvent sous la forme d'un polygone convexe. Les sommets sont situés à l'intersection des droites qui limitent les demi-plans utilisés pour construire l'ensemble E. Quant au comportement de la fonction économique, il peut être visualisé en constatant que les points pour lesquels la fonction $f(x;y) = ax + by$ prend une valeur constante k déterminent une droite d'équation $ax + by = k$. Pour des valeurs différentes de k, les droites ainsi obtenues sont toutes parallèles. Géométriquement, le problème posé consiste à déterminer, parmi le faisceau des droites parallèles, celle qui rencontre l'ensemble E des programmes réalisables et qui correspond à la plus grande ou la plus petite valeur de la fonction économique. Intuitivement, il est clair que l'optimum éventuel de la fonction économique pourra toujours être atteint en un sommet du polygone des contraintes au moins; ce résultat est à la base de la programmation linéaire et peut être démontré d'une façon très générale. Concrètement, il suffit dès lors de rechercher la valeur de la fonction économique en les différents sommets de E, ces sommets étant toujours en nombre fini : la plus petite (respectivement la plus grande) de ces valeurs donne le minimum (respectivement maximum) recherché si l'extremum en question existe (ce qui est toujours le cas lorsque E ne contient aucune demi-droite, ainsi qu'on peut le démontrer).

Méthode de résolution d'un problème de programmation linéaire

1. Mathématiser la situation :
 - a) Identifier les variables.
 - b) Définir la fonction objectif à optimiser.
 - c) Exprimer les contraintes sous forme d'inéquations linéaires.
2. Trouver l'optimum de la fonction objectif :
 - a) Résoudre graphiquement le système d'inéquations.
 - b) Déterminer les sommets du polygone des contraintes.
 - c) Evaluer la fonction objectif en chaque sommet.
 - d) Choisir la solution optimale.
3. Traduire et interpréter la solution trouvée dans le contexte du problème.

Exemple

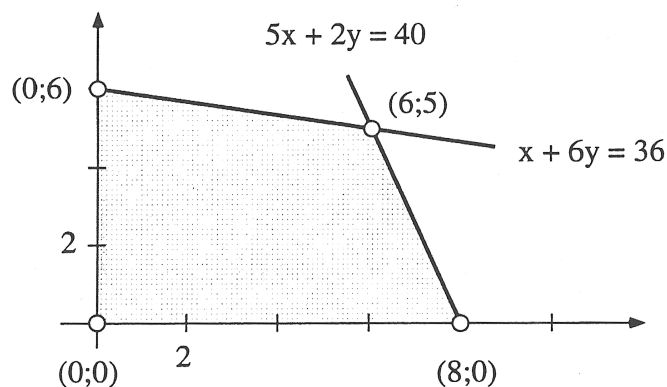
Un manufacturier de meubles fabrique deux sortes de chaises : la chaise rembourrée et le fauteuil de salon. Pour fabriquer une chaise rembourrée, l'ébéniste doit travailler 5 h et le rembourreur 1 h. Pour fabriquer un fauteuil de salon, l'ébéniste doit travailler 2 h et le rembourreur 6 h. Selon les conventions collectives, l'ébéniste ne peut travailler plus de 40 h par semaine et le rembourreur ne peut dépasser 36 h. Une chaise rembourrée se vend avec un bénéfice de Fr 30.- et un fauteuil de salon avec un bénéfice de Fr 40.- Combien de chaises rembourrées et de fauteuils de salon ce manufacturier devrait-il fabriquer chaque semaine, pour obtenir un bénéfice maximal ?

Posons : x = nombre de chaises rembourrées à fabriquer par semaine ;
 y = nombre de fauteuils de salon à fabriquer par semaine ;
 b = bénéfice hebdomadaire.

On a $b = 30x + 40y$.

Exprimons les contraintes sous forme d'inéquations :
$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 40 \\ x + 6y \leq 36 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{5}{2}x + 20 \\ y \leq -\frac{1}{6}x + 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Déterminons le polygone des contraintes (ou domaine réalisable) :



Les sommets du polygone des contraintes sont les points (0;0), (8;0), (6;5), (0;6)

Evaluons le bénéfice en chacun des sommets :

En (0 ; 0), $b = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 0 = 0$;
en (8 ; 0), $b = 30 \cdot 8 + 40 \cdot 0 = 240$;
en (6 ; 5), $b = 30 \cdot 6 + 40 \cdot 5 = 380$;
en (0 ; 6), $b = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 6 = 240$.

La solution optimale correspond au point (6;5) : le manufacturier doit fabriquer 6 chaises rembourrées et 5 fauteuils de salon par semaine s'il veut obtenir un bénéfice maximal, compte tenu de ses contraintes.

EXERCICES

1. Résoudre graphiquement les équations suivantes.

- | | | |
|------------------|------------------|----------------------|
| 1) $y = 2x + 3$ | 2) $y = -3x + 5$ | 3) $x + y = 5$ |
| 4) $3x - 2y = 8$ | 5) $5x + y = 3$ | 6) $2x + 2y - 7 = 0$ |
| 7) $3x - 6 = 0$ | 8) $2y + 8 = 0$ | 9) $x - y = 0$ |

2. Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites d et e :

- | | |
|-----------------------|--------------------|
| 1) $d : x + y = -1$ | $e : x - 4y = 14$ |
| 2) $d : 2x + 3y = 7$ | $e : -x + 2y = -7$ |
| 3) $d : 7x + 2y = 10$ | $e : 14x - y = 0$ |

3. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

- | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------------------------|
| 1) $x - y \leq 8$ | 2) $x \geq -2$ | 3) $3x + 2y \geq 7$ |
| 4) $x - 15 > y - 14$ | 5) $y \leq 5$ | 6) $(x + 3)(x - 5) \leq y + x^2$ |
| 7) $-3 \leq x \leq 4$ | 8) $1 \leq y \leq 5$ | 9) $0 \leq x < 7$ |

4. Représenter graphiquement les solutions des systèmes suivants.

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} y + 1 < 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} 2x + 3y > 0 \\ x - 2y + 1 \leq 0 \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} x - y - 3 < 0 \\ 2x - y > 0 \\ x - 5y < 3 \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} x + 2y \geq 3 \\ x - 2y \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases}$ |

5. Déterminer les sommets des régions polygonales solutions des systèmes suivants et dessiner ces régions.

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\begin{cases} y > 3x - 2 \\ 3x + 2y \geq 6 \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 4y \leq 12 \\ y \geq x - 2 \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} x \leq 2 \\ x + y \geq 3 \\ y \leq x \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} x + 6y - 3 \geq 0 \\ y \geq x - 3 \\ 8 - 4y \geq x \\ 3y - 6 \leq x \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} y + 2 \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y + x \geq -3 \\ y + 2x \leq 1 \\ 3y \leq x + 3 \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 3 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases}$ |

10. Une entreprise fabrique des automobiles et des camions dans une usine divisée en deux ateliers : l'atelier A où s'effectue le travail d'assemblage et de montage et l'atelier B où s'accomplissent toutes les opérations de finissage. L'atelier A emploie 5 journées de travail par camion et 2 par automobile. L'atelier B emploie 3 journées de travail indifféremment pour l'un ou pour l'autre. En raison de limitations de personnel et de machines, l'atelier A peut disposer au maximum de 180 journées de travail par semaine et l'atelier B de 135.

- 1) Si le fabricant fait un profit de 3000 fr par camion et de 2000 fr par automobile, combien doit-il produire de véhicules de chaque type pour maximiser son profit ?
- 2) Et si les profits respectifs étaient de 4000 fr et 1000 fr ?
- 3) Et s'ils étaient tous deux de 2000 fr ?

11. Une chaîne de montage automobile permet de monter deux types de voiture, la "standard" et la "luxe" d'après les conditions suivantes :

	Standard	Luxe
Capacité maximum par jour de la chaîne de montage	500 voitures	300 voitures
Nombre d'heures de travail par voiture	24 h	48 h
Prix de revient par voiture sans main-d'œuvre	5000 fr	6500 fr
Bénéfice réalisé par voiture	10 000 fr	30 000 fr

Calculer le nombre de voitures de chaque type qu'il faut monter par jour afin de réaliser un bénéfice maximal, sachant que 19 200 heures de travail sont disponibles chaque jour et que l'investissement ne doit pas dépasser 3 250 000 fr.

12. Une petite usine fabrique des savonnettes de deux modèles : pour le ménage (M) et de luxe (L). La cuve de fabrication du mélange, pour des raisons mécaniques et de rendement, peut, en une cuvée, préparer une quantité de produit correspondant à au moins 100, mais au plus 1500 savonnettes M, ou à au moins 80, mais au plus 1200 savonnettes L. La demande de savonnettes est au plus de 1400 pour le modèle M, au plus de 320 pour le modèle L. La machine, unique, à former puis à emballer les savonnettes peut en débiter au maximum 1520 par jour. On gagne 0,40 fr par savonnette M et 1 fr par savonnette L. Quel bénéfice journalier maximum cette usine peut-elle faire et comment ?

13. René est charcutier au Québec. Il dispose aujourd'hui de 105 kg de lard haché. Avec cette viande, il doit fabriquer des tourtières et des bols de cretons. Pour chaque tourtière qu'il fabrique, il utilise 1 kg de lard haché alors que pour un bol de cretons, il n'a besoin que de 500 g de lard haché. De plus, chaque tourtière lui coûte 0,25 fr en main-d'œuvre, alors qu'un bol de cretons lui coûte 0,50 fr en main d'œuvre. Il ne peut pas payer plus de 60 fr par jour en main-d'œuvre. Pour chacune des tourtières qu'il vend, il réalise un profit de 0,50 fr et pour chaque bol de cretons qu'il vend, il réalise un profit de 0,75 fr. Combien de tourtières et combien de bols de cretons doit-il fabriquer s'il veut maximiser son profit ?

14. Un artisan fabrique deux modèles de lampes, un modèle de style canadien et un modèle de style futuriste. Pour chacune des lampes qu'il fabrique il doit utiliser deux machines M1 et M2. Dans le cas d'une lampe de style canadien, il doit mettre 2 heures de travail sur la machine M1 et 4 heures sur la machine M2. Pour une lampe de style futuriste, il doit mettre 3 heures de travail sur la machine M1 et 2 heures sur la machine M2. Les machines ne peuvent fonctionner plus de 16 heures par jour. L'artisan connaît bien le marché et il sait qu'il vendra toutes les lampes qu'il peut fabriquer, en réalisant un profit de 5 fr sur chaque lampe de style canadien et un profit de 4 fr sur chaque lampe de style futuriste. Trouver le nombre de lampes de style canadien et le nombre de lampes de style futuriste que cet artisan devrait fabriquer chaque jour s'il veut maximiser son profit.

15. Jean est un champion cycliste qui prépare son entraînement en vue d'une importante compétition. Son entraînement doit se composer chaque semaine d'un certain nombre d'heures de travail en salle et d'un certain nombre d'heures de travail sur route. Au total, il doit s'entraîner au moins 20 heures chaque semaine et son nombre d'heures de travail sur route doit être au moins égal au tiers du nombre d'heures de travail en salle. Pour s'entraîner en salle, il retient les services d'un entraîneur spécialisé qui lui coûte 10 fr l'heure ; cependant, cet entraîneur n'est disponible que s'il est engagé pour au moins 10 heures par semaine. Pour s'entraîner sur route, il retient les services d'un spécialiste qui lui coûte 12 fr l'heure ; ce spécialiste ne peut être disponible pour plus de 15 heures par semaine. Comment Jean doit-il planifier sa semaine d'entraînement pour que cela lui coûte le moins cher possible ?

16. Dans le contexte du problème précédent, si l'entraîneur en salle coûte 15 fr l'heure et celui sur route 12 fr l'heure, de quelle façon Jean doit-il planifier sa semaine d'entraînement afin de minimiser ses dépenses ?

17. Dans une usine de boissons, on fabrique du Coca, du Fanta et du Sprite. Le Coca représente au moins la moitié de la demande totale, le Sprite le tiers de la demande de Fanta au plus. Quotidiennement, l'usine produit 30 000 bouteilles, dont au moins 3000 de Sprite. Quel bénéfice maximum peut-on faire chaque jour si l'on gagne 0,20 fr par bouteille de Coca, 0,25 fr pour le Fanta et 0,35 fr pour le Sprite ?

18. Dans sa basse-cour, un fermier garde 600 volatiles : oies, canards et poules. Il veut avoir au moins 20 canards et 20 oies, mais pas plus de 100 canards, ni plus de 80 oies, ni plus de 140 des deux. Acheter et élever une poule coûte 3 fr un canard 6 fr et une oie 8 fr ; ils peuvent être vendus 8 fr, 13 fr et 20 fr respectivement. Comment ce fermier peut-il réaliser un bénéfice maximal ?

19. Un épicier prépare une commande de tablettes de chocolat, qui doit se faire par cartons entiers de 24 plaques chacun, toutes d'une même sorte pour un carton donné. Connaissant les goûts de sa clientèle, l'épicier se dit qu'il doit commander au moins 10 cartons de chocolat noir, mais pas plus de 60, au moins 20 cartons de chocolat aux noisettes, au plus 50 cartons de chocolat au lait ; enfin la commande de chocolat aux noisettes ne doit pas atteindre le double de celle de chocolat au lait. Pour chaque plaque vendue, il gagne 25 c. avec le chocolat noir, 30 c. avec le chocolat aux noisettes et 20 c. avec le chocolat au lait. Il veut commander 100 cartons en tout. Quelle commande doit-il passer pour réaliser un bénéfice maximum ?

RÉPONSES (non graphiques)

2. 1) $(2; -3)$ 2) $(5; -1)$ 3) $(\frac{2}{7}; 4)$
5. 1) $(\frac{10}{9}; \frac{4}{3})$ 2) $(0; 0), (0; 3), (4; 2), (2; 0)$
3) $(2; 2), (2; 1), (\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ 4) $(0; 2), (4; 1), (3; 0), (-3; 1)$
5) $(-3; 0), (0; 1), (1; -1), (1; -2), (-1; -2)$
6) $(0; -1), (-2; -1), (-2; 3), (2; 3)$
10. 1) 15 voitures et 30 camions pour un bénéfice max. de 120 000 fr
2) 36 camions et aucune voiture pour un bénéfice max. de 144 000 fr
3) 15 voitures et 30 camions et pour un bénéfice max. de 90 000 fr
45 voitures et aucun camion pour un bénéfice max. de 90 000 fr
 x ($15 \leq x \leq 45$) voitures et $45 - x$ camions pour un bénéfice max. de 90 000 fr
11. 200 voitures Standard et 300 voitures Luxe par jour pour un bénéfice max. de 11 000 000 fr
12. 1200 savonnettes de ménage et 320 savonnettes de luxe par jour, pour un bénéfice maximum de 800 fr
13. 60 tourtières et 90 bols de cretons pour un bénéfice maximal quotidien de 97,50 fr
14. 2 lampes de style canadien et 4 lampes de style futuriste pour un bénéfice maximum quotidien de 26 fr
15. 15 h en salle et 5 h sur route ; 210 fr par semaine
16. 10 h en salle et 10 h sur route ; 270 fr par semaine
17. Bénéfice journalier maximal de 7125 fr en produisant 15 000 bouteilles de Coca, 11 250 bouteilles de Fanta, et 3750 bouteilles de Sprite
18. Bénéfice maximal de 3680 fr en vendant 80 oies, 60 canards et 460 poules
19. 10 cartons de chocolat noir, 60 de chocolat aux noisettes et 30 de chocolat au lait. Bénéfice maximal : 636 fr