

Probabilités

2014

TABLE DES MATIÈRES

Arrangements. Principe de multiplication	1
Permutations. Factorielles	2
Permutations avec répétitions	3
Arrangements de n objets p à p sans répétitions	4
Combinaisons de n objets p à p sans répétitions	5
Une formule remarquable sur les C_p^n	6
Le triangle de Pascal	7
Formule du binôme de Newton	8
Notion de probabilité	9
Univers. Événements	10
Règle d'addition	11
Conséquences de la règle d'addition	12
Probabilité conditionnelle	13
Événements indépendants	14
Diagrammes en arbre	15
Processus binomial	16

EXERCICES

§ 1. ARRANGEMENTS. PRINCIPE DE MULTIPLICATION

Considérons les trois cases suivantes, numérotées de 1 à 3 :



On doit placer dans chacune d'elles un objet, et l'on dispose de n_1 objets pour la case 1, n_2 pour la case 2 et n_3 pour la case 3.

Combien y a-t-il de manières différentes de remplir ces trois cases ?

Prenons, pour fixer les idées, $n_1 = 2$, $n_2 = 5$ et $n_3 = 4$. On a alors 2 choix pour la première case, et pour chacun de ces 2 choix, 5 choix pour la deuxième, ce qui fait déjà $2 \cdot 5 = 10$ possibilités de remplir les deux premières cases. Puis, pour chacune de ces 10 possibilités, on a encore 4 choix possibles pour la case 3, ce qui donne finalement $10 \cdot 4$ ou $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ manières de disposer ces objets.

Nous appellerons **arrangement 3 à 3** chacune des dispositions obtenues.

Plus généralement, on trouve le résultat suivant :

Principe de multiplication

Le nombre d'arrangements p à p , avec n_1 choix pour le premier objet, n_2 choix pour le deuxième, etc., est égal à :

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_p$$

Exemple

Combien de mots (ayant un sens ou non) de 4 lettres peut-on former avec les 5 lettres A, B, C, D et E , la première lettre du mot devant être une consonne, et les répétitions n'étant pas admises ?

Solution

Il s'agit de compter des arrangements 4 à 4, avec $n_1 = 3$ (3 consonnes), $n_2 = 4$ (et non 5, car on ne peut reprendre la lettre occupant la première place), $n_3 = 3$ et $n_4 = 2$.

Le nombre de mots cherché est donc $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$.

§ 2. PERMUTATIONS. FACTORIELLES

On considère n objets distincts.

De combien de façons différentes peut-on les aligner côte à côte ? Autrement dit, combien y a-t-il de *permutations* possibles de ces objets ?

Notons P_n le nombre de ces permutations. En vertu du principe de multiplication, $P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, puisqu'en alignant les objets, on a n choix pour l'objet à placer en première position, $n-1$ choix pour la deuxième position, $n-2$ pour la troisième, etc. Le nombre cherché est donc égal au produit des n premiers entiers, appelé *n factorielle* et noté $n!$.

Définition

$$\text{"} n \text{ factorielle" } = \text{produit des } n \text{ premiers entiers} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour des raisons de cohérence, on est amené à poser

$$0! = 1$$

Nous avons donc établi le

Théorème

$$P_n = \text{nombre de permutations de } n \text{ objets (sans répétitions)} = n!$$

Exemple

Le nombre de dispositions possibles de 20 élèves dans une salle comportant 20 places est

$$P_{20} = 20! \cong 2,4 \cdot 10^{18}$$

§ 3. PERMUTATIONS AVEC RÉPÉTITIONS

Problème type

Combien de "mots" différents peut-on écrire avec 3 lettres A et 4 lettres B ?

Solution

Soit x le nombre de ces mots.

Affectons les 3 lettres A d'indices : A_1, A_2, A_3 . En permutant ces lettres indicées A entre elles dans chacun des x mots, nous obtenons $x \cdot 3!$ mots formés avec les lettres $A_1, A_2, A_3, B, B, B, B$.

Affectons ensuite les 4 lettres B des indices 1, 2, 3, 4, et permutons-les entre elles dans chacun des $x \cdot 3!$ mots précédents. On obtient $x \cdot 3! \cdot 4!$ mots contenant les 7 lettres distinctes $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, B_4$. Or, le nombre de permutations de 7 lettres distinctes est $7!$.

D'où : $x \cdot 3! \cdot 4! = 7!$ et $x = \frac{7!}{3! 4!}$.

Ainsi, de manière générale :

Le nombre de permutations de n objets, dont n_1 objets A, n_2 objets B, n_3 objets C, etc., est égal à :

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots}$$

Ce nombre est parfois noté $\bar{P}_n(n_1; n_2; n_3; \dots)$. Par exemple : $\bar{P}_7(3; 4) = \frac{7!}{3! 4!}$.

§ 4. ARRANGEMENTS DE n OBJETS p À p SANS RÉPÉTITIONS

Considérons 7 objets distincts $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$.

Un triplet comme (a_1, a_6, a_3) s'appelle un *arrangement de ces 7 objets 3 à 3*.

(a_1, a_3, a_6) en est également un, différent du premier (l'ordre compte).

Quel est le nombre, noté A_3^7 , de ces arrangements ?

Si l'on essaye de former un tel triplet, on a 7 choix possibles pour le premier objet, 6 pour le deuxième et 5 pour le troisième. Cela donne :

$$A_3^7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}$$

Plus généralement, le *nombre d'arrangements de n objets p à p ($p \leq n$)*, noté A_p^n , s'obtient par la formule :

$$A_p^n = \underbrace{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Remarque

$$A_n^n = \text{nombre de permutations de } n \text{ objets} = n!$$

§ 5. COMBINAISONS DE n OBJETS p À p SANS RÉPÉTITIONS

Considérons n objets distincts $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, et soit p un entier $\leq n$.

On appelle *combinaison de taille p* — ou *combinaison p à p* — de ces n objets tout sous-ensemble de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ comportant p éléments.

Par exemple, $\{a_1, a_2, a_5\}$ est une combinaison de taille 3 de ces n objets.

On note C_p^n ou $\binom{n}{p}$ le nombre des combinaisons de taille p de n objets.

Théorème

$$C_p^n = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Preuve

A partir des éléments de toute combinaison de taille p , on peut former exactement $p!$ arrangements. On a donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons. Par suite :

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarques

- Dans une combinaison, *l'ordre ne compte pas*.
- C_p^n est également le *nombre de choix possibles de p objets parmi n* .

§ 6. UNE FORMULE REMARQUABLE SUR LES C_p^n

Théorème

Quels que soient les entiers n et p tels que $0 \leq p < n$, on a :

$$C_p^n + C_{p+1}^n = C_{p+1}^{n+1}$$

Preuve

Considérons les sous-ensembles de l'ensemble

$$E = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$$

Posons :

N = nombre des sous-ensembles de $p+1$ éléments **contenant le 1**;

M = nombre des sous-ensembles de $p+1$ éléments **ne contenant pas le 1**;

T = nombre de tous les sous-ensembles de $p+1$ éléments.

Clairement :

$$N + M = T$$

Or :

N = nombre des sous-ensembles de p éléments dans $E - \{1\} = C_p^n$

M = nombre des sous-ensembles de $p+1$ éléments dans $E - \{1\} = C_{p+1}^n$

$T = C_{p+1}^{n+1}$

Donc :

$$C_p^n + C_{p+1}^n = C_{p+1}^{n+1}$$

§ 7. LE TRIANGLE DE PASCAL

Le triangle de Pascal est une table donnant la valeur des nombres C_p^n . On y trouve C_p^n à l'intersection de la n -ème ligne et de la p -ème colonne.

Pour construire cette table, il suffit de remarquer que $C_0^n = C_n^n = 1$ (quel que soit $n \in \mathbb{N}$), et d'appliquer la formule

$$C_p^n + C_{p+1}^n = C_{p+1}^{n+1}$$

0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							
7	1	7	21	35	35	21	7	1						
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1					
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1			
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1		
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
<i>n</i>														
<i>p</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...

Questions

- Comment expliquer la symétrie des lignes du triangle de Pascal ?
- Que peut-on dire de la somme des nombres d'une même ligne ?

§ 8. FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème

$$(a+b)^n = a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + C_3^n a^{n-3}b^3 + \dots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + b^n$$

Remarques

Le développement de $(a+b)^n$ comporte donc $n+1$ termes, tous de la forme

$$C_p^n a^{n-p} b^p$$

Le premier terme est a^n , le dernier b^n .

Le deuxième terme est $n a^{n-1}b$, l'avant-dernier $n ab^{n-1}$.

Preuve du théorème

Etablissons la formule pour $n=5$, le raisonnement étant analogue pour les autres valeurs de n . Effectuant le produit $P = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$, on obtient une somme de $2^5 = 32$ termes. Chacun d'eux est un produit de 5 lettres, comme par exemple $ababb$ (une et une seule lettre prise dans chaque facteur de P).

Combien y a-t-il de termes contenant exactement 3 lettres b ?

Réponse : C_3^5 , car former un tel terme revient à choisir b dans 3 des 5 facteurs de P . Ainsi, le terme en a^2b^3 dans $(a+b)^5$ sera $C_3^5 a^2b^3$. De même, le terme en ab^4 sera $C_4^5 ab^4$. Le "terme général" de $(a+b)^5$ est donc $C_p^5 a^{5-p} b^p$.

Exemple

$$\begin{aligned}(x-2)^6 &= (x+(-2))^6 = \\&= x^6 + C_1^6 x^5(-2)^1 + C_2^6 x^4(-2)^2 + C_3^6 x^3(-2)^3 + C_4^6 x^2(-2)^4 + C_5^6 x^1(-2)^5 + (-2)^6 \\&= x^6 + 6x^5(-2) + 15x^4(4) + 20x^3(-8) + 15x^2(16) + 6x(-32) + 64 \\&= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64\end{aligned}$$

§ 9. NOTION DE PROBABILITÉ

Lorsqu'on jette un dé à jouer, on a "autant de chances" d'obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. On a donc "une chance sur six" d'obtenir 1 (ou 2, ou 3, ... , ou 6). On dira que les six *issues* possibles de cette *expérience aléatoire* sont *équiprobables*, et que la *probabilité* de chacune d'elles est $\frac{1}{6}$.

Considérons l'événement

A : obtenir un nombre de points supérieur à 4

A est réalisé si le dé donne un 5 ou un 6 ; il a donc "deux chances sur six" de se produire. On dit que la probabilité de A est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, et on note :

$$p(A) = \frac{1}{3}$$

Plus généralement, lorsqu'une expérience aléatoire possède en tout n issues équiprobables, deux à deux incompatibles*, et qu'un événement A se réalise pour k d'entre elles, la probabilité de A est donnée par :

$$p(A) = \frac{k}{n}$$

k est le nombre des *cas favorables* à A et n celui des *cas possibles*.

Ainsi :

$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$
--

Attention !

Cette formule n'est valable que si les "cas possibles" sont équiprobables (et en nombre fini.)

* ne pouvant avoir lieu simultanément

§ 10. UNIVERS. ÉVÉNEMENTS

- L'ensemble des issues possibles, incompatibles deux à deux, qui peuvent se présenter au cours d'une épreuve aléatoire déterminée, constitue par définition l'**univers** associé à l'épreuve.

Exemples

- 1) Jeu de pile ou face. On lance la pièce une fois. Les issues possibles sont p (pile) et f (face).
L'univers associé est $U = \{p, f\}$.
- 2) On jette un dé à 6 faces. On peut associer à cette expérience l'univers $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Autre possibilité : $U = \{\text{pair}, \text{impair}\}$.

- On appelle **événement** tout sous-ensemble de l'univers.

Exemples

Lors du jet d'un dé :

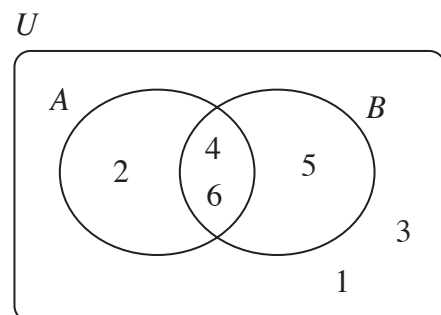
$A = \{2; 4; 6\} = \text{"obtenir un chiffre pair"}$

$B = \{4; 5; 6\} = \text{"obtenir un chiffre } \geq 4\text{"}$

$\bar{A} = \{1; 3; 5\} = \text{"non-A"} = \text{"obtenir un chiffre impair"} = \text{événement contraire de A}$

$A \cap B = \text{"A et B"} = \{4; 6\}$

$A \cup B = \text{"A ou B"} = \{2; 4; 5; 6\}$



- Les sous-ensembles particuliers $\emptyset$ et U de l'univers U correspondent aux événements suivants :

$\emptyset$ est l'**événement impossible** (il ne se produit jamais)

U est l'**événement certain** (il a toujours lieu)

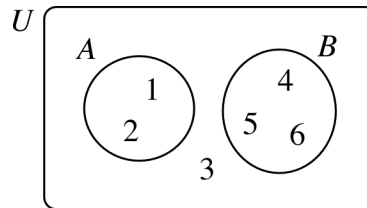
§ 11. RÈGLE D'ADDITION

Lors du jet d'un dé, on envisage les événements

A : "obtenir un nombre de points inférieur ou égal à 2"

B : "obtenir un nombre de points supérieur ou égal à 4"

Ils correspondent à des sous-ensembles de l'univers $U = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6 \}$:



On voit que les ensembles A et B sont *disjoints* ($A \cap B = \emptyset$), ou, de manière équivalente, que les événements A et B sont *incompatibles* (A et B ne peuvent se produire simultanément).

De plus :

$$p(A \cup B) = \frac{2+3}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = p(A) + p(B)$$

La relation $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ constatée ici est en fait un **axiome*** de la théorie des probabilités, appelé "règle d'addition" :

Si A et B sont deux événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Conséquences (valables pour des événements A et B quelconques)

- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Preuves au numéro suivant.

* Un axiome est une propriété admise sans démonstration, servant à définir un certain objet de la théorie, ici la notion de probabilité elle-même.

§ 12. CONSÉQUENCES DE LA RÈGLE D'ADDITION

Soient A et B deux événements d'un univers U . Nous allons démontrer les trois formules suivantes à l'aide de la règle d'addition.

1. Probabilité du complémentaire

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Preuve. Les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

Donc, par la règle d'addition, $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$.

Or $A \cup \bar{A} = U$ et $p(U) = 1$. D'où $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.

2. Probabilité de la différence

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$$

Preuve. On a : $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ et $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Donc, par la règle d'addition : $p(A) = p(A - B) + p(A \cap B)$.

Ainsi, $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$.

Remarque. $A - B = A \cap \bar{B}$.

3. Probabilité de la réunion

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

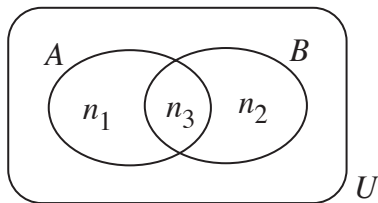
Preuve. Partons de $A \cup B = (A - B) \cup B$. Comme $A - B$ et B sont incompatibles, on peut appliquer la règle d'addition : $p(A \cup B) = p(A - B) + p(B)$.

Or, on vient d'établir que $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$.

Par conséquent : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

§ 13. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Soit U un univers contenant n éléments, et soit A, B des événements de U tels que $A - B$ a n_1 éléments, $B - A$ a n_2 éléments et $A \cap B$ a n_3 éléments.



Si les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité que A se réalise, sachant que B a lieu, est égale à celle que $A \cap B$ se réalise, sachant que B a lieu. Elle vaut donc :

$$\frac{n_3}{n_2 + n_3} = \frac{n_3 / n}{(n_2 + n_3) / n} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Cette probabilité s'appelle probabilité conditionnelle de A par B . On en induit la définition générale suivante :

Définition. Soient A et B deux événements d'un univers U . Si $p(B) \neq 0$, on appelle *probabilité conditionnelle de A par B* , ou *probabilité de A sachant B* , le nombre noté $p(A|B)$ donné par :

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Exemple. Les tables de mortalité de la population suisse pour les années 1978 à 1983 publiées par le Bureau Fédéral de Statistique montrent que, sur 100'000 garçons qui naissent, 92'152 sont encore en vie à 50 ans, et 66'419 sont encore en vie à 70 ans. Quelle probabilité un homme de 50 ans a-t-il d'être encore en vie à 70 ans ?

Solution. Soit A l'événement "être en vie à 70 ans", et soit B l'événement "être en vie à 50 ans". On doit calculer $p(A|B)$:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{0,66419}{0,92152} \cong 0,72$$

De la définition précédente résulte immédiatement le

Théorème de multiplication

Si A et B sont deux événements d'un univers U , et si $p(A) \neq 0$, alors :

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$$

Corollaire

- a) $p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B|A) \cdot p(C|(A \cap B))$
- b) $p(A \cap B \cap C \cap D) = p(A) \cdot p(B|A) \cdot p(C|(A \cap B)) \cdot p(D|(A \cap B \cap C))$

§ 14. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

Intuitivement, nous dirons que deux événements A et B sont *indépendants* si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur celle de l'autre. On peut alors écrire :

$$p(A | B) = p(A) \quad \text{et} \quad p(B | A) = p(B).$$

De $p(A | B) = p(A)$, on tire $\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A)$, puis $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Réciproquement, la relation $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ implique, pour autant que $p(A)$ et $p(B)$

ne soient pas nuls, que $\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A)$ et que $\frac{p(B \cap A)}{p(A)} = p(B)$. D'où :

$$p(A | B) = p(A) \quad \text{et} \quad p(B | A) = p(B).$$

Ainsi :

Deux événements A et B sont *indépendants* si et seulement si

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Exemple

Si l'on jette deux fois de suite un dé, les événements A : "obtenir un nombre pair au premier jet" et B : "obtenir 5 au deuxième jet" sont indépendants. La probabilité d'amener un pair au premier jet et un 5 au deuxième jet peut donc se calculer comme suit :

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

§ 15. DIAGRAMMES EN ARBRE

Exemple

On considère trois boîtes A , B et C telles que :

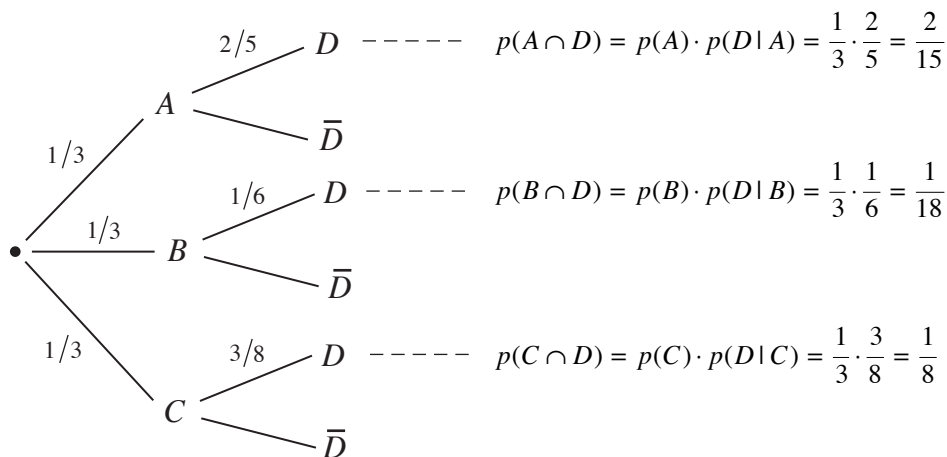
A contient 10 ampoules électriques, dont 4 sont défectueuses ;

B contient 6 ampoules électriques, dont 1 est défectueuse ;

C contient 8 ampoules électriques, dont 3 sont défectueuses.

On choisit une boîte au hasard et dans cette boîte une ampoule au hasard. Quelle est la probabilité pour que cette ampoule soit défectueuse ?

Solution



(On a utilisé trois fois le théorème de multiplication.)

On termine au moyen de la règle d'addition : $p(D) = \frac{2}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{113}{360} \approx 0,314$.

Mettons en évidence la règle suivante, découlant du théorème de multiplication :

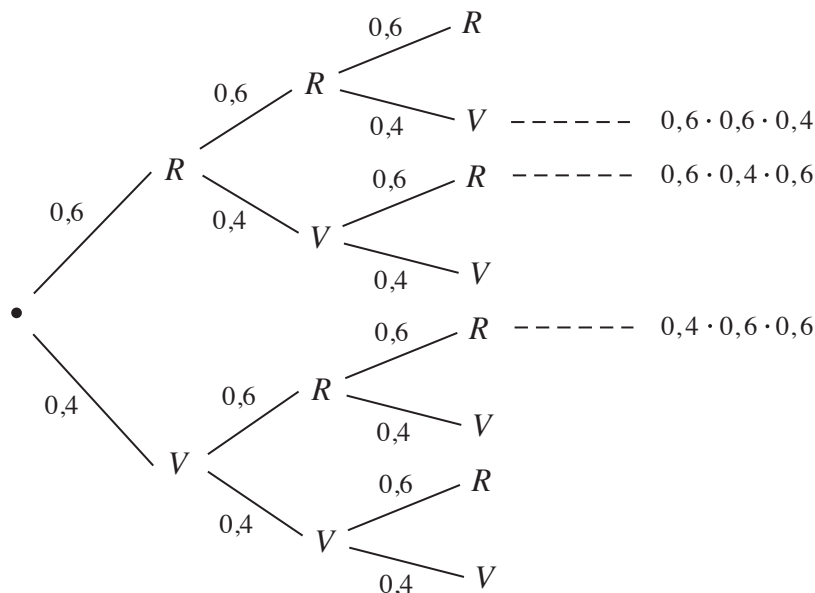
Dans un diagramme en arbre, la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches qui composent ce chemin.

§ 16. PROCESSUS BINOMIAL

Exemple préalable

Une urne contient 10 boules, dont 6 rouges et 4 vertes. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette "épreuve" trois fois de suite.

Quelle probabilité a-t-on, au cours de ces trois épreuves successives indépendantes, de tirer au total 2 boules rouges et 1 verte ? Solution :



$$\begin{aligned}
 p(\text{"obtenir } 2R \text{ et } 1V") &= \text{Somme des probabilités des chemins comportant } 2R \text{ et } 1V \\
 &= (\text{nombre de chemins comportant } 2R \text{ et } 1V) \cdot (0,6)^2 (0,4)^1 \\
 &= (\text{nombre de mots de 3 lettres, dont } 2R \text{ et } 1V) \cdot (0,6)^2 (0,4)^1 \\
 &= C_2^3 (0,6)^2 (0,4)^1.
 \end{aligned}$$

Si l'on effectue maintenant 20 tirages successifs, toujours "avec remise", et que l'on s'intéresse à la probabilité d'obtenir exactement 7 boules rouges, on aura :

$$\begin{aligned}
 p(\text{"obtenir } 7R \text{ et } 13V") &= \text{Somme des probabilités des chemins comportant } 7R \text{ et } 13V \\
 &= (\text{nombre de chemins comportant } 7R \text{ et } 13V) \cdot (0,6)^7 (0,4)^{13} \\
 &= (\text{nombre de mots de 20 lettres, dont } 7R \text{ et } 13V) \cdot (0,6)^7 (0,4)^{13} \\
 &= C_7^{20} (0,6)^7 (0,4)^{13}.
 \end{aligned}$$

Cas général

On effectue n épreuves successives indépendantes, avec chaque fois 2 issues possibles A et $\bar{A}$ ("succès" ou "échec"), de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Alors :

$$p(\text{"obtenir exactement } k \text{ fois } A") = C_k^n p^k q^{n-k}$$

EXERCICES

1. Calculer : $6!$; $6! - 4!$; $(6 - 4)!$; $\frac{180!}{178!}$; $\frac{125!}{122! \cdot 5!}$; $\frac{99! \cdot 47!}{50! \cdot 96!}$.
2. Sept personnes prennent place sur un banc. De combien de manières différentes peuvent-elles se disposer ? Même question si deux personnes déterminées doivent occuper les deux extrémités du banc.
3. Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former avec les chiffres du nombre 281'954 :
 - a) Si l'on ne peut pas utiliser deux fois le même chiffre.
 - b) Si l'on peut utiliser plusieurs fois chaque chiffre.
4. Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former avec les 6 chiffres 2, 3, 5, 6, 7, 9 (répétitions admises) ?
Parmi ceux-ci, combien sont inférieurs à 400 ? pairs ? multiples de 5 ?
5. Combien peut-on former de nombres de 4 chiffres (ne commençant pas par 0) :
 - a) en tout ?
 - b) pairs ?
 - c) divisibles par 5 ?
 - d) divisibles par 25 ?
 - e) supérieurs à 5'999 ?
 - f) supérieurs à 6'599 ?
6. Une salle de classe comporte 12 tables à 2 places. Il y a dans cette salle 21 élèves : 12 filles et 9 garçons.
 1. De combien de manières différentes les élèves peuvent-ils se placer ?
 2. A raison d'une minute par disposition, combien de temps faut-il pour épuiser toutes les possibilités ? (On comparera ce nombre à l'âge supposé de l'univers qui est d'environ $14 \cdot 10^9$ années.)
 3. Même question qu'au numéro 1 si Jean et Marc veulent être assis côte à côte.
 4. Même question qu'au numéro 1 si l'on veut qu'il n'y ait pas deux élèves de même sexe assis à la même table.
7. De combien de façons peut-on aligner 5 dés à jouer de couleurs différentes ? (On tient compte du nombre de points et de la couleur.)
8. Un menu de restaurant propose 10 hors-d'oeuvre, 4 entrées, 11 plats de viande, 9 desserts. Combien peut-on composer de menus contenant chacun un de ces quatre plats ?

Exercices

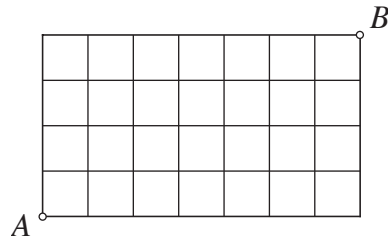
9.
 - a) Combien y a-t-il de sous-ensembles de 5 objets dans un ensemble de 14 objets ?
 - b) Combien de comités de 6 personnes peut-on former dans une société de 65 membres ?
10.
 - a) Dans une société de 25 personnes, on doit en désigner 4 qui formeront le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ?
 - b) Même question si l'on doit en plus répartir au sein du comité les fonctions de président, vice-président, trésorier et secrétaire.
11.
 - a) Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'une épreuve écrite. Combien de choix différents peut-il faire ?
 - b) Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre les 3 premiers problèmes.
 - c) Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre 4 exactement des 5 premiers problèmes.
12. Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut former une commission de 7 membres comprenant 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?
13. De combien de façons peut-on choisir 5 cartes à jouer dans un jeu de 36 cartes, de manière que ces cartes comprennent :
 - a) les 4 as ?
 - b) 2 as et 2 rois (exactement) ?
 - c) au moins un as ?
14. Douze joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres. Combien y a-t-il de parties disputées ?
15. Lors d'un tirage au sort, on jette une pièce de monnaie 20 fois de suite et l'on examine la séquence des "pile" et des "face".
 - a) Combien de séquences différentes sont-elles possibles ?
 - b) Parmi celles-ci, combien contiennent exactement 1 fois pile ? 4 fois pile ? 10 fois pile ? 20 fois pile ?
16. Pour mettre sur pied la course d'école d'une classe de 20 élèves, 6 organisateurs doivent être choisis parmi les élèves.
 - a) Combien y a-t-il de choix possibles ?
 - b) Sachant qu'il y a 9 filles dans la classe, combien de possibilités seront-elles mixtes ?

Exercices

17. a) Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de huit places. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
b) Même question, mais avec huit personnes.
18. Dans l'alphabet Braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points, certains étant en relief. Combien de signes distincts peut-on ainsi composer ?
19. Quel est le nombre des diagonales d'un polygone convexe à n côtés ?
20. Un questionnaire comprend 8 questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes avec 4 oui et 4 non ?
21. Dans une assemblée composée de 15 hommes et de 25 femmes, il est décidé de nommer un comité de 5 personnes.
- a) Combien de comités peut-on envisager ?
b) Quel est le nombre de comités comprenant exactement 3 femmes ?
c) Quel est le nombre de comités comprenant au moins 3 femmes ?

22. Dans le quadrillage ci-contre, déterminer le nombre de chemins possibles pour se rendre du point A au point B , en ne faisant que des pas horizontaux à droite ou des pas verticaux de bas en haut.

Indication : coder les chemins en binaire.



23. Sur un damier de 300 cases, soit 10 colonnes et 30 lignes, quel est le nombre de dispositions possibles pour 6 jetons indistinguables s'il y a :
- a) au plus 1 jeton par colonne ;
b) au plus 1 jeton par ligne ;
c) au plus 1 jeton par ligne et par colonne.
24. Sur un damier de 200 cases, soit 20 colonnes et 10 lignes, quel est le nombre de dispositions possibles pour 7 jetons indistinguables s'il y a :
- a) au plus 1 jeton par colonne ;
b) au plus 1 jeton par ligne et par colonne.
25. De combien de façons différentes peut-on aligner 5 billes rouges, 2 billes blanches et 3 billes vertes ?

Exercices

26. Dans un voilier, chaque signal est constitué de 8 pavillons alignés verticalement. Combien de signaux différents peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et 1 pavillon bleu ?
27. Combien peut-on écrire de mots différents (ayant un sens ou non) avec les lettres du mot :
- | | | |
|----------|----------|-----------------|
| a) FLEUR | b) LUNE | c) SOLEIL |
| d) ARBRE | e) TERRE | f) DIVISIBILITE |
28. Combien peut-on écrire de mots différents (ayant un sens ou non) avec les lettres du mot MISSISSIPPI ? Parmi ceux-ci, combien commencent et se terminent par S ?
29. De sept couples mariés, on choisit quatre personnes.
- a) Combien a-t-on de choix si l'on veut qu'il y ait 2 hommes et 2 femmes ?
- b) Même question si l'on veut qu'il y ait 2 couples mariés ?
30. Une femme a 13 amies. Elle désire en inviter 7 à un souper. Combien de choix a-t-elle si deux de ses amies ne peuvent être invitées ensemble parce qu'elles se boudent ?
31. Un sac contient 19 jetons numérotés de 1 à 19. Combien peut-on former d'ensembles de 4 jetons :
- a) ne comportant que des jetons de numéros pairs ?
- b) ne comportant que des jetons de numéros impairs ?
- c) dont un seul jeton porte un numéro pair ?
- d) dont un jeton au moins porte un numéro pair ?
32. Quel est le nombre des diviseurs de $n = 20'000'000$? (Décomposer d'abord n en un produit de facteurs premiers.)
33. Une pièce est éclairée par huit lampes indépendantes. De combien de façons peut-on l'éclairer :
- a) avec exactement cinq lampes allumées ?
- b) avec au moins cinq lampes allumées ?
- c) avec un nombre impair de lampes allumées ?
- d) au total ?
34. Quel est le nombre maximum de plans déterminés par 37 points dans l'espace ? (3 points non alignés déterminent un plan.)

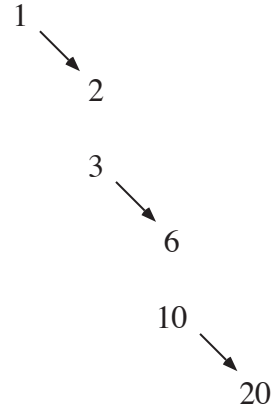
Exercices

35. Le prince de Toscane demanda un jour à Galilée pourquoi, lorsqu'on jette trois dés, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces deux sommes soient obtenues chacune de six façons différentes. Répondez à la place de Galilée !
36. Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un 6 en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double 6 en lançant vingt-quatre fois deux dés ? (Problème posé en 1654 à Pascal par le Chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres à la cour de Louis XIV.)
37. Développer :
- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 1) $(a+b)^3$ | 2) $(a+b)^4$ | 3) $(a+b)^5$ |
| 4) $(1+x)^4$ | 5) $(2x-1)^3$ | 6) $(2-x)^5$ |
| 7) $(1-3x)^4$ | 8) $(x-3)^5$ | 9) $(3-2x)^4$ |
38. Calculer :
- a) le terme en a^6 dans le développement de $(a+b)^8$.
 - b) le terme en b^5 dans le développement de $(a-b)^9$.
 - c) le terme en x^5 dans le développement de $(x-7)^9$.
 - d) le terme en x^4 dans le développement de $(2x+y)^9$.
39. a) Calculer la somme des termes de chacune des huit premières lignes du triangle de Pascal.
- b) Prouver que la somme des coefficients dans le développement de $(a+b)^n$ est égale à 2^n . *Indication* : examiner le développement de $(1+1)^n$.
- c) Quel est le nombre des sous-ensembles d'un ensemble comportant n éléments ?
40. Calculer :
- a) le terme en x^{20} dans le développement de $\left(x^5 - \frac{1}{x^2}\right)^{18}$.
 - b) le terme en $x^{21}y^9$ dans le développement de $\left(\frac{x}{y} - xy\right)^{21}$.
41. Pour tout entier naturel p , montrer que $2C_p^{3p+2} = C_{p+1}^{3p+2}$.

Exercices

42. On considère l'extrait ci-contre du triangle de Pascal.

Prouver que la propriété mise en évidence par les flèches est générale.



43. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la dérivée de x^n est nx^{n-1} .

Indication :

Il faut calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$ en développant $(x+h)^n$ par la formule de Newton.

44. Démontrer algébriquement la formule permettant la construction du triangle de Pascal :

$$C_p^n + C_{p+1}^n = C_{p+1}^{n+1}$$

45. Combien un village doit-il avoir d'habitants au minimum pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins ont les mêmes initiales (composées de deux lettres) ?
46. On a un lot de 7 pièces de rechange dont 4 sont bonnes et 3 sont défectueuses.
- Combien peut-on réaliser d'échantillons différents de 3 pièces ?
 - Combien, parmi ces échantillons, contiennent 3 pièces bonnes ?
 - Combien contiennent au moins une pièce bonne ?
47. Les 12 tomes d'une encyclopédie doivent être placés sur un rayon.
- Combien y a-t-il de manières de les classer ?
 - Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte, dans cet ordre ?

Exercices

48. Dans un certain gymnase, chaque classe doit nommer une délégation de trois élèves : un délégué, un suppléant du délégué et un nettoyeur du tableau noir. Une classe est composée de 11 filles et 3 garçons.

a) Combien y a-t-il de délégations possibles (compte tenu des fonctions) ?

Combien y a-t-il de délégations possibles...

- b) si le délégué et le suppléant doivent être de sexe différent ?
c) si le nettoyeur de tableau doit être un garçon ?
d) si les deux sexes doivent être présents dans la délégation ?

Exercices

61. On jette un dé. Quelle est la probabilité d'avoir :
- a) le numéro 2 ; b) un numéro pair ; c) un numéro supérieur à 4 ?
62. On tire une carte d'un jeu de 36 cartes. Quelles sont les probabilités des événements :
- a) tirer un as ; b) tirer un carreau ; c) tirer le valet de cœur ?
63. On jette simultanément un dé rouge et un dé blanc. Quelle est la probabilité d'amener :
- a) deux numéros égaux ; b) un 2 et un 5 ;
c) un 2 rouge et un 5 blanc ; d) une somme égale à 7 ;
e) une somme au plus égale à 3 ; f) une somme au moins égale à 10 ?
64. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un coeur en tirant deux cartes d'un jeu de 36 cartes ?
65. Lors d'une partie de bridge, les 52 cartes sont réparties entre les 4 joueurs. Quelle est la probabilité que le joueur A reçoive les 13 piques ?
66. Un club a 100 adhérents. Suite à un questionnaire, on a établi le tableau suivant :

	<i>Hommes</i>	<i>Femmes</i>
<i>Pratiquent un sport</i>	48	12
<i>Ne pratiquent pas de sport</i>	16	24

On choisit un adhérent au hasard.

- a) Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?
b) Quelle est la probabilité que cet adhérent (homme ou femme) ne pratique pas de sport ?
c) Quelle est la probabilité que ce soit un homme pratiquant un sport ?
d) Sachant que l'adhérent choisi est un homme, quelle est la probabilité qu'il pratique un sport ?
67. Cinq personnes, dont deux sont mari et femme, postulent pour un emploi. Trois postes sont disponibles. On suppose que, les cinq personnes étant également qualifiées, le choix se fait au hasard. Quelle est la probabilité que :
- a) le mari et la femme soient engagés ?
b) une seule des personnes de ce couple soit engagée ?

Exercices

68. Lors d'un synode groupant 500 personnes, 300 comprennent le latin, 200 l'italien, 90 l'anglais, 160 à la fois le latin et l'italien, 60 à la fois le latin et l'anglais, 40 à la fois l'italien et l'anglais et 20 les trois langues à la fois. Si l'on choisit une personne au hasard parmi celles qui participent au synode, quelle probabilité y a-t-il qu'elle comprenne :
- exactement deux de ces trois langues ?
 - l'une au moins de ces langues ?
69. Soit U l'ensemble des élèves du gymnase, A celui de élèves de première année, B celui de élèves de deuxième, C celui de élèves de troisième, F l'ensemble des filles et S l'ensemble des élèves de nationalité suisse. Décrire par des phrases les ensembles suivants :
- $(A \cup B) \cap F$
 - $F \cap \bar{S}$
 - $C \cap \bar{F} \cap S$
 - $(A \cup B) \cap S \cap F$
70. Soit U l'univers correspondant à trois jets successifs d'une pièces de monnaie ($U = \{ppp, ppf, pfp, \dots\}$, avec p pour "pile" et f pour "face").
On désigne par A l'événement "face apparaît exactement deux fois", par B l'événement "deux faces au moins apparaissent" et par C l'événement "face apparaît, mais seulement après le premier jet".
- Donner les éléments de A , B et C .
 - Décrire les événements $\bar{A} \cap B$; $\bar{A} \cap \bar{B}$; $A \cap C$.
71. Un connaisseur estime, lors d'un concours de beauté qui voit s'affronter en finale les candidates A , B et C , que A a autant de chances de gagner que B , mais deux fois plus de chances de gagner que C . Le jury ne peut désigner qu'une seule reine de beauté. Quelles sont, du point de vue de notre connaisseur, les probabilités de victoire de A , B et C ?
72. On propose à Pierre de lancer simultanément trois pièces de monnaie parfaitement symétriques de 10, 20 et 50 centimes. Il pourra conserver les pièces qui présentent le côté pile.
- Décrire l'univers. [Coder par exemple "pfp" l'événement "la pièce de 10 donne *pile*, celle de 20 *face* et celle de 50 *pile*].
 - Quelle probabilité a-t-il de gagner 20 centimes ? au moins 50 centimes ? plus de 20 centimes ?
73. Dans une localité, 47 % des habitants se déclarent adeptes de la religion X , mais 15 % seulement de la totalité des habitants pratiquent effectivement cette religion.
Quelle probabilité y a-t-il, en tirant au hasard un habitant de cette localité, de se trouver en présence d'un adepte non pratiquant de la religion X ?

Exercices

74. Dans une enquête portant sur les pannes de voitures qui se sont produites au cours d'une année, on a pris en considération, pour un type de voiture déterminé, les possibilités suivantes :

P_0 : il n'y a pas eu de panne

P_1 : il y a eu une panne

P_2 : il y a eu deux pannes

P_3 : il y a eu plus de deux pannes

Le dépouillement de l'enquête a montré que ces possibilités se sont produites respectivement 233, 310, 156 et 81 fois. Quelle probabilité y a-t-il, pour un possesseur d'une voiture de ce type de tomber en panne dans l'année qui vient

- a) au moins une fois ? b) moins de deux fois ?

75. On jette une pièce de monnaie 20 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir :

- a) 8 fois face ? b) 10 fois face ? c) moins de 4 fois face ? d) 9 à 11 fois face ?

80. Lors du jet d'un dé à 12 faces, on considère les événements suivants :

A : obtenir un nombre de points pair

B : obtenir un nombre de points impair

C : obtenir un nombre de points ≥ 7

D : obtenir un nombre de points ≤ 5

E : obtenir un nombre de points divisible par 3

F : obtenir un nombre de points divisible par 5

Peut-on appliquer la règle d'addition pour calculer les probabilités suivantes ? Si oui, le faire.

a) $p(A \cup B)$

b) $p(A \cup C)$

c) $p(E \cup F)$

d) $p(D \cup F)$

e) $p(C \cup D)$

f) $p(A \cup (B \cap E))$

81. Deux événements A et B d'un univers U sont tels que :

$$p(A \cap \bar{B}) = 0,3 \quad ; \quad p(A \cap B) = 0,1 \quad ; \quad p(B \cap \bar{A}) = 0,2$$

En s'aidant d'un diagramme de Venn et de la règle d'addition, calculer :

a) $p(A)$

b) $p(B)$

c) $p(\bar{A})$

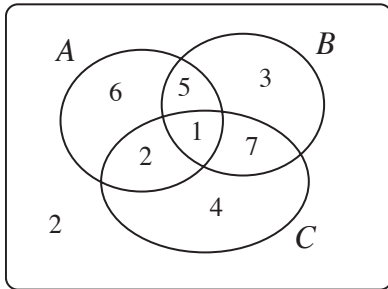
d) $p(A \cup B)$

e) $p(\bar{A} \cap \bar{B})$

f) $p(\bar{B})$

Exercices

82. Dans une classe de 30 élèves, on a recensé les participants à trois activités proposées en option : l'aviron (A), le basket (B) et le chant choral (C).



Les résultats apparaissent dans le schéma ci-contre. Calculer, avec et sans formule :

- a) $p(A \mid B)$ b) $p(A \mid C)$
- c) $p(B \mid A)$ d) $p(A \mid \bar{B})$
- e) $p(A \cap B \cap C \mid A \cap B)$
- f) $p(\bar{C} \mid A \cup B)$

83. Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes. On tire au hasard 3 boules simultanément. On admettra que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

- A : tirer 3 boules de la même couleur ;
- B : tirer une boule de chaque couleur ;
- C : tirer trois boules de deux couleurs différentes seulement ?

84. Une loterie de 60 billets comprend 3 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner exactement un lot en achetant 3 billets ?

85. Monsieur Billet ne se déplace jamais sans une carte de crédit (au moins). Il en possède deux, que nous désignerons respectivement par C_1 et C_2 . Considérons les événements :

- A : M. Billet est porteur de la carte C_1 seulement.
- B : M. Billet est porteur de la carte C_2 seulement.
- C : M. Billet est porteur des cartes C_1 et C_2 à la fois.

Sachant que $p(B) = 1/2$ et $p(C) = 1/6$, calculer la probabilité des événements suivants :

- D : $B \cup C$.
- E : M. Billet est porteur de la carte C_1 seulement.
- F : M. Billet est porteur de la carte C_1 .
- G : M. Billet est porteur d'une carte au moins.
- H : M. Billet est porteur d'une seule carte de crédit.

86. On donne deux événements A et B tels que $p(A) = \frac{3}{7}$, $p(B) = \frac{2}{7}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{7}$. Calculer les probabilités des événements suivants : $A \cup B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $A \cap \bar{B}$.

87. Est-il possible d'avoir deux événements A et B tels que $p(A) = 0,9$, $p(B) = 0,3$ et $p(A \cap B) = 0,1$?

Exercices

88. On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- a) 3 as ;
- b) 2 rois et une dame ;
- c) au moins un valet ?

89. Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges.

- a) On tire deux boules. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?
- b) On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne, puis on tire de nouveau une boule et on observe sa couleur. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient blanches ?

90. On tire 9 cartes d'un jeu de 36. Quelle est la probabilité que trois exactement de ces cartes soient des rois ?

91. On jette deux dés l'un après l'autre et on considère les événements :

- A : le total des dés est 8 ;
- B : les deux nombres sont différents ;
- C : le premier dé donne un chiffre impair.

Calculer : $p(A)$, $p(A|B)$, $p(A|C)$, $p(A|\bar{B})$, $p(A|\bar{C})$.

92. On dispose d'un jeu de 36 cartes. L'expérience consiste à tirer une carte. On définit les événements suivants :

- A : la carte tirée est un cœur ;
- B : la carte tirée est le valet de cœur ;
- C : la carte tirée est une figure de pique (roi, dame ou valet) ou un cœur.

Calculer : $p(B|A)$, $p(A|C)$, $p(B|C)$, $p(C|B)$.

100. On lance une pièce de monnaie truquée, telle que $p(\text{"face"}) = 2/3$. Si c'est "face" qui apparaît, on choisit au hasard un nombre entier compris entre 1 et 9, alors que si "pile" apparaît, on choisit au hasard un nombre entier compris entre 1 et 5. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercices

101. Un sac contient 10 jetons portant respectivement les lettres $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ et k . On tire successivement et sans remise trois jetons de ce sac. En utilisant un arbre, calculer la probabilité d'obtenir (resp. de n'obtenir) après les trois tirages :
- aucune voyelle.
 - une consonne aux deux premiers tirages.
 - au moins deux consonnes.
 - dans cet ordre : une consonne, une voyelle, une consonne.
 - une voyelle et une seule.
 - au moins une voyelle.
102. Trois boîtes A, B et C contiennent respectivement :
- A : 3 boules rouges et 5 noires
 B : 2 boules rouges et 1 noire
 C : 2 boules rouges et 3 noires
- On prend une boîte au hasard et on tire une boule.
- Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
 - Si la boule est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de A ?
103. On fait expérimentalement les constatations suivantes :
- Le temps qu'il fait dépend du temps qu'il a fait la veille, mais non de celui des jours précédents.
 - S'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est 0,8.
 - S'il fait mauvais un jour, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est 0,6.
- Sachant qu'il fait beau, calculer la probabilité :
- qu'il fasse beau les trois jours suivants.
 - qu'il fasse beau dans trois jours.
104. Madame Se-contente-de-peu est dans l'ensemble fort satisfaite de son mari. Un seul de ses défauts lui pèse pourtant : sa passion pour la PlayStation. La longue expérience de Madame lui a appris que si Monsieur y joue un certain un jour, il a deux chances sur trois qu'il en fasse de même le lendemain. Et même s'il laisse sa PlayStation en paix un jour donné, il y a une chance sur cinq qu'il succombe à sa passion le lendemain. Ce dimanche pourtant il ne s'est pas adonné à son jeu favori. Mais quelle probabilité y a-t-il qu'il joue à nouveau mardi ? mercredi ?
105. A l'examen pour l'obtention du permis de conduire il y a une épreuve théorique (code de la route) suivie d'une épreuve pratique (conduite) à laquelle on ne peut se présenter qu'après avoir réussi l'épreuve théorique. Sur 1000 candidats, 600 réussissent l'épreuve théorique et, parmi ces derniers, seuls 55 % réussissent l'épreuve pratique. Quelles sont les chances pour un candidat pris au hasard d'obtenir son permis de conduire ?

Exercices

106. Un test permettant de diagnostiquer le cancer a les propriétés suivantes :
- La probabilité qu'une personne ayant le cancer réagisse positivement au test est de 95 %.
 - La probabilité qu'une personne non cancéreuse réagisse négativement au test est également de 95 %.
- On sait d'autre part que, dans une certaine population, 0,5 % des individus ont le cancer.
- a) Si l'on effectue le test sur une personne choisie au hasard dans cette population, quelle est la probabilité que sa réaction soit positive ?
 - b) Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne ait effectivement le cancer ?
107. Les tables de mortalité de la population suisse pour les années 1978 à 1983, publiées par le Bureau Fédéral de Statistique, montrent que sur 100'000 garçons qui naissent, 92'152 sont encore en vie à 50 ans, et 66'419 sont encore en vie à 70 ans.
Quelle probabilité un homme de 50 ans a-t-il d'être encore en vie à 70 ans ?
108. Dans un sac se trouvent 9 boules blanches, 4 rouges et quelques noires. La probabilité, lors d'un tirage simultané de deux boules, d'obtenir deux boules de même couleur est égale à $\frac{7}{18}$. Combien y a-t-il de boules noires ?
109. Un étudiant doit subir un examen dont le programme comprend 10 sujets. Il n'en a appris que 5. Sachant que l'examineur lui posera 3 questions sur trois sujets différents, calculer :
- a) la probabilité que ces questions soient parmi les sujets qu'il a appris.
 - b) combien de sujets il aurait dû apprendre (au minimum) pour que cette probabilité soit au moins égale à 0,5.
110. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement :
- U_1 : 3 boules rouges et 2 boules vertes
 U_2 : 1 boule rouge et 1 boule verte
- On tire une boule de U_1 puis on met les boules restantes dans U_2 . On tire alors une boule de U_2 . Calculer la probabilité :
- a) que cette boule soit rouge.
 - b) que cette boule soit rouge, si l'on sait que la première boule tirée était rouge.
 - c) que la première boule tirée ait été rouge, si au second tirage on a une boule rouge.
111. On lance une pièce de monnaie bien équilibrée. Si l'on obtient face, on tire une bille d'une boîte B_1 contenant 3 billes rouges et 2 bleues. Sinon, on tire une bille d'une boîte B_2 contenant 2 billes rouges et 8 bleues. Sachant qu'on a tiré une bille rouge, calculer la probabilité qu'elle provienne de la boîte B_1 .

Exercices

112. On dispose de deux urnes. La première (A) contient 2 boules vertes, 3 rouges et 5 jaunes. La seconde (B) contient 5 boules vertes et 3 rouges. On procède à l'expérience suivante: un dé ayant été jeté, on tire une boule de l'urne A si le nombre de points du dé est inférieur à 3, une boule de l'urne B sinon. Calculer la probabilité :
- de tirer une boule verte.
 - de tirer une boule verte, sachant que le nombre de points obtenu est supérieur à 2.
 - d'avoir obtenu un nombre de points inférieur à 3 sachant que la boule tirée est rouge.
 - d'avoir obtenu un nombre de points supérieur à 2 sachant que la boule tirée est jaune.
113. La probabilité que trois tireurs atteignent une cible est $1/6$ pour le premier, $1/4$ pour le deuxième et $1/3$ pour le troisième. Quelle est la probabilité, lors d'un tir d'ensemble, que les trois atteignent la cible ? qu'au moins l'un des trois atteigne la cible ?
114. Marie a 15 amies, dont A et B, et elle désire en inviter six à un souper. Elle choisit au hasard les six invitées. Les événements « A est invitée » et « B est invitée » sont-ils indépendants ?
120. On jette un dé 20 fois de suite.
- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 8 fois le trois ?
 - Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 trois ?
121. Une pièce de monnaie truquée donne pile 3 fois sur 5 en moyenne.
Calculer la probabilité d'obtenir, en lançant cette pièce 10 fois:
- exactement 6 fois pile.
 - entre 5 et 7 fois pile.
122. On jette une pièce de monnaie 10 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir 4 fois pile ? 5 fois pile ? 6 fois pile ?
123. Calculer la probabilité, lorsqu'on jette une pièce de monnaie 20 fois de suite, que le nombre de faces soit compris entre 7 et 10 (7 et 10 inclus).
124. Dans une ville, 40 % des électeurs votent à gauche et 60 % à droite. Quelle probabilité y a-t-il que, sur 10 électeurs choisis au hasard, il y en ait 4 à 6 qui votent à gauche ?
125. 65 % des personnes en moyenne sont capables de rouler la langue, c'est-à-dire de remonter les marges vers le haut (il s'agit là d'un trait lié à l'hérédité).
Quelle probabilité y a-t-il dans une classe de 20 élèves
- de trouver moins de 3 élèves capables de rouler leur langue ?
 - d'en trouver 13 ?
 - d'en trouver un au moins qui soit incapable de rouler sa langue ?

Exercices

126. Le prince de Toscane demanda un jour à Galilée pourquoi, lorsqu'on jette trois dés, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces deux sommes soient obtenues chacune de six façons différentes. Répondez à la place de Galilée !
127. Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un 6 en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double 6 en lançant vingt-quatre fois deux dés ? (Problème posé en 1654 à Pascal par le Chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres à la cour de Louis XIV.)
128. Une pièce de monnaie dissymétrique présente en moyenne 5 fois le côté pile pour 4 fois le côté face. Quelle probabilité y a-t-il en lançant la pièce 6 fois de suite d'obtenir
- a) plus de piles que de faces ?
 - b) plus de faces que de piles ?
129. Dans une localité importante, 60 % de la population est séparatiste. On forme par tirage au sort un bureau électoral de cinq membres. Déterminer la probabilité pour que ce bureau comporte une minorité de séparatistes.
130. Une fabrique estime que le 5 % des appareils qu'elle livre devront subir un réglage complémentaire au moment de la mise en service. Quelle probabilité y a-t-il que, sur dix appareils vendus, il y ait plus de deux réglages à effectuer ?
131. Jean s'amuse à viser une quille avec une boule. L'expérience lui a appris qu'il renverse la quille 3 fois sur 10 en moyenne.
- a) Quelle probabilité a-t-il de renverser la quille 4 fois au moins en lançant la boule 7 fois ?
 - b) Combien de fois doit-il lancer la boule s'il veut avoir plus de 90 % de chances de renverser au moins une fois la quille ?
132. Un graphologue prétend être capable de distinguer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90 % des cas. On le soumet à un test en lui présentant 20 échantillons d'écriture.
- a) Dans le cas où son affirmation est fondée, quelle est la probabilité qu'il commette plus de 3 erreurs ?
 - b) S'il répond au hasard, quelle est la probabilité qu'il donne au moins 18 réponses correctes ?
133. Une loterie comporte 50 billets pour 6 prix. Quelle probabilité a-t-on en achetant 5 billets d'avoir un prix au moins ? Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à 0,9 d'avoir un prix au moins ?

Exercices

134. *Bruit dans un canal de transmission.* On considère un canal où circule une information, codée par des 0 et des 1. Par suite d'un bruit parasite (foudre, rayons cosmiques, manipulation d'un commutateur électrique, ...), l'émission d'un 0 peut être reçue comme un 1, et vice versa. Supposons que chaque signal est perturbé avec une probabilité égale à 0,2. On doit communiquer une information importante qui ne se compose que du signal "1". Pour protéger cette information contre le bruit, on transmet "11111" au lieu de "1". Le récepteur interprète ce signal en choisissant l'information majoritaire : s'il reçoit plus de 1 que de 0, il interprète ce signal comme un "1", sinon comme un "0". Quelle est la probabilité que le signal soit reçu correctement ?
135. On jette un dé à jouer 18 fois de suite.
- Quelle probabilité a-t-on d'amener exactement 3 fois le chiffre 1 ?
 - Combien de fois doit-on lancer le dé pour avoir plus de 99 chances sur 100 d'obtenir au moins une fois le chiffre 1 ?
136. On sait qu'en moyenne 1 % des vis produites par une fabrique sont défectueuses. La fabrique vend ses vis par paquets de 10, et elle garantit le remplacement de tout paquet dans lequel se trouverait plus d'une vis défectueuse. Quel pourcentage de paquets la fabrique doit-elle s'attendre à remplacer ?
137. Une maison d'édition s'occupe de la réalisation et de l'envoi d'une encyclopédie en cinq volumes. L'ordre des cinq volumes prévu par l'auteur est indiqué en attribuant à chacun d'eux une des lettres A , B , C , D , E . Lors de l'emballage pour expédition, on empile les cinq volumes. On fait l'hypothèse que les volumes sont empilés dans un ordre aléatoire.
- Quelle est la probabilité qu'un client reçoive son encyclopédie dans l'ordre alphabétique, avec le volume A au sommet de la pile ?
 - Quelle est la probabilité que le volume C soit à sa place (c'est-à-dire à la troisième depuis le haut de la pile) ?
 - Quelle est la probabilité que le volume C ou le volume D soient à leur place ?
 - Sachant que le volume A n'est pas à sa place, quelle est la probabilité que les volumes B et C le soient ?
 - Sachant que deux volumes seulement sont à leur place, quelle est la probabilité que ce soient les volumes A et B ?
- Aujourd'hui, le responsable des envois expédie 4 encyclopédies.
- Quelle est la probabilité que les quatre clients reçoivent leur encyclopédie dans le bon ordre (ordre alphabétique, A au sommet de la pile) ?
 - Montrer qu'il est presque certain que deux clients au moins ne reçoivent pas l'encyclopédie dans l'ordre.

Exercices

138. *Loi de Mendel.* On admet qu'un trait physique chez une personne (tel la couleur des yeux ou le fait d'être gaucher) est déterminé par une paire de gènes. Désignons par d le gène de la paire qui est dominant, et par r celui qui est récessif. Une personne portant les gènes dd ou rd manifeste le trait physique considéré ; une personne portant rr , non. Un enfant recevra un gène de chacun de ses parents. Si, pour un trait particulier, les deux parents sont du type rd , et s'ils ont 4 enfants, quelle est la probabilité que 3 de ceux-ci (exactement) manifestent le trait en question ? (On admettra que chaque enfant a autant de chances de recevoir chacun des deux gènes de chacun des parents.)

RÉPONSES

1. 720 ; 696 ; 2 ; 32'220 ; 15'887,5 ; 8,0025
2. 5040 ; 240
3. a) 360 b) 1296
4. 216 ; 72 ; 72 ; 36
5. 9000 ; 4500 ; 1800 ; 360 ; 4000 ; 3400
6. $1,034 \cdot 10^{23}$; $19,674 \cdot 10^{16}$ années ; $4,496 \cdot 10^{21}$; $1,566 \cdot 10^{20}$
7. 933'120
8. 3960
9. a) 2002 b) 82'598'880
10. a) 12650 b) 303'600
11. a) 45 b) 21 c) 25
12. 3780
13. a) 32 b) 1008 c) 175 616
14. 66
15. 1'048'576 / 20 / 4845 / 184'756 / 1
16. a) 38'760 b) 38'214
17. a) 6720 b) 40'320
18. 64 (y compris le signe "vide")
19. $\frac{n(n-3)}{2}$
20. 70
21. 658'008 ; 241'500 ; 484'380
22. 330
23. a) $1,53 \cdot 10^{11}$ b) $5,94 \cdot 10^{11}$ c) $8,98 \cdot 10^{10}$
24. a) $7,752 \cdot 10^{11}$ b) $4,6884 \cdot 10^{10}$
25. 2520
26. 280
27. 120 / 24 / 360 / 60 / 30 / 3'991'680
28. 34'650 ; 3780
29. 441 ; 21
30. 1254
31. 126 ; 210 ; 1080 ; 3666
32. 72
33. 56 ; 93 ; 128 ; 256
34. 7770
35. 216 résultats possibles ; 27 donnent la somme 10 ; 25 la somme 9
36. au moins un 6 en 4 lancers : 51,77 chances sur 100 ;
au moins un double 6 en 24 lancers : 49,14 chances sur 100

Réponses

37.
 1. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 2. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
 3. $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
 4. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
 5. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
 6. $-x^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32$
 7. $1 - 12x + 54x^2 - 108x^3 + 81x^4$
 8. $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$
 9. $81 - 216x + 216x^2 - 96x^3 + 16x^4$

38. $28a^6b^2 \div -126a^4b^5 \div 302526x^5 \div 2016x^4y^5$

39. c) 2^n 40. a) $43758x^{20}$ b) $-54264x^{21}y^9$

45. 677 habitants 46. a) 35 b) 4 c) 34

47. a) 479'001'600 b) 39'916'800 48. a) 2184 b) 792 c) 468 d) 1188

61. $\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ 62. $\frac{1}{9}; \frac{1}{4}; \frac{1}{36}$

63. $\frac{1}{6}; \frac{1}{18}; \frac{1}{36}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{6}$ 64. 0,3857

65. $1,575 \cdot 10^{-12}$ 66. 0,64 ; 0,40 ; 0,48 ; 0,75

67. $0.3; 0.6$

68. $0.4; 0.7$

69. a) ensemble des filles de 1^{re} et de 2^e b) ensemble des belles étrangères
c) ensemble des Suisses mâles de 3^e d) ensemble des Suissesses de 1^{re} et de 2^e

70. a) $A = \{ pff, fpf, ffp \}$ $B = \{ pff, fpf, ffp, fff \}$ $C = \{ pfp, pff, ppf \}$
 b) "3 faces apparaissent" / "au moins 2 piles" / "pile au 1^{er} jet, face aux suivants"

71. 0,4 ; 0,4 ; 0,2

72. a) $U = \{ppp, ppf, pfp, pff, fpp, fpf, ffp, fff\}$ b) $\frac{1}{8}; \frac{1}{2}; \frac{5}{8}$

73. 0,32 74. 0,701 ; 0,696

75. 0,1201 ; 0,1762 ; 0,0013 ; 0,4966

80. a) 1 b) $-$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-$ e) $\frac{11}{12}$ f) $\frac{2}{3}$

Réponses

81. a) 0,4 b) 0,3 c) 0,6 d) 0,6 e) 0,4 f) 0,7

82. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{14}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{7}{12}$

83. $\frac{5}{84}; \frac{2}{7}; \frac{55}{84}$

84. $\frac{1197}{8555} \cong 0,1399$

85. $\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1; \frac{5}{6}$

86. $\frac{4}{7}; \frac{4}{7}; \frac{5}{7}; \frac{1}{7}; \frac{2}{7}$

87. Non

88. $\frac{1}{1785}; \frac{2}{595}; \frac{109}{357}$

89. $\frac{5}{14}; \frac{25}{64}$

90. $\frac{36}{935} = 0,0385$

91. $\frac{5}{36}; \frac{2}{15}; \frac{1}{9}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}$

92. $\frac{1}{9}; \frac{3}{4}; \frac{1}{12}; 1$

100. 0,43

101. a) $\frac{7}{24}$ b) $\frac{7}{15}$ c) $\frac{49}{60}$ d) $\frac{7}{40}$ e) $\frac{21}{40}$ f) $\frac{17}{24}$

102. $\frac{173}{360}; \frac{45}{173}$

103. 0,512 ; 0,688

104. 0,293 ; 0,337

105. 0,33

106. a) 5,45 % b) 8,7 %

107. 0,72

108. 15

109. $\frac{1}{12}; 9$

110. $\frac{17}{30}; \frac{1}{2}; \frac{9}{17}$

111. $\frac{3}{4}$

112. $\frac{29}{60}; \frac{5}{8}; \frac{2}{7}; 0$

113. $\frac{1}{72}; \frac{7}{12}$

114. non

120. 0,00841 ; 0,8696

121. 0,25082 ; 0,66647

122. 0,205 ; 0,246 ; 0,205

123. 0,5304

124. 0,56296

125. $5,28 \cdot 10^{-7}$; 0,184401 ; 0,99982

Réponses

126. $p(\Sigma = 10) = 0,125$; $p(\Sigma = 9) = 0,11574$

127. $p_1 = 0,5177$; $p_2 = 0,4914$

128. 0,4528 ; 0,2462

129. 0,317

130. 0,0115

131. 0,126 ; 7 fois au moins

132. 0,13295 ; 0,000201

133. 0,487 ; au moins 16

134. 0,942

135. 0,245 ; au moins 26 fois

136. 0,4266%

137. a) $\frac{1}{120}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{7}{20}$ d) $\frac{1}{24}$ e) $\frac{1}{10}$ f) $5 \cdot 10^{-9}$ g) $p \cong 0,999997 \cong 1$

138. 0,4219