

Probabilités

Compléments MR

2014

TABLE DES MATIÈRES

Processus binomial	30
Processus multinomial	31
Variables aléatoires	32
Loi de probabilité pour une variable aléatoire discrète	33
Espérance	34
Variance, écart type	35
Variables aléatoires simultanées	36
Variables aléatoires indépendantes	37
Lemme sur les sommes doublement indicées	38
Espérance d'une somme	39
Espérance d'un produit	40
Variance d'une somme	41
Variable aléatoire binomiale	42
Espérance et variance d'une variable binomiale	43
Variables aléatoires continues	50
Densité de probabilité	51
Approximation de la loi binomiale par la loi normale	52
Le théorème central limite	53

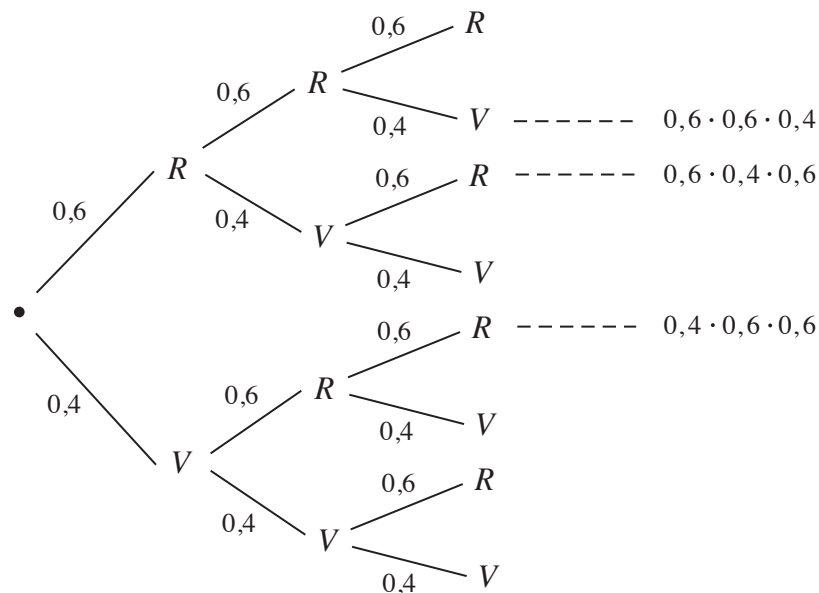
EXERCICES

§ 30. PROCESSUS BINOMIAL

Exemple préalable

Une urne contient 10 boules, dont 6 rouges et 4 vertes. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette "épreuve" trois fois de suite.

Quelle probabilité a-t-on, au cours de ces trois épreuves successives indépendantes, de tirer au total 2 boules rouges et 1 verte ? Solution :



$$\begin{aligned}
 p(\text{"obtenir } 2R \text{ et } 1V") &= \text{Somme des probabilités des chemins comportant } 2R \text{ et } 1V \\
 &= (\text{nombre de chemins comportant } 2R \text{ et } 1V) \cdot (0,6)^2 (0,4)^1 \\
 &= (\text{nombre de mots de 3 lettres, dont } 2R \text{ et } 1V) \cdot (0,6)^2 (0,4)^1 \\
 &= C_2^3 (0,6)^2 (0,4)^1.
 \end{aligned}$$

Si l'on effectue maintenant 20 tirages successifs, toujours "avec remise", et que l'on s'intéresse à la probabilité d'obtenir exactement 7 boules rouges, on aura :

$$\begin{aligned}
 p(\text{"obtenir } 7R \text{ et } 13V") &= \text{Somme des probabilités des chemins comportant } 7R \text{ et } 13V \\
 &= (\text{nombre de chemins comportant } 7R \text{ et } 13V) \cdot (0,6)^7 (0,4)^{13} \\
 &= (\text{nombre de mots de 20 lettres, dont } 7R \text{ et } 13V) \cdot (0,6)^7 (0,4)^{13} \\
 &= C_7^{20} (0,6)^7 (0,4)^{13}.
 \end{aligned}$$

Cas général

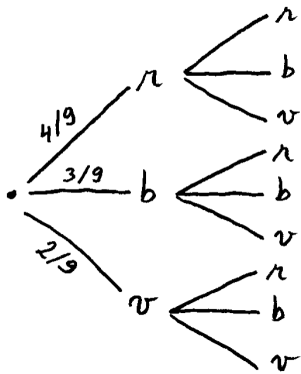
On effectue n épreuves successives indépendantes, avec chaque fois 2 issues possibles A et $\bar{A}$ ("succès" ou "échec"), de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Alors :

$$p(\text{"obtenir exactement } k \text{ fois } A") = C_k^n p^k q^{n-k}$$

§ 31. PROCESSUS MULTINOMIAL

Une urne contenant 9 boules : 4 rouges, 3 blanches, 2 vertes.

20 tirages successifs, avec remise :



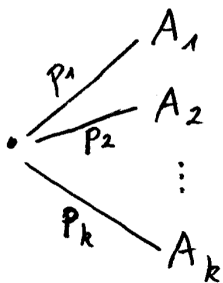
$P(\text{obtenir } 10 \text{ rouges, } 6 \text{ blanches, } 4 \text{ vertes})$

= somme des prob. des chemins
comportant 10 r, 6 b et 4 v

$$= \left(\text{nb. de chemins avec } 10r, 6b, 4v \right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^4$$

$$= \frac{20!}{10! 6! 4!} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^4.$$

Cas général



n épreuves successives indépendantes,
avec chaque fois k issues possibles
 $A_1, A_2, \dots, A_k$, de probabilités respectives
 $p_1, p_2, \dots, p_k$.

La probabilité d'obtenir n_1 fois A_1 , n_2 fois A_2 , ...,
 n_k fois A_k ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) est :

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$$

§ 32. VARIABLES ALÉATOIRES

Définition

Soit U l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle *variable aléatoire* toute fonction de U vers $\mathbb{R}$.

Exemples

- 1) On jette trois fois de suite une pièce de monnaie et l'on s'intéresse au nombre X de "face" obtenu. X peut être vu comme une fonction de $U = \{ ppp ; ppf ; pfp ; \dots ; fff \}$ vers $\mathbb{R} : X(ppp) = 0 ; X(ppf) = 1 ; X(ffp) = 2 ; X(fff) = 3 ; \text{etc.}$
- 2) Lors de la production en série de tubes néon d'un même modèle, on prélève au hasard un article de la production journalière et on mesure la durée Y de bon fonctionnement, en heures. La durée Y peut être considérée comme une fonction de $U = \text{ensemble des tubes produits pendant un jour}$ vers $\mathbb{R} : Y(\text{tube } 37) = 27,53 ; Y(\text{tube } 215) = 21,32 ; \text{etc.}$

Nous dirons qu'une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(U)$ des valeurs de X est *fini* ou *dénombrable* (cf. exemple 1 ci-dessus). La variable X sera dite **continue** dès que $X(U)$ contient un intervalle (cf. exemple 2 ci-dessus).

§ 33. LOI DE PROBABILITÉ POUR UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

La connaissance des valeurs possibles d'une variable aléatoire n'est de loin pas suffisante pour décrire une expérience aléatoire. Par exemple, lors d'un tir sur une cible déterminée, la variable donnant le nombre de points obtenus a les mêmes valeurs possibles quels que soient les tireurs, qui pourtant ne tirent pas tous de la même manière. Pour distinguer ceux-ci, il faut encore dire avec quelle probabilité chaque résultat peut être obtenu, ce qui revient à donner une *loi de probabilité* pour la variable considérée.

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète relative à un univers U , prenant les valeurs $X(U) = \{x_1; x_2; x_3; \dots\}$. On appelle *loi de probabilité* ou *distribution de probabilité* de X l'application $X(U) \rightarrow [0; 1]$ qui, à chaque valeur x_i , associe le réel p_i défini par :

$$p_i = p(X = x_i) = \text{probabilité que } X \text{ prenne la valeur } x_i$$

Exemple

Un jeu consiste à jeter 3 fois une pièce de monnaie asymétrique. On y gagne une somme (en francs) égale au nombre de "pile" obtenus. Nous allons déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X = \text{gain du joueur [en francs]}$, sachant que $p(\text{"pile"}) = 0,4$ et $p(\text{"face"}) = 0,6$.

Les valeurs possibles de X sont $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$.

Comme ces 3 jets successifs constituent un processus binomial, on peut calculer les " p_i " correspondants :

$$p_1 = p(X = 0) = (0,6)^3 = 0,216$$

$$p_2 = p(X = 1) = C_1^3 (0,4)^1 (0,6)^2 = 0,432$$

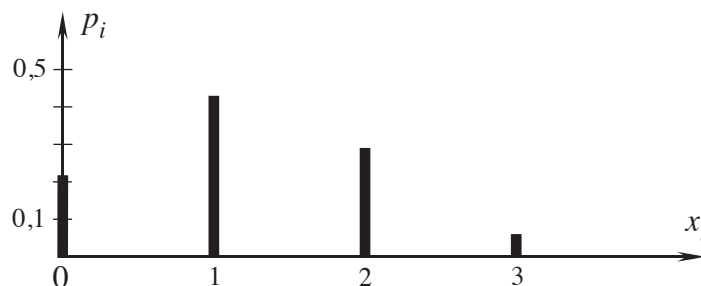
$$p_3 = p(X = 2) = C_2^3 (0,4)^2 (0,6)^1 = 0,288$$

$$p_4 = p(X = 3) = (0,4)^3 = 0,064$$

Un tableau du type " (x_i, p_i) " permet de résumer la situation :

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

On peut également visualiser la distribution de probabilité au moyen d'un *diagramme en bâtons* :



§ 34. ESPÉRANCE

Introduction

Considérons les variables aléatoires X et Y décrivant le nombre de points obtenus par deux tireurs visant une cible, et dont les lois sont données ci-dessous :

x_i	1	2	3
p_i	0,4	0,1	0,5

y_i	1	2	3
p_i	0,1	0,6	0,3

Lequel des tireurs est-il le meilleur ? Pour répondre à cette question, on introduit l'un des concepts les plus importants de la théorie des probabilités, celui d'espérance mathématique, qui correspond, dans notre exemple, à chercher la valeur moyenne d'un tir pour chaque tireur :

$$\bar{x} = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 = 2,1$$

$$\bar{y} = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,3 = 2,2$$

On en conclut que, sur une longue série de tirs, le second tireur sera le meilleur.

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète, prenant la valeur x_i avec la probabilité p_i ($i = 1, 2, \dots$).

On appelle **espérance** (ou *moyenne*) de X , et on note $E(X)$ ou μ , le nombre

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

L'espérance est un indicateur de *tendance centrale*.

Lorsque l'expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois, la moyenne des valeurs de X obtenues approche $E(X)$.

§ 35. VARIANCE, ÉCART TYPE

Les valeurs possibles $x_1, x_2, \dots$ d'une variable aléatoire X peuvent être plus ou moins dispersées autour de leur moyenne pondérée, l'espérance $\mu = E(X)$. Pour évaluer cette *dispersion* des valeurs, on utilise les indicateurs *variance* et *écart type* : la variance est l'espérance de l'écart quadratique $(X - \mu)^2$, et l'écart type est la racine carrée de la variance.

Définitions

Soit X une variable aléatoire discrète, prenant la valeur x_i avec la probabilité p_i ($i = 1, 2, \dots$), et soit μ son espérance.

On appelle *variance* de X , et on note $V(X)$, le nombre

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$$

On appelle *écart type* de X , et on note $S(X)$ ou σ , le nombre

$$S(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques

- 1) Plus la variance est petite, plus les valeurs prises par la variable aléatoire sont proches de l'espérance.
- 2) L'unité dans laquelle est exprimée l'écart type est la même que l'unité utilisée pour X . Ce n'est pas le cas pour la variance.

Théorème

La variance de la variable X est égale à l'espérance de X^2 , diminuée du carré de l'espérance de X :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \left(\sum_i x_i^2 p_i \right) - \mu^2$$

Preuve

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_i (x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) p_i = \sum_i x_i^2 p_i - \sum_i 2x_i\mu p_i + \sum_i \mu^2 p_i \\ &= \sum_i x_i^2 p_i - 2\mu \sum_i x_i p_i + \mu^2 \sum_i p_i = \sum_i x_i^2 p_i - 2\mu^2 + \mu^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \mu^2. \end{aligned}$$

§ 36. VARIABLES ALÉATOIRES SIMULTANÉES

Introduction

Jusqu'ici, nous avons considéré le comportement individuel de variables aléatoires. Nous allons maintenant nous consacrer à l'étude du comportement simultané de deux telles variables. En particulier, la notion d'indépendance stochastique de deux événements, qui joue un rôle si fondamental en calcul des probabilités, trouvera son équivalent en termes de variables aléatoires.

Que l'on puisse considérer, pour une même expérience, plusieurs variables aléatoires simultanément est assez naturel, comme le montrent les exemples suivants.

- Deux jets successifs d'un dé :
 X = nombre obtenu lors du premier jet ; Y = nombre obtenu lors du deuxième jet.
- Individu choisi au hasard dans une population :
 X = taille de l'individu ; Y = poids de l'individu.
- Inspection de soudures :
 X = résistance à l'arrachement ; Y = diamètre de la soudure

Loi de probabilité simultanée de deux variables aléatoires

Soit X et Y des variables aléatoires définies sur le même univers U , et prenant les valeurs $X(U) = \{x_1; x_2; \dots; x_m\}$ et $Y(U) = \{y_1; y_2; \dots; y_n\}$. On définit la probabilité du couple $(x_i; x_j)$ par $p((x_i; y_j)) = p(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$. La fonction $p: X(U) \times Y(U) \rightarrow [0; 1]$ ainsi définie est appelée *loi de probabilité simultanée* de X et Y . On la présente volontiers sous forme de tableau, en posant $p_{ij} = p(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$:

y_j	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	
x_i							p_i^X
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1n}	p_1^X
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2n}	p_2^X
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{in}	p_i^X
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mj}	$\dots$	p_{mn}	p_n^X
p_j^Y	p_1^Y	p_2^Y	$\dots$	p_j^Y	$\dots$	p_n^Y	

Remarques

- 1) $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$
- 2) $p_i^X = p(X = x_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij}$ et $p_j^Y = p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^m p_{ij}$
- 3) Les p_i^X et p_j^Y en marge du tableau (qui donnent les sommes par lignes ou par colonnes) s'appellent les *lois marginales*.

Exemple

On jette trois fois une pièce de monnaie. On désigne par X la variable aléatoire indiquant le nombre de "pile" obtenu, et par Y celle qui donne le nombre de "face" *après le premier jet*. En supposant que la pièce est bien équilibrée, la loi de probabilité simultanée est consignée dans le tableau suivant :

y_j	0	1	2	
x_i				p_i^X
0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
p_j^Y	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	

§ 37. VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et prenant les valeurs $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ et $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Intuitivement, X et Y seront dites indépendantes si les valeurs prises par l'une n'influencent pas les valeurs prises par l'autre. Rigoureusement :

X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\underline{p(X=x_i \text{ et } Y=y_j) = p(X=x_i) \cdot p(Y=y_j)}$$

$$\forall i \in \{1; 2; \dots; m\} \text{ et } j \in \{1; 2; \dots; n\}$$

On a donc, en se référant au paragraphe précédent :

$$p_{ij} = p_i^X \cdot p_j^Y$$

§ 38. LEMME SUR LES SOMMES DOUBLEMENT INDICÉES

Si (a_{ij}) est une famille de réels
doublement indexée par $i \in \{1; 2; \dots; m\}$
et $j \in \{1; 2; \dots; n\}$, alors :

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right) = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right)$$

Preuve

$\sum_j a_{ij}$ est la somme de la
 i -e ligne du tableau ci-contre.

Donc $\sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right)$ totalise les
 m sommes de chaque ligne,
et donne donc la somme
de tous les a_{ij} , notée $\sum_{i,j} a_{ij}$.

$i \backslash j$	1	2	...	n
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
m	a_{m1}	...		a_{mn}

Analogue pour montrer que $\sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right) = \sum_{i,j} a_{ij}$.

§ 39. ESPÉRANCE D'UNE SOMME

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers. Alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Preuve :

(x_i, p_i^x) et (y_j, p_j^y) étant les lois de X et Y , on peut écrire, en notant $p_{ij} = p(X=x_i \text{ et } Y=y_j)$:

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{i,j} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i,j} x_i p_{ij} + \sum_{i,j} y_j p_{ij} \\ &= \sum_i \left(\sum_j x_i p_{ij} \right) + \sum_j \left(\sum_i y_j p_{ij} \right) = \sum_i x_i \left(\sum_j p_{ij} \right) + \sum_j y_j \left(\sum_i p_{ij} \right) \\ &= \sum_i x_i p_i^x + \sum_j y_j p_j^y = E(X) + E(Y) . \end{aligned}$$

On généralise par récurrence :

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

§ 40. ESPÉRANCE D'UN PRODUIT

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers.

Si X et Y sont indépendantes,

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

Preuve:

Comme X et Y sont indépendantes, on a $p_{ij} = p_i^X \cdot p_j^Y$, $\forall i, j$. Ainsi :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i,j} x_i y_j p_i^X p_j^Y \\ &= \sum_j \left(\sum_i x_i y_j p_i^X p_j^Y \right) = \sum_j \left(y_j p_j^Y \sum_i x_i p_i^X \right) \\ &= \sum_j y_j p_j^Y E(X) = E(X) \cdot \sum_j y_j p_j^Y \\ &= E(X) \cdot E(Y) . \end{aligned}$$

Remarque

$E(X^2)$ n'est en général pas égal à $E^2(X)$, puisque $E(X^2) - E^2(X) = V(X)$.

§ 41. VARIANCE D'UNE SOMME

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers.

Si X et Y sont indépendantes,

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Preuve

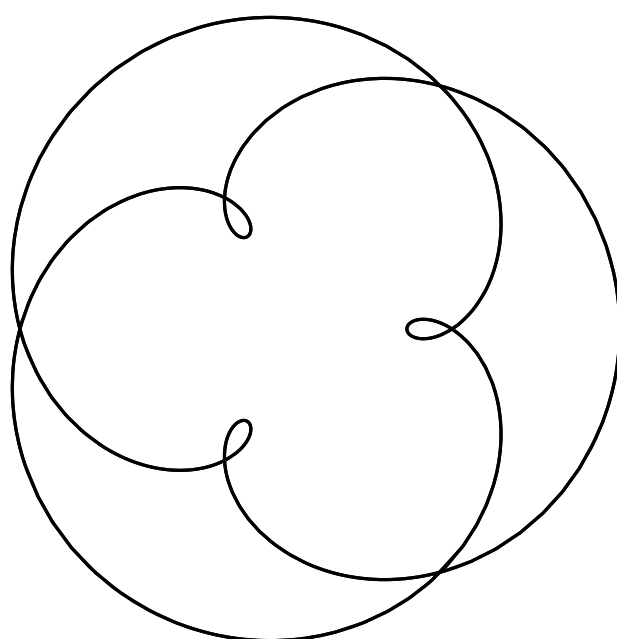
$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - E^2(X+Y) \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\ &= E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - E^2(X) - 2E(X)E(Y) - E^2(Y) \\ &= (E(X^2) - E^2(X)) + (E(Y^2) - E^2(Y)) + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \\ &= V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) \end{aligned}$$

Or, puisque X et Y sont indépendantes,
 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

Donc $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

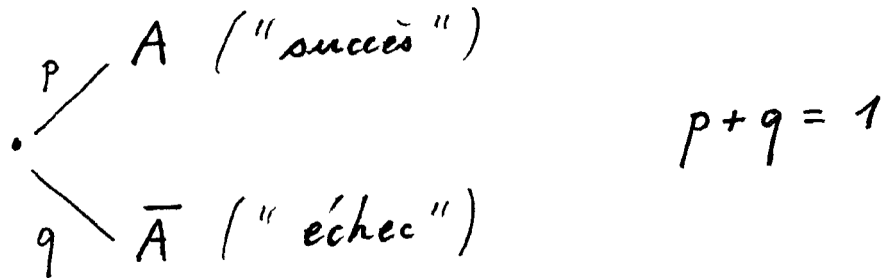
On peut encore généraliser au cas de
 n variables aléatoires indépendantes :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$



§ 42. VARIABLE ALÉATOIRE BINOMIALE

On répète n fois une "épreuve de Bernouilli" :

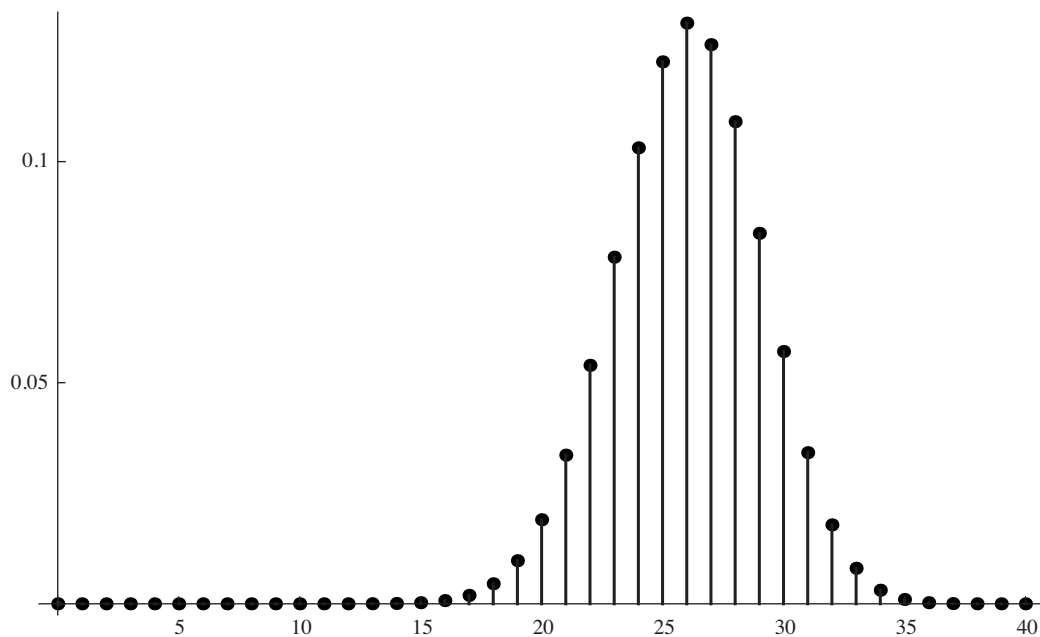


La variable aléatoire Z qui compte le nombre de "succès" obtenus lors de ces n épreuves est dite **variable binomiale de paramètres n et p** , ou **variable de type $B(n; p)$** .

On sait déjà que :

$$p(Z = k) = C_k^n p^k q^{n-k}$$

Voici par exemple la distribution d'une variable de type $B(40; 0,65)$:



§ 43. ESPÉRANCE ET VARIANCE D'UNE VARIABLE BINOMIALE

Théorème

Soit Z une *variable binomiale* de paramètres n et p , et soit $q = 1 - p$. Alors :

$$\begin{aligned} E(Z) &= np \\ V(Z) &= npq \end{aligned}$$

Preuve

Définissons n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ en posant :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\text{e}} \text{ épreuve donne "succès"} \\ 0 & \text{si la } i^{\text{e}} \text{ épreuve donne "échec"} \end{cases}$$

On a, pour tout i :

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p \quad \text{et}$$

$$V(X_i) = (1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq .$$

$$\text{Or } Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i .$$

D'où :

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np$$

De plus, les variables aléatoires X_i étant *indépendantes*, on obtient :

$$V(Z) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n pq = npq$$

§ 50. VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES – INTRODUCTION

- Var. aléatoire discrète X : les valeurs possibles de X forment un ensemble fini ou dénombrable : $\{x_1; x_2; x_3; \dots\}$.

La loi de prob. de X s'exprime au moyen d'un tableau du genre

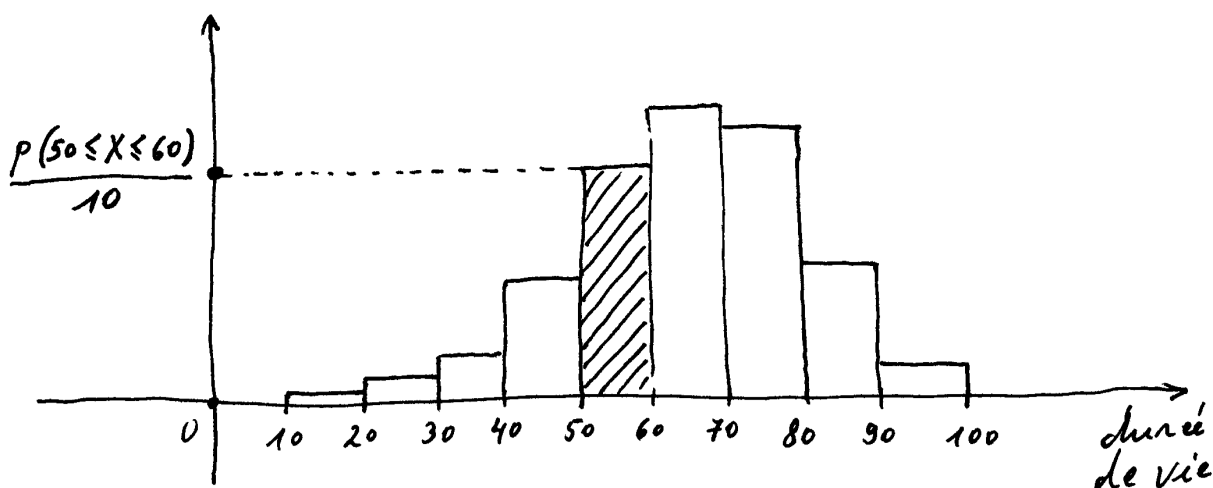
x_i	x_1	x_2	$\dots$
p_i	p_1	p_2	$\dots$

- Var. aléatoire continue X : les valeurs possibles de X couvrent au moins un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple : X = durée de vie d'une ampoule électrique, en heures.

X peut prendre toute valeur entre 0 h et 100 h.

Pour suppléer au tableau (x_i, p_i) , dressons l'histogramme suivant :



Remarques

1. $p(X=60) = 0$ (infinité de cas possibles)
2. $p(50 \leq X \leq 60) =$ aire hachurée ci-dessus.
3. $p(30 \leq X \leq 70) =$ aire de la partie de l'histogramme comprise entre les verticales d'abscisses 30 et 70.
4. Si f désigne la fonction en escalier qui enveloppe l'histogramme, on a :

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$
- $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f$
 $\forall a, b \in \mathbb{R} (a \leq b)$

§ 51. DENSITÉ DE PROBABILITÉ

On appelle densité de probabilité toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et telle que :

$$\begin{aligned} & \bullet \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ & \bullet \quad \int_{-\infty}^{\infty} f = 1 \end{aligned}$$

Une densité de probabilité f est dite attachée à la variable aléatoire X si, pour tout a, b dans $\mathbb{R}$ ($a \leq b$), on a :

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f$$

§ 52. APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE PAR LA LOI NORMALE

Soit Z une variable binomiale de paramètres n et p .

On sait que $E(Z) = np$ et $S(z) = \sqrt{npq}$, où $q = 1 - p$.

Théorème

Si np et nq sont assez grands (pratiquement : $np, nq \geq 5$), la variable binomiale Z obéit approximativement à la loi normale $N(\mu = np ; \sigma = \sqrt{npq})$, et la variable réduite

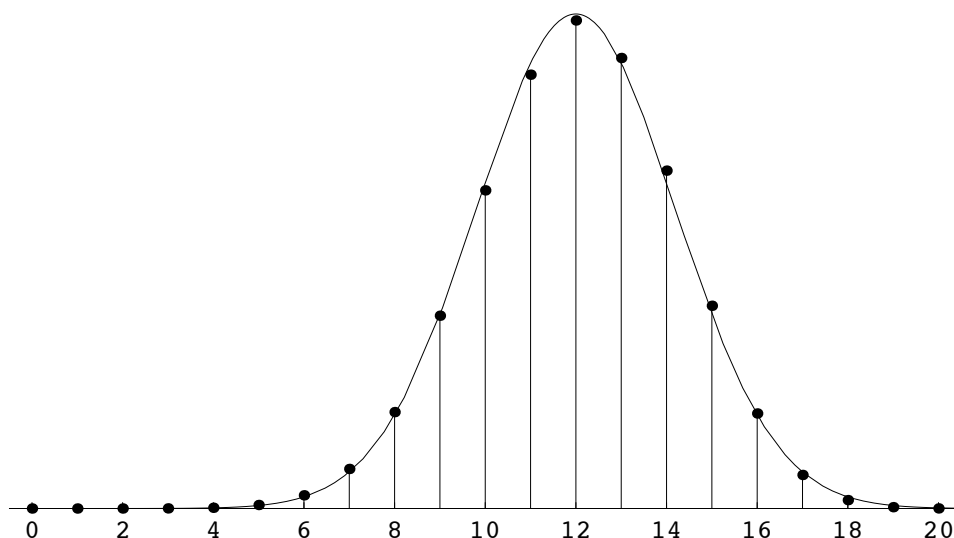
$Z^* = \frac{Z - \mu}{\sigma}$ obéit approximativement à la loi normale $N(0 ; 1)$.

Autrement dit :

Si $np, nq \geq 5$, et pour $a, b \in \mathbb{N}$, on peut calculer $p(a \leq Z \leq b)$ comme suit :

$$\begin{aligned} p(a \leq Z \leq b) & \stackrel{\substack{\text{correction de} \\ \text{continuité}}}{=} p\left(a - \frac{1}{2} \leq Z \leq b + \frac{1}{2}\right) = p\left(\frac{(a - \frac{1}{2}) - \mu}{\sigma} \leq Z^* \leq \frac{(b + \frac{1}{2}) - \mu}{\sigma}\right) \\ & \cong \Phi\left(\frac{(b + \frac{1}{2}) - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a - \frac{1}{2}) - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Comparaison graphique : (distributions binomiale et normale pour $n = 20$ et $p = 0,6$)



§ 53. LE THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Quelques rappels

Soit X et Y deux variables aléatoires, et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$S(aX + b) = |a| S(X)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Si de plus X et Y sont *indépendantes*,

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Conséquences

Soit n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ de même espérance μ et de même écart type σ . On considère la somme $T = \sum_{i=1}^n X_i$ de ces variables. Alors :

$$E(T) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n\mu$$

$$V(T) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = n\sigma^2$$

$$S(T) = \sigma\sqrt{n}$$

Théorème central limite (démontré en 1922)

Soit n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ obéissant à une même loi, d'espérance μ et d'écart type σ , et soit $T = \sum_{i=1}^n X_i$ la somme de ces variables. On sait que $E(T) = n\mu$ et que $S(T) = \sigma\sqrt{n}$. Alors, si n est assez grand (pratiquement : $n \geq 30$) :

$$T^* = \frac{T - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \text{ obéit approximativement à la loi normale } N(0 ; 1)$$

Exercices

- 140.** Une urne contient 8 boules blanches, 4 noires et 2 rouges. Un joueur extrait au hasard deux boules de l'urne. Il gagne 2 francs par boule noire extraite et il perd 1 franc par boule blanche extraite. Soit X la variable aléatoire indiquant le gain du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X .

Rép.

x_i	-2	-1	0	1	2	4
$91p_i$	28	16	1	32	8	6

- 141.** On lance 3 fois une pièce de monnaie telle que $p(\text{"face"}) = \frac{2}{3}$. Soit X le nombre de faces qui apparaissent. Calculer la loi de probabilité de X .

Rép.

x_i	0	1	2	3
$27p_i$	1	6	12	8

- 142.** 5 garçons et 5 filles sont soumis à un examen. On suppose que toutes les notes obtenues sont différentes, et que les $10!$ classements possibles de ces personnes sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire indiquant le rang de la fille la mieux classée parmi ces 10 personnes. Déterminer la loi de probabilité de X .

Rép.

x_i	1	2	3	4	5	6
$252p_i$	126	70	35	15	5	1

- 142 BIS.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire

- a) de l'exercice 140 b) de l'exercice 141 c) de l'exercice 142

Rép. a) 0 b) 2 c) $1,8\bar{3}$

- 143.** Dans le jeu "des deux doigts de Morra", deux joueurs montrent ensemble un ou deux doigts et doivent deviner simultanément le nombre de doigts que l'adversaire montre. Si l'un exactement des deux joueurs devine correctement le nombre de doigts indiqué par l'autre, il gagne une somme égale au nombre total de doigts montrés par les deux joueurs. Sinon, personne ne gagne.

- a) Si chaque joueur agit indépendamment de l'autre et si chaque joueur choisit au hasard le nombre de doigts qu'il montre et devine au hasard le nombre de doigts montrés par son adversaire, déterminer la loi de probabilité indiquant le gain de l'un des joueurs.
- b) Même question si les joueurs choisissent au hasard le nombre de doigts montrés, mais qu'ils choisissent comme nombre de doigts deviné le nombre de doigts qu'ils montrent.

Rép. a)

x_i	-4	-3	-2	0	2	3	4
$16p_i$	1	2	1	8	1	2	1

b)

x_i	0
p_i	1

Exercices

144. Une urne contient 10 boules, numérotées de 1 à 10. On extrait successivement, au hasard et sans remise, 3 boules de l'urne. Désignons par X la variable aléatoire qui donne le plus grand des trois nombres tirés.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X .
 b) Si l'on parie que, lors de l'un au moins des tirages, on obtient un nombre supérieur ou égal à 7, quelle est la probabilité de gagner le pari ?

Rép. a)

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
$120p_i$	1	3	6	10	15	21	28	36

 b) 0,833

145. Une urne contient 3 boules blanches, 2 noires et 5 rouges. On extrait successivement, au hasard et sans remise, 3 boules de l'urne. Supposons qu'on gagne 1 franc pour chaque boule blanche tirée, et que l'on perde 1 franc par boule noire tirée.

- a) Déterminer la loi de probabilité du gain X de la partie. Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?
 b) Calculer l'espérance et la variance de X .

Rép. a) $0,4\bar{3}$ b) $0,3$; $1,14\bar{3}$

146. Pour chacune des distributions suivantes, calculer :

$$p_1 = p(0 < X \leq 2), \quad p_2 = p((0 < X \leq 2) \mid (X \geq 0)), \quad E(X), \quad V(X).$$

1)

x_i	1	2	3
p_i	1/6	3/6	2/6

2)

x_i	-5	-3	-1	1
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1

3)

x_i	-1	0	1	3	5
p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Rép. 1) $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; $2,1\bar{6}$; $0,47\bar{2}$ 2) $0,1$; 1 ; $-2,8$; $3,56$ 3) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{116}{25}$

147. Soit X une variable aléatoire discrète de moyenne μ . Montrer que la variance de X , définie par

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$$

peut également s'écrire :

$$V(X) = \left(\sum_i x_i^2 p_i \right) - \mu^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

Exercices

147 BIS. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type des distributions suivantes (variance avec la formule ci-dessus !) :

a)

x_i	0	1	2	3
$27 p_i$	1	6	12	8

b)

x_i	-4	-3	-2	0	2	3	4
$16 p_i$	1	2	1	8	1	2	1

c)

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
$120 p_i$	1	3	6	10	15	21	28	36

Rép. a) 2 ; $0,\bar{6}$; 0,8165 b) 0 ; 4,75 ; 2,18 c) 8,25 ; 2,89 ; 1,699

148. Un dé est pipé de telle manière que la probabilité d'apparition d'un nombre déterminé de points est proportionnelle à ce nombre. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de points qui apparaissent lorsqu'on jette ce dé. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $S(X)$.

Rép. $\frac{13}{3}$; $2,\bar{2}$; 1,4907

149. Dans une tombola, on fait des paquets de dix billets ; chaque paquet contient trois billets gagnants. Quelqu'un décide d'acheter des billets d'un paquet de dix jusqu'à ce qu'il obtienne un billet gagnant. Combien de billets peut-il s'attendre à acheter ? Rép. 2,75

150. M. Probst adore les promenades dans la nature. Pour sortir de ville, il doit emprunter l'une des trois lignes de bus qui passent devant son domicile. N'ayant guère de préférence pour une direction plutôt qu'une autre, il prend le premier bus qui se présente. Un jour, sa femme lui fait remarquer qu'il doit certainement préférer deux des trois directions qu'il emprunterait respectivement deux à trois fois plus souvent que la troisième. M. Probst lui fait alors remarquer que c'est impossible, argumentant qu'il circule exactement un bus toutes les six minutes dans chacune des directions. Madame Probst maintient cependant fermement son point de vue. Peut-on les croire tous les deux ?

Indication : Introduire la variable aléatoire $X = \text{numéro du bus qu'il prend}$, et supposer, par exemple, que le bus (2) passe toujours 3 minutes après le (1), et le bus (3) une minute après le (2).

Exercices

151. Un club de football doit rencontrer successivement trois adversaires. On estime ses chances de gagner respectivement à 60%, 20%, 40% et ses chances de faire match nul respectivement à 20%, 30%, 40%. Un match gagné rapporte 2 points, un match nul 1 point et un match perdu 0 point.

- 1) Quel nombre de points peut-on "espérer" :
a) pour chaque match ? b) pour les 3 matches ?
- 2) Quelle probabilité y a-t-il que le club récolte au total trois points au moins ?
- 3) Quelle probabilité y a-t-il que le club récolte au total trois points au moins si l'on sait qu'il a perdu son premier match ?
- 4) Quelle probabilité y a-t-il que le club ait perdu son premier match si l'on sait qu'il a obtenu au total trois points au moins ?

Rép. 1a) 1,4 / 0,7 / 1,2 1b) 3,3 2) 0,724 3) 0,28 4) 0,07735

152. On vous propose le jeu suivant :

Pour pouvoir jouer il faut d'abord verser un franc. Puis on jette deux dés simultanément. Si l'un des dés au moins présente un nombre de points impair, on ne gagne rien. Si les dés présentent deux nombres de points pairs distincts, on gagne un franc. Enfin, si les dés présentent le même nombre pair de points, on gagne une somme égale au total des points des deux dés.

Ce jeu vous paraît-il avantageux ?

Rép. On perd en moyenne 17 c. par partie

153. Une urne contient deux boules blanches et deux boules noires. Un joueur tire une boule après l'autre, sans remise. Pour chaque boule blanche tirée, il reçoit un franc ; et pour chaque boule noire tirée, il doit payer un franc. Il peut arrêter le jeu à chaque instant. Soit Y le nombre de boules blanches tirées et Z le nombre de boules noires tirées. On envisage trois stratégies :

- 1) On arrête lorsque toutes les boules sont tirées.
- 2) On arrête si $Y > Z$ ou si $Y = Z = 2$.
- 3) On arrête si $Y = 2$.

Dans chaque cas, calculer le gain moyen et la variance.

Rép. 1) 0 ; 0 2) $0,6$; $0,2$ 3) $0,6$; $0,5$

Exercices

154. Une urne contient une boule rouge et neuf boules noires. On tire une boule de l'urne. Si elle est rouge, l'épreuve est terminée. Sinon, on remet la boule dans l'urne et on recommence l'épreuve jusqu'à ce que la boule rouge sorte. Soit X la variable aléatoire indiquant le numéro du tirage lors duquel cette boule rouge est sortie (X = "temps d'attente" de la première boule rouge).

- a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
- b) Quelles sont les probabilités correspondantes ?
- c) Vérifier que la somme de ces probabilités est égale à 1.
- d) Calculer le nombre moyen de tirages nécessaires.

Indications :

Pour c), on rappelle que lorsque $|x| < 1$, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$.

Pour d), utiliser la formule $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$ ($|x| < 1$), obtenue en dérivant la série précédente.

Rép. a) $\mathbb{N}^*$ b) $p(X = k) = 0,1 \cdot (0,9)^{k-1}$ d) $E(X) = 10$

155. Soit X une variable aléatoire discrète et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que:

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= aE(X) + b \\ V(aX + b) &= a^2 V(X) \\ S(aX + b) &= |a| S(X) \end{aligned}$$

156. Calculer l'espérance et l'écart type des distributions binomiales suivantes :

- 1) $B(18; \frac{1}{3})$ 2) $B(100; \frac{1}{10})$ 3) $B(150; 0,6)$ 4) $B(10000; 0,5)$

Rép. 1) 6 ; 2 2) 10 ; 3 3) 90 ; 6 4) 5000 ; 50

157. Une distribution binomiale a pour moyenne 60 et pour variance 20. Déterminer n et p .

Rép. $n = 90$; $p = \frac{2}{3}$

158. Une urne contient des boules rouges et des boules noires au nombre total de 10. On sait que si l'on tire deux boules de l'urne (avec remise), on a une probabilité de 0,48 que l'une des boules soit rouge (et l'autre noire). Combien y a-t-il de boules rouges dans l'urne ?

Rép. 4 ou 6

Exercices

- 159.** Un garagiste loue des voitures sans conducteur, pour une journée seulement, à un prix qui lui laisse un bénéfice de 120 francs par véhicule loué et par jour. Il dispose actuellement de deux véhicules, mais chacun d'eux est, en moyenne, immobilisé un jour sur cinq et cela de façon aléatoire. On admet que ces probabilités sont invariables. On admet d'autre part que le nombre de clients désirant louer une voiture est une variable aléatoire C dont la loi est donnée par :

$$p(C = 0) = 0,1 \quad p(C = 1) = 0,3 \quad p(C = 2) = 0,4 \quad p(C = 3) = 0,2$$

Cette loi de demande reste invariable au cours du temps.

- 1) Soit D le nombre de voitures disponibles au cours d'une journée et L celui des voitures louées. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires D et L .
- 2) Calculer l'espérance de L , puis le bénéfice moyen réalisé quotidiennement.
- 3) On envisage l'achat d'une troisième voiture destinée à la location. Avec celle-ci, le bénéfice par jour et par véhicule ne serait plus que de 100 francs. Evaluer l'opportunité d'un tel achat.

Rép. 2) 1,248 ; 149,76 fr. 3) Bénéfice moyen : 153,28 fr.

- 160.** Deux individus se sont mis d'accord sur le jeu suivant :

On jette un dé deux fois de suite. Si le premier jet a donné un nombre de points inférieur au second, on fait le total des points et on attribue le résultat au joueur A . Sinon, on fait la différence des points des deux dés, on élève au carré et on attribue le résultat à B .

- a) Montrer que ce jeu est équitable. Combien de points échoit-il en moyenne à chaque joueur ? *Rép.* $2,91\bar{6}$
- b) Montrer que si le jeu est répété et les points de chaque joueur totalisés, le nombre de points de A progresse plus régulièrement que celui de B . Pour quelle raison ?

- 161.** Un homme a cinq clés semblables dont une seule ouvre son appartement. Comme il ne reconnaît pas la bonne clé, il essaie au hasard en éliminant les clés qui n'ont pas ouvert la porte. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre d'essais qu'il a dû faire.

- a) Calculer $E(X)$ et $S(X)$.
- b) Qu'en serait-il s'il n'éliminait pas les clés ?

Rép. a) 3 ; $\sqrt{2}$ b) 5 ; $\sqrt{20}$

Exercices

- 162.** Le nombre de lettres que reçoivent chaque jour les trois locataires d'une maison familiale est donné par les variables aléatoires suivantes :

X_1	p_1
0	0,7
1	0,2
2	0,1

X_2	p_2
0	0,2
1	0,4
2	0,3
3	0,1

X_3	p_3
0	0,4
1	0,4
2	0,2

On admettra que ces variables aléatoires sont indépendantes. Soit T la variable aléatoire donnant le nombre total de lettres que le facteur distribue chaque jour dans cette maison.

- Calculer $E(T)$ et $S(T)$.
- Calculer $p(T = 3)$.
- Calculer la probabilité, sachant que le facteur a trois lettres à distribuer dans la maison, que le premier locataire reçoive une lettre au moins.

Rép. a) 2,5 ; 1,345 b) 0,256 c) 0,34375

- 163.** Un camion transporte régulièrement 3 sortes de matériaux sur un trajet déterminé. Sa charge X (en tonnes) a la distribution suivante :

x_i	1	5	8
p_i	0,3	0,2	0,5

L'usure des pneus (en mm/année) est proportionnelle au carré de la charge, selon la formule $Y = 1,5 X^2$. Quelle est la distribution de Y ?

Calculer la charge moyenne et l'usure annuelle moyenne. Peut-on calculer cette dernière en fonction de celle-là ?

Rép. $E(X) = 5,3$; $E(Y) = 55,95$ / non, mais $E(Y) = 1,5 E(X^2) = 1,5 (V(X) + E^2(X))$

- 164.** On tire simultanément deux jetons d'un sac qui en contient quatre, numérotés 0, 1, 2 et 3. Soit X le plus petit et Y le plus grand des numéros tirés.

- Quelle est la distribution du couple (X, Y) ? (Tableau à deux dimensions des p_{ij} .)
- En déduire les distributions de X et de Y .
- Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Rép. c) $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{9}$ d) non

Exercices

165. Une urne contient 10 boules semblables. Six d'entre elles sont marquées de la lettre *A*, trois de la lettre *B* et une de la lettre *C*. On effectue 20 tirages aléatoires successifs d'une boule de cette urne, en remettant chaque fois dans l'urne la boule extraite. Calculer :

- a) la probabilité d'obtenir 4 boules marquées de la lettre *A*.
- b) la probabilité d'obtenir au moins 2 boules marquées *B*.
- c) l'espérance et la variance du nombre *X* de boules *A* tirées, celles du nombre *Y* de boules *B* tirées et celles du nombre *Z* de boules *C* tirées.
- d) l'espérance et la variance de la variable $X + Y + Z$.

Rép. a) 0,00027 b) 0,9924 c) X : 12 et 4,8 ; Y : 6 et 4,2 ; Z : 2 et 1,8
d) 20 et ...

166. M. Épiney est le talentueux mais exigeant directeur du chœur mixte de Ladièse. Il tient par exemple une statistique exacte des absences aux répétitions. C'est surtout le registre des ténors qui lui fait souci. Ils ne sont que 5 et voici, pour 12 répétitions, le nombre de leurs absences :

M. Rémi Fasollaz	4
M. Octave Just	3
M. Valérien Lacroche	3
M. Léon Corplain	5
M. Carr Deton	6

Calculer le nombre de ténors dont M. Épiney dispose en moyenne pour chaque répétition ainsi que l'écart type. On admettra que les absences de ces personnes sont indépendantes les unes des autres.

Rép. 3,25 et 1,044

Exercices

- 200.** Un arrêt de bus est desservi toutes les 10 minutes. Soit X la variable aléatoire indiquant le temps d'attente (en minutes) jusqu'au passage du prochain convoi lorsqu'on se rend à cet arrêt sans tenir compte de l'horaire. Déterminer la fonction densité de probabilité attachée à X , puis calculer au moyen d'une intégrale $p(6 \leq X \leq 10)$.

Rép. $f(x) = \frac{1}{10}$ si $0 \leq X \leq 10$, et 0 sinon / $p(6 \leq X \leq 10) = \frac{2}{5}$

- 201.** Désignons par X la variable aléatoire donnant la "durée de vie" d'un certain modèle de voiture (exprimée en années). On a pu déterminer que la densité de probabilité de X est la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,2 e^{-0,2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculer la probabilité que la voiture ait une durée de vie

- a) comprise entre 2 et 6 ans ;
- b) inférieure à 2 ans ;
- c) supérieure à 10 ans.

Rép. a) 0,369 b) 0,330 c) 0,135

- 202.** Soit X une variable aléatoire continue de densité f et de moyenne μ . Montrer que la variance de X , définie par

$$V(X) = E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

peut également s'écrire :

$$V(X) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \right) - \mu^2 = E(X^2) - E^2(X)$$