

PL

10. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

- | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------------------------|
| 1) $x - y \leq 8$ | 2) $x \geq -2$ | 3) $3x + 2y \geq 7$ |
| 4) $x - 15 > y - 14$ | 5) $y \leq 5$ | 6) $(x + 3)(x - 5) \leq y + x^2$ |
| 7) $-3 \leq x \leq 4$ | 8) $1 \leq y \leq 5$ | 9) $0 \leq x < 7$ |

11. Représenter graphiquement les solutions des systèmes suivants.

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} y + 1 < 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} 2x + 3y > 0 \\ x - 2y + 1 \leq 0 \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} x - y - 3 < 0 \\ 2x - y > 0 \\ x - 5y < 3 \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} x + 2y \geq 3 \\ x - 2y \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases}$ |

12. Une entreprise fabrique des automobiles et des camions dans une usine divisée en deux ateliers : l'atelier A où s'effectue le travail d'assemblage et de montage et l'atelier B où s'accomplissent toutes les opérations de finissage. L'atelier A emploie 5 journées de travail par camion et 2 par automobile. L'atelier B emploie 3 journées de travail indifféremment pour l'un ou pour l'autre. En raison de limitations de personnel et de machines, l'atelier A peut disposer au maximum de 180 journées de travail par semaine et l'atelier B de 135.

- 1) Si le fabricant fait un profit de 3000 fr par camion et de 2000 fr par automobile, combien doit-il produire de véhicules de chaque type pour maximiser son profit ?
- 2) Et si les profits respectifs étaient de 4000 fr et 1000 fr ?
- 3) Et s'ils étaient tous deux de 2000 fr ?

Rép.

- 1) 15 voitures et 30 camions pour un bénéfice max. de 120'000 fr
- 2) 36 camions et aucune voiture pour un bénéfice max. de 144'000 fr
- 3) 15 voitures et 30 camions et pour un bénéfice max. de 90'000 fr
45 voitures et aucun camion pour un bénéfice max. de 90'000 fr
 x ($15 \leq x \leq 45$) voitures et $45 - x$ camions pour un bénéfice max. de 90 000 fr

PL

13. Une chaîne de montage automobile permet de monter deux types de voiture, la "standard" et la "luxe" d'après les conditions suivantes :

	Standard	Luxe
Capacité maximum par jour de la chaîne de montage	500 voitures	300 voitures
Nombre d'heures de travail par voiture	24 h	48 h
Prix de revient par voiture sans main-d'œuvre	5000 fr	6500 fr
Bénéfice réalisé par voiture	10 000 fr	30 000 fr

Calculer le nombre de voitures de chaque type qu'il faut monter par jour afin de réaliser un bénéfice maximal, sachant que 19 200 heures de travail sont disponibles chaque jour et que l'investissement ne doit pas dépasser 3 250 000 fr.

Rép. 200 voitures Standard et 300 voitures Luxe par jour pour un bénéfice max. de 11'000'000 fr

14. Résoudre par la méthode de Gauss-Jordan :

$$1) \begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 3x + y = 18 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - y - z = -6 \\ x + 2y - 4z = -5 \\ -x + y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ -x + 4y = -4 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 5x - 2y + 3z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + 2z - t = 6 \\ y + 4z + 2t = 5 \\ -x + 2y + z = 4 \\ 2y - 2z + t = 3 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x + 5y - z = 3 \\ 5x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

Rép. 1) $(5; 3)$ 2) $(-1; 2; 2)$ 3) $\frac{1}{13}(32; -5)$
 4) $(5; 1; -6)$ 5) $(3; 3; 1; -1)$ 6) $(\frac{8}{7} - \frac{3}{7}k; k; -\frac{5}{7} + \frac{29}{7}k)$

15. Une petite usine fabrique des savonnettes de deux modèles : pour le ménage (M) et de luxe (L). La cuve de fabrication du mélange, pour des raisons mécaniques et de rendement, peut, en un jour, préparer une quantité de produit correspondant à au moins 100, mais au plus 1500 savonnettes M, ou à au moins 80, mais au plus 1200 savonnettes L. La demande de savonnettes est au plus de 1400 pour le modèle M, au plus de 320 pour le modèle L. La machine, unique, à former puis à emballer les savonnettes peut en débiter au maximum 1520 par jour. On gagne 0,40 fr par savonnette M et 1 fr par savonnette L. Quel bénéfice journalier maximum cette usine peut-elle faire et comment ?

Rép. 1200 savonnettes de ménage et 320 savonnettes de luxe par jour, pour un bénéfice maximum de 800 fr

PL

16. Résoudre par la méthode du simplexe :

a) Maximiser $z = 3x_1 + 2x_2 + 15x_3$ sous contraintes
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 18 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

b) Maximiser $z = 6x_1 + 9x_2$ sous contraintes
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 28 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 22 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

c) Maximiser $z = 3x_1 + 2x_2$ sous contraintes
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rép. a) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{18}{5}$; $z = 54$
c) $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{5}{3}$; $z = \frac{22}{3}$

b) $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 0$; $z = 66$

17. Un artisan fabrique deux modèles de lampes, un modèle de style traditionnel et un modèle de style futuriste. Pour chacune des lampes qu'il fabrique il doit utiliser deux machines, M1 et M2. Dans le cas d'une lampe de style traditionnel, il doit mettre 2 heures de travail sur la machine M1 et 4 heures sur la machine M2. Pour une lampe de style futuriste, il doit mettre 3 heures de travail sur la machine M1 et 2 heures sur la machine M2. Les machines ne peuvent fonctionner plus de 16 heures par jour. L'artisan connaît bien le marché et il sait qu'il vendra toutes les lampes qu'il peut fabriquer, en réalisant un profit de 5 fr sur chaque lampe de style traditionnel et un profit de 4 fr sur chaque lampe de style futuriste. Trouver le nombre de lampes de style traditionnel et le nombre de lampes de style futuriste que cet artisan devrait fabriquer chaque jour s'il veut maximiser son profit.

Rép. 2 lampes de style traditionnel et 4 lampes de style futuriste pour un bénéfice maximum quotidien de 26 fr

18. Résoudre par la méthode du simplexe :

a) Minimiser $z = 2x_1 - 3x_2 + x_3$ sous contraintes
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

b) Minimiser $z = x_1 - 5x_2 + x_3$ sous contraintes
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Rép. a) $x_1 = 0, x_2 = 25, x_3 = 15$; $z = -60$

b) $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{5}, x_3 = 0$; $z = -4$

PL

19. Résoudre par la méthode du simplexe :

a) Minimiser $z = -80x_1 - 60x_2 + 120$ sous contraintes
$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,32x_2 \leq 0,25 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) Maximiser $z = 10x_1 + 11x_2$ sous contraintes
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 150 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ 6x_1 + x_2 \leq 175 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rép. a) $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{32}$; $z = \frac{245}{8} = 30,625$ b) $x_1 = \frac{500}{21}, x_2 = \frac{225}{7}$; $z = \frac{1775}{3}$

20. Résoudre graphiquement le problème suivant :

Jean est un champion cycliste qui prépare son entraînement en vue d'une importante compétition. Son entraînement doit se composer chaque semaine d'un certain nombre d'heures de travail en salle et d'un certain nombre d'heures de travail sur route. Au total, il doit s'entraîner au moins 20 heures chaque semaine et son nombre d'heures de travail sur route doit être au moins égal au tiers du nombre d'heures de travail en salle. Pour s'entraîner en salle, il recourt aux services d'un entraîneur spécialisé qui lui coûte 10 fr l'heure ; cependant, cet entraîneur n'est disponible que s'il est engagé pour au moins 10 heures par semaine. Pour s'entraîner sur route, il engage un autre spécialiste qui lui coûte 12 fr l'heure ; ce spécialiste ne peut être disponible pour plus de 15 heures par semaine. Comment Jean doit-il planifier sa semaine d'entraînement pour que cela lui coûte le moins cher possible ?

Rép. 15 h en salle et 5 h sur route ; 210 fr par semaine

21. Résoudre les programmes linéaires suivants (méthode à deux phases) :

a)
$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \max z = -2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rép. a) $x_1 = 0, x_2 = 12$; $z = 12$ b) $x_1 = 2, x_2 = 0$; $z = -4$

22. Maximiser $z = x_1 + x_2$ sous contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rép. $x_1 = 4, x_2 = 3$; $z = 7$

PL

23. Maximiser $z = 3x_1 + 2x_2$ sous contraintes :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rép. $x_1 = 2, x_2 = 1 ; z = 8$

24. Minimiser $z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$ sous contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Rép. $x_1 = \frac{20}{3}, x_2 = \frac{5}{9}, x_3 = 0 ; z = \frac{125}{3}$

25. Maximiser $z = 80x_1 + 60x_2$ sous contraintes :

$$\begin{cases} 20x_1 + 32x_2 \leq 25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rép. $x_1 = 1, x_2 = 0 ; z = 80$

26. Dans une usine de boissons, on fabrique du Coca, du Fanta et du Sprite. Le Coca représente au moins la moitié de la demande totale, le Sprite le tiers de la demande de Fanta au plus. Quotidiennement, l'usine produit 30 000 bouteilles, dont au moins 3000 de Sprite. Quel bénéfice maximum peut-on faire chaque jour si l'on gagne 0,20 fr par bouteille de Coca, 0,25 fr pour le Fanta et 0,35 fr pour le Sprite ?

Rép. Bénéfice journalier maximal de 7125 fr en produisant 15'000 b. de Coca, 11'250 b. de Fanta, et 3750 b. de Sprite

27. Dans sa basse-cour, un fermier garde 600 volatiles : oies, canards et poules. Il veut avoir au moins 20 canards et 20 oies, mais pas plus de 100 canards, ni plus de 80 oies, ni plus de 140 des deux. Acheter et élever une poule coûte 3 fr un canard 6 fr et une oie 8 fr ; ils peuvent être vendus 8 fr, 13 fr et 20 fr respectivement. Comment ce fermier peut-il réaliser un bénéfice maximal ?

Rép. Bénéfice maximal de 3680 fr en vendant 80 oies, 60 canards et 460 poules

PL

28. Deux fournisseurs A et B doivent livrer une certaine marchandise à trois clients I, II et III. Le client I a besoin de 24 unités de marchandise, le client II de 36 unités, le client III de 12 unités. Le fournisseur A livre 50 unités, le fournisseur B 22 unités. Les coûts de transport de la marchandise du fournisseur au client sont donnés dans le tableau suivant, en centaines de francs par unité :

	I	II	III
A	2	2	3
B	3	1	5

Trouver un plan de livraison minimisant le coût du transport.

Rép. Coût minimum : 13'400 fr, A livrant 24, 14 et 12 unités à I, II et III, et B livrant resp. 0, 22 et 0 unités.

29. Minimiser $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4$ sous contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1000 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 \geq 1500 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Rép. $z = \frac{2300}{13}$ en $(0 ; \frac{5500}{13} ; 0 ; \frac{2000}{13})$

30. Un épicier prépare une commande de tablettes de chocolat, qui doit se faire par cartons entiers de 24 plaques chacun, toutes d'une même sorte pour un carton donné. Connaissant les goûts de sa clientèle, l'épicier se dit qu'il doit commander au moins 10 cartons de chocolat noir, mais pas plus de 60, au moins 20 cartons de chocolat aux noisettes, au plus 50 cartons de chocolat au lait ; enfin la commande de chocolat aux noisettes ne doit pas dépasser le double de celle de chocolat au lait. Pour chaque plaque vendue, il gagne 25 c. avec le chocolat noir, 30 c. avec le chocolat aux noisettes et 20 c. avec le chocolat au lait. Il veut commander 100 cartons en tout. Quelle commande doit-il passer pour réaliser un bénéfice maximum ?

Rép. 10 cartons de chocolat noir, 60 de chocolat aux noisettes et 30 de chocolat au lait. Bénéfice maximal : 636 fr

31. a) Minimiser $z = 2x_1 - x_2 + 4x_3$ sous contraintes :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq -7 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Prouver que le domaine réalisable n'est pas borné.

Rép. $z_{\min} = -\infty$

PL

32. Maximiser $z = x_1 + 9x_2 + x_3$ sous contraintes :
- $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Rép. $z = \frac{81}{2}$ en $(0; \frac{9}{2}; 0)$

33. Une entreprise pharmaceutique a le choix de produire 4 sortes de médicaments pour soigner le mal de reins. La fabrication de chaque médicament donne un profit, mais produit aussi des déchets toxiques dans des pourcentages dépendant de la quantité fabriquée. Le tableau ci-dessous donne la quantité en kg de déchet toxique T_i produit par la fabrication de 100 kg du médicament M_j . Il donne également le profit en francs par kg du médicament M_j .

	M_1	M_2	M_3	M_4
T_1	20	20	10	40
T_2	10	30	20	0
T_3	20	40	30	10
Profit	15	60	4	20

Les réglementations en vigueur limitent la production maximale des déchets toxiques T_1 , T_2 et T_3 à 21, 6 et 14 kg respectivement par semaine. Calculer les productions par semaine de chaque médicament de façon à respecter les restrictions tout en maximisant le profit.

Rép. Profit hebdomadaire maximal de 2050 fr pour resp. 0, 20, 0, $\frac{85}{2}$ kg de médicaments.

34. Maximiser $z = 2x_1 + x_2$ sous contraintes :
- $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

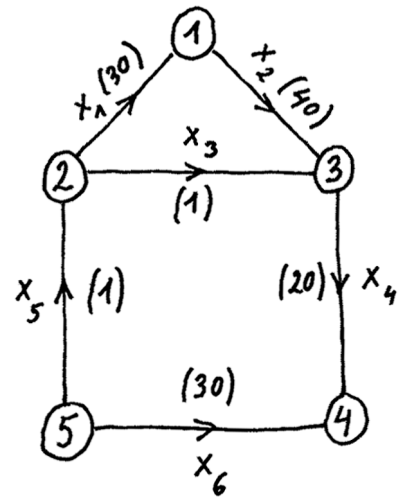
Rép. $w_{\min} = 1$, DR = $\emptyset$, pas de solution réalisable

35. Minimiser $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ sous contraintes :
- $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_3 \leq 5 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 = 7 \\ 8x_1 + 9x_3 \geq 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Rép. $z = \frac{7}{5}$ en $(\frac{7}{5}; 0; 0)$

PL

36. Dans le graphe représenté ci-contre, les sommets 1 et 5 sont des sources d'énergie. La source 1 produit 10 Megajoules par seconde, la source 5 en produit 4 par seconde. Les sommets 3 et 4 sont des destinataires qui consomment respectivement 3 et 11 Megajoules par seconde. Les autres sommets ne sont que des lieux de transfert. Les x_i mesurent la quantité d'énergie qui circule d'un sommet à l'autre. Les nombres entre parenthèses sont les coûts unitaires de transfert de l'énergie. Déterminer un plan de transfert qui minimise les coûts, les contraintes étant qu'en chaque sommet « le bilan énergétique est nul » :



$$\begin{aligned} & \text{Energie produite} + \text{Energie entrante} \\ &= \text{Energie consommée} + \text{Energie sortante} \end{aligned}$$

Rép. $z = 628$ en $(0 ; 10 ; 4 ; 11 ; 4 ; 0)$

37. Maximiser $z = 2,3x_1 + 2,15x_2 - 13,55x_3 - 0,4x_4$ sous contraintes :

$$\begin{cases} -7,8x_1 - 1,4x_2 + 7,8x_3 + 0,4x_4 \leq 0 \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 - 1,4x_3 - 0,2x_4 \leq 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

(S'il y a un problème... permutez les deux contraintes et recommencez.)

Rép. $z_{\max} = +\infty$