

Programmation linéaire

Claude BREZINSKI

2014

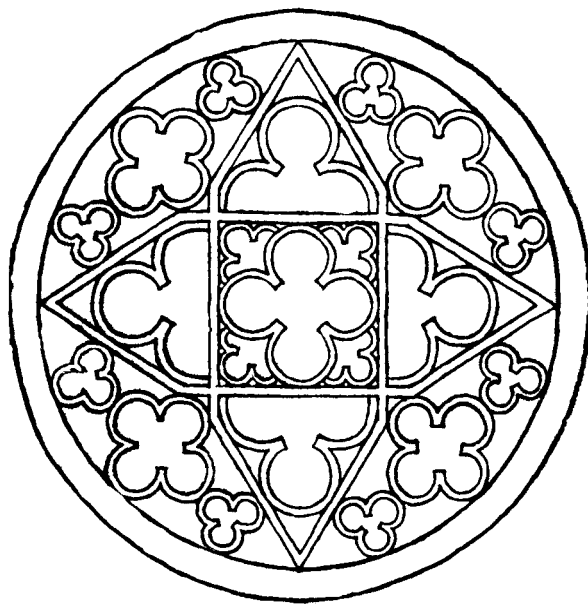
TABLE DES MATIÈRES

1	Présentation générale	1
2	Introduction à la programmation linéaire	3
2.1	Vocabulaire et premiers résultats	3
2.2	La modélisation	8
2.2.1	Exemple 1	8
2.2.2	Exemple 2	9
2.2.3	Exemple 3	10
2.2.4	Exemple 4	12
2.2.5	Exemple 5	13
2.2.6	Exemple 6	14
2.2.7	Exercice	15
3	Solution graphique et algorithme du simplexe	17
3.1	Solution graphique	17
3.2	Le tableau du simplexe	20
3.3	L'algorithme du simplexe	21
3.4	Exemples	24
3.4.1	Exemple 1	24
3.4.2	Exemple 2	29
3.4.3	Exemple 3	30
3.4.4	Exemple 4	32
3.4.5	Exemple 5	33
3.4.6	Exercice	34
3.5	Détermination du sommet initial	34
3.5.1	Exemple 1	36
3.5.2	Exemple 2	38
3.5.3	Exercice 1	41
3.5.4	Exercice 2	41
4	Présentation théorique de l'algorithme du simplexe	43
4.1	Formalisation de l'algorithme du simplexe	43
4.2	Définitions, notations et résultats préliminaires	45
4.3	Description de l'algorithme du simplexe	48
4.4	Autres définitions et résultats	48
4.5	Une étape de l'algorithme	49
4.5.1	Passage d'un sommet au suivant	49

Algorithme du simplexe, marche à suivre : page 26

Méthode à deux phases : page 35

Discussion : page 50



Chapitre 1

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

La *programmation linéaire* est une méthode mathématique qui permet de trouver la solution optimale de certains problèmes. Elle est utilisée, en particulier, dans l'industrie et dans la planification économique.

Historiquement, la programmation linéaire a été développée et utilisée en 1947 par George Bernard Dantzig, Marshall Wood et leurs collaborateurs au U.S. Department of the Air Force. Dantzig [1] a raconté comment il avait été amené à la découverte de la méthode du simplexe. Ne pouvant trouver cet algorithme, il exposa à John von Neumann (1903–1957) en quoi consistait la programmation linéaire. Immédiatement, von Neumann se mit au tableau et lui en fournit une théorie mathématique complète. Devant son ébahissement, il expliqua alors à Dantzig qu'il venait d'écrire avec Oskar Morgenstern (1902–1976) un livre sur la théorie des jeux (*Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton, 1944) et, qu'en l'entendant, il avait immédiatement vu que les deux problèmes étaient équivalents. La théorie qu'il venait de lui présenter au tableau n'était que la transposition de son propre travail dans le langage de Dantzig. Mais, naturellement, tout le monde n'est pas John von Neumann !

Les premières applications se situaient dans le domaine militaire mais elles se sont rapidement déplacées vers l'industrie. De nos jours, la programmation linéaire est utilisée dans les problèmes d'allocation de ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés. Afin d'illustrer l'importance de ce domaine, signalons que le Prix Nobel d'Économie a été attribué en 1975 au russe Leonid V. Kantorovich (1912–1986) et à l'américain Tjalling C. Koopmans (1910–1985) pour leur "contribution à la théorie de l'allocation optimale de ressources".

Kantorovich a montré comment la programmation linéaire pouvait être utilisée pour améliorer la planification économique en URSS. Koopmans a développé sa théorie de la programmation linéaire en planifiant de façon optimale le mouvement des navires dans l'Atlantique durant la seconde guerre mondiale. On trouvera des notes historiques dans [20, pp. 209–225].

Le terme de *programmation linéaire* a été introduit en même temps que la méthode du simplexe. Les personnes qui s'intéressaient à différents problèmes d'optimisation dans les années 1945–1955 utilisaient le terme de *programmation* assorti de divers adjectifs : convexe, dynamique, linéaire, etc. Ce mot est donc devenu un synonyme d'*optimisation*. L'étude des problèmes généraux d'optimisation était intitulée *programmation mathématique*. On ne pouvait pas parler de *programmation* sans y ajouter un adjectif car, simultanément, la programmation des ordinateurs se développait. On utilise maintenant ce mot dans ces deux sens, le contexte permettant facilement de faire la distinction.

Sur l'historique de la programmation mathématique, voir [13].

La programmation linéaire se rencontre fréquemment dans des questions de planification et elle est très largement utilisée dans tous les secteurs économiques, ce qui en explique l'importance. Voici une liste non exhaustive d'applications

Pétrole :	distribution, allocation de ressources, mélanges, marketing.
Chimie :	allocation de ressources, mélanges.
Production :	allocation de ressources.
Transport :	emplacement des dépôts, problèmes d'horaires, répartition des véhicules.
Transport aérien :	répartition des équipages, optimisation des horaires.
Finance :	gestion de portefeuilles d'actions, minimisation du coût des intérêts, comptabilité générale.
Agriculture :	gestion des sols, mélange des engrais et des aliments, distribution quotidienne des produits, prix de vente.
Santé :	gestion des personnels hospitaliers.
Énergie :	programmation des générateurs et distribution.
Papier :	allocation de ressources, mélanges.
Publicité :	répartition des budgets sur les différents media.
etc.	

Un site web intéressant concernant la programmation linéaire est
<http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/linear-programming-faq.html>

Le Chapitre 2 est une introduction à la programmation linéaire. Les premières définitions y sont formulées et on y expose comment modéliser un problème concret. Dans la Chapitre 3, on commence par expliquer comment un programme linéaire peut être résolu graphiquement. On montre ensuite comment passer de cette résolution graphique à une résolution algébrique ce qui ouvre la voie à la méthode et à l'algorithme du simplexe. Ses règles essentielles sont peu à peu dégagées sur des exemples. Elles sont ensuite formalisées par étapes afin d'arriver jusqu'à la présentation théorique de l'algorithme du simplexe qui fait l'objet du Chapitre 4. Le concept de dualité est ensuite abordé dans le Chapitre 5. Tous les chapitres sont illustrés par de nombreux exemples et ainsi que par des exercices. Des exercices supplémentaires sont proposés à la sagacité du lecteur dans le Chapitre 6. Le Chapitre 7 est un appendice où sont d'abord présentées les méthodes de Gauss et de Gauss-Jordan pour résoudre un système d'équations linéaires. Une bonne compréhension de ces méthodes est utile à celle de l'algorithme du simplexe. Des rappels d'algèbre matricielle sont donnés ainsi que certaines notions sur la complexité des calculs matriciels. Une bibliographie, volontairement restreinte et choisie, complète le volume ainsi qu'un index.

Chapitre 2

INTRODUCTION À LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

Nous allons commencer par dire ce qu'est un problème de programmation linéaire et par donner un certain nombre de définitions et de résultats préliminaires. Ensuite, nous montrerons, sur des exemples, comment modéliser des problèmes concrets.

2.1 Vocabulaire et premiers résultats

Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ connus, avec $m \leq n$.

On cherche le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} \min_x f(x) = (c, x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

La fonction f s'appelle la *fonction objectif* et le problème (2.1) s'appelle un problème de *programmation linéaire* ou, plus simplement, un *programme linéaire*. Les conditions $Ax = b$ et $x \geq 0$ s'appellent les *contraintes*. Lorsque les contraintes sont des égalités, on dit que le programme linéaire est présenté sous sa *forme standard*. Nous verrons plus loin comment se ramener à cette forme standard si les contraintes sont des inégalités, ce qui est en général le cas.

Soient $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ et $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$; rappelons que le nombre (u, v) défini par

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

s'appelle le *produit scalaire* des vecteurs u et v . Naturellement $(u, v) = (v, u)$. Le produit scalaire est linéaire par rapport à chacun de ses arguments (on dit qu'il est *bilinéaire*), c'est-à-dire que $(u + w, v) = (u, v) + (w, v)$ et une propriété similaire si le vecteur w est ajouté à v . Si α est un nombre, on a $(\alpha u, v) = (u, \alpha v) = \alpha(u, v)$.

Remarque 2.1

Certains problèmes se présentent sous la forme de la minimisation simultanée de plusieurs fonctions objectifs. De tels problèmes peuvent ne pas avoir de solution optimale et il faut alors trouver une solution qui offre un bon compromis entre les différents objectifs.

Un programme linéaire peut aussi consister à maximiser la fonction objectif au lieu d'en rechercher le minimum. En effet, en économie, on cherche à minimiser

un coût ou à maximiser un profit. On passe d'un cas à l'autre en changeant le signe des coefficients c_i , c'est-à-dire en maximisant $-f$. Nous considérerons donc indifféremment ces deux cas de figure.

L'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $Ax = b$ s'appelle une *variété affine*. Son intersection avec l'ensemble des $x \geq 0$ est un ensemble convexe (c'est-à-dire que tout segment joignant deux de ses points est entièrement inclus dans cet ensemble) appelé *polytope convexe*. S'il est borné, on lui donne le nom de *polyèdre convexe*. On le désignera par U dans la suite. Cet ensemble est convexe parce que chaque contrainte délimite un demi-espace et que ce polyèdre est l'intersection de tous ces demi-plans. Le polyèdre U s'appelle la *région réalisable*. Lorsque les contraintes sont des inégalités, pour savoir de quel côté de chaque demi-plan se situe la région réalisable U , il suffit de choisir un point quelconque (par exemple, l'origine) et de voir s'il vérifie ou non la contrainte considérée.

Chacun des points de la région réalisable s'appelle une *solution réalisable*. Parmi toutes ces solutions, il en existe au moins une qui minimise la fonction objectif f : c'est la *solution optimale* de notre problème de programmation linéaire. On appelle *sommet* tout point $x \in U$ qui n'est pas combinaison linéaire convexe d'autres points de U , c'est-à-dire qu'il n'existe pas $u, v \in U$ et des nombres positifs λ et μ tels que ce sommet s'écrive $\lambda u + \mu v$. En dimension 2, exactement deux segments se rencontrent en un sommet. En dimension 3, exactement trois demi-plans se rencontrent en un sommet. En dimension supérieure à 3, il est possible qu'un plus grand nombre de plans s'y rencontrent. On démontre que le nombre de sommets de U est, au plus, de

$$\sum_{i=1}^m \frac{n!}{(n-i)!i!}.$$

Donnons un tableau de ces valeurs ($m \leq n$)

$m \backslash n$	5	10	50	100
3	25	175	20875	166750
5	31	637	2369935	79375495
10		1023	$1.3433 \cdot 10^{10}$	$1.9415 \cdot 10^{13}$
50			$1.1259 \cdot 10^{15}$	$6.8427 \cdot 10^{29}$

Comme nous le verrons plus loin, la solution optimale d'un programme linéaire se situe toujours en l'un des sommets de la région réalisable U . On voit, d'après le tableau précédent, qu'il est hors de question de calculer systématiquement la valeur de la fonction objectif en chacun des sommets pour rechercher la solution optimale. L'algorithme du simplexe, dont l'étude fait l'objet de ce fascicule, consiste en une stratégie astucieuse pour passer d'un sommet au sommet suivant en essayant d'en explorer le moins possible. Il est possible de construire des exemples (heureusement le plus souvent académiques) où l'on a besoin d'analyser 2^{n-1} sommets. Cependant, dans la plupart des cas réels, l'algorithme du simplexe se révèle remarquablement efficace et requiert, en moyenne, l'exploration de l'ordre de $3m/2$ sommets (n est en général proportionnel à m).

Signalons que les logiciels actuels sont capables de traiter des problèmes ayant plusieurs dizaines de milliers (voire centaines de milliers) de variables. Des algorithmes parallèles pourront alors être nécessaires [4]. Des programmes linéaires avec quelques centaines de milliers de variables sont maintenant considérés comme petits. Pour un guide sur les logiciels existants, voir [16].

Fixons tout de suite les idées par un exemple de programme linéaire

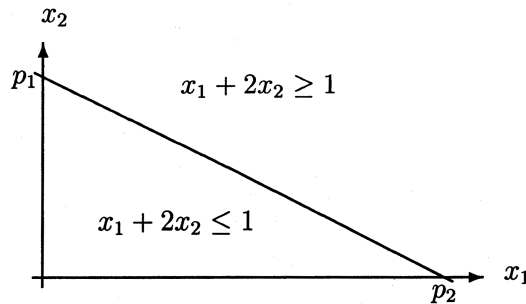
$$\begin{cases} \min_x f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La variété affine satisfaisant $Ax = b$ est la droite d'équation $x_1 + 2x_2 = 1$. Le polytope convexe obtenu par intersection de cette variété avec l'ensemble des $x \geq 0$ est le segment joignant les points $p_1 = (0, 1/2)$ et $p_2 = (1, 0)$. Ce polytope est bien un polyèdre convexe ; c'est la région réalisable U . Si $f(x) = x_1 + 2x_2$, tout point compris sur le segment de droite joignant p_1 et p_2 est solution optimale puisque tous les points de ce segment vérifient la contrainte $x_1 + 2x_2 = 1$. Si l'expression de f est différente, il nous faut rechercher x_1 et x_2 qui minimisent f tout en satisfaisant la contrainte. Si, par exemple, $f(x) = x_1 + x_2$, on a, pour que la contrainte $x_1 + 2x_2 = 1$ soit satisfaite,

$$f(x) = x_1 + x_2 = (1 - 2x_2) + x_2 = 1 - x_2.$$

Or, lorsque l'on passe du point p_2 au point p_1 , la variable x_2 passe de 0 à $1/2$ et f varie entre $1 - 0 = 1$ et $1 - 1/2 = 1/2$. Le point qui minimise f correspond donc à $x_2 = 1/2$, c'est-à-dire que le point p_1 est solution optimale. On a $f(p_1) = 1/2$ et $f(p_2) = 1$.

La Figure suivante correspond à cet exemple



Si $m = n$ et si la matrice A est régulière, le système $Ax = b$ détermine complètement la solution x et la contrainte $x \geq 0$ ne joue pas de rôle fondamental ; en effet, si $A^{-1}b \geq 0$, on a obtenu la solution optimale alors que, si $A^{-1}b < 0$, le problème n'a pas de solution. Lorsque $m \neq n$, on supposera que toutes les équations de ce système sont linéairement indépendantes (c'est-à-dire qu'aucune équation n'est combinaison linéaire d'autres équations du système). Dans le cas contraire, on commencera par supprimer celles qui ne le sont pas. Donc, A est de rang m (c'est-à-dire que m colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes) et $m \leq n$ car, dans le cas contraire, le système $Ax = b$ n'admet aucune solution. Par conséquent, le système $Ax = b$ possède $n - m$ degrés de liberté, c'est-à-dire que l'on peut déterminer m variables si l'on connaît les $n - m$ autres. Cependant, il est important de bien comprendre qu'un programme linéaire peut ne pas avoir de solution soit parce qu'aucun point n'est réalisable, c'est-à-dire ne satisfait les contraintes, soit parce que f n'est pas bornée inférieurement dans la région réalisable. De plus, la solution d'un problème de programmation linéaire n'est pas toujours unique et il peut même y en avoir une infinité.

En un sommet, au moins $n - m$ parmi les variables sont nulles (c'est bien les cas des sommets p_1 et p_2 de l'exemple précédent).

Il nous faut maintenant trouver la solution optimale du programme linéaire. On démontre, en fait, qu'aucun point intérieur à la région réalisable U ne peut être solution du programme linéaire et que la solution optimale se situe toujours en l'un de ses sommets. Cette propriété est facile à comprendre en raisonnant sur un exemple avec $n = 2$. Soit a un nombre réel. L'équation $c_1x_1 + c_2x_2 = a$ est représentée par une droite dont tous les points fournissent la même valeur a pour la fonction objectif. En particulier, la droite correspondant à $a = 0$ passe par l'origine $x_1 = x_2 = 0$. En cette origine, la fonction objectif vaut zéro. Pour modifier la valeur de a il faut donc s'éloigner de l'origine. Cependant, les droites correspondant à des valeurs différentes de a ont toutes la même pente et sont donc toutes parallèles les unes aux autres. Pour respecter les contraintes, on déplacera donc cette droite jusqu'au moment où elle n'aura plus qu'un seul point d'intersection avec la région réalisable ou, éventuellement, un segment si l'une des contraintes est parallèle à la fonction objectif (nous verrons un tel exemple plus loin). A cause de la convexité de U , ce point sera forcément un sommet.

Une fois déterminées les variables qui sont nulles, les autres variables sont calculées de façon unique comme solution du système $Ax = b$ avec $x \geq 0$. La difficulté principale est de trouver quelles sont les $n - m$ variables qui prennent la valeur zéro à la solution. C'est la *méthode du simplexe*, obtenue par Dantzig in 1947 [6], qui permet de répondre à cette question (sur l'histoire de cette méthode, voir [7] et [13]). Elle explore les sommets selon une certaine stratégie. Cependant, comme nous l'avons vu plus haut, ce nombre de sommets devient rapidement extrêmement grand et, dans certains cas mal posés, il se peut que la méthode du simplexe soit forcée de les explorer tous avant de trouver la solution. Ainsi, dans le pire des cas, la complexité (c'est-à-dire le nombre de sommets à explorer et donc le nombre d'opérations arithmétiques) de la méthode du simplexe croît exponentiellement en fonction de la dimension du problème. Cependant, dans la grande majorité des problèmes réels, le nombre de sommets visités reste un multiple petit (2 ou 3) de la dimension.

Il existe de très nombreux livres sur la programmation linéaire dont [5], [15], [18], [10] et [17]. Un chapitre sur ce sujet se trouve également dans [9]. Un livre d'un abord facile et contenant de nombreux exemples numériques est celui de Miller [14]. Certains sont repris dans le Chapitre 6.

Voyons maintenant comment nous ramener à la forme standard si le problème n'est pas présenté sous cette forme, c'est-à-dire si, dans le système $Ax = b$, certaines équations sont remplacées par des inégalités. Dans ce cas, m peut être supérieur à n . Cependant, parmi ces m contraintes, il ne peut pas y en avoir plus de n qui soient des égalités (et, si n contraintes sont de type égalité, les contraintes d'inégalité ne jouent aucun rôle et doivent être supprimées).

Considérons, par exemple, le problème suivant

$$\begin{cases} \min_x f(x) = 5x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

On se ramène à la forme standard en introduisant, dans les contraintes, des

variables artificielles positives appelées *variables d'écart*. Ainsi, en introduisant les variables d'écart x_3 et x_4 , ce problème peut se réécrire

$$\begin{cases} \min_x f(x) = 5x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

On est donc ramené à la forme standard.

Soyons plus précis sur la manière d'introduire les variables d'écart. Supposons que l'une des contraintes s'écrive

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

avec $b_i \geq 0$. On va introduire la variable d'écart $x_{n+i} \geq 0$ et, à cause du sens de l'inégalité, il faut rajouter cette variable (qui est positive) au membre de gauche pour qu'il devienne égal à b_i . La contrainte devient alors

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i.$$

Si la contrainte s'écrit

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

avec $b_i \geq 0$, il faut soustraire la variable d'écart $x_{n+i} \geq 0$ au membre de gauche pour qu'il devienne égal à b_i et cette contrainte devient

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i.$$

Si, parmi les contraintes, certaines sont de type égalité et d'autres de type inégalité, on n'introduira pas de variable d'écart dans les contraintes de type égalité.

On transforme ainsi un programme linéaire avec certaines contraintes de type inégalité en un programme linéaire n'ayant que des contraintes de type égalité, c'est-à-dire en un programme linéaire écrit sous forme standard. Ce programme linéaire se présente donc comme un système de m équations à $n + m$ inconnues et, dans le cas où toutes les contraintes sont des inégalités, la matrice A devient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}.$$

Les m dernières colonnes de cette matrice correspondent aux variables d'écart.

Comme nous l'avons vu plus haut, au moins $n - m$ variables sont nulles en un sommet. Mais maintenant, le nombre des variables n'est plus n mais $n + m$. Donc, en chaque sommet, $(n + m) - m = n$ variables au moins sont nulles. Cette propriété s'exprime aussi en disant que, en chaque sommet, au plus m variables sont non nulles.

Remarque 2.2

Dans tout ce qui suit, on supposera toujours, sans restreindre la généralité, que tous les b_i sont positifs ou nuls. Si l'un d'eux est négatif, il suffira de changer tous les signes de cette inégalité ainsi que son sens.

Remarque 2.3

Il se peut que certaines contraintes soient inutiles, on parle alors de contraintes inactives. C'est, par exemple, le cas de la contrainte $-5x_1 - 2x_2 \leq 0$ puisqu'elle est toujours satisfaite $\forall x_1, x_2 \geq 0$. Elle peut donc être supprimée.

De même, si l'on impose les contraintes $2x_1 + x_2 \leq 4$ et $2x_1 + x_2 \leq 5$, la seconde peut être supprimée car elle ne joue aucun rôle. Un tel phénomène peut se produire sans que l'on s'en aperçoive dans les problèmes concrets très volumineux qui sont difficiles à mettre en équations.

Remarque 2.4

Dans de nombreuses applications, la solution optimale doit être constituée de nombres entiers. En effet, un nombre d'objets à fabriquer est un nombre entier, un nombre de camions à utiliser est un nombre entier, etc. On parle alors de programmation linéaire en nombres entiers. Il ne faut surtout pas croire que, si la solution optimale obtenue n'est pas entière, il suffit de l'arrondir pour obtenir la solution du problème. Cherchons par exemple à maximiser $10x_1 + 8x_2 + 5x_3$ sous la contrainte $6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 9$. La solution optimale est $x_1 = 1.5, x_2 = x_3 = 0$ alors que la solution entière optimale est $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$.

Nous avons vu que la région réalisable d'un programme linéaire est un polyèdre convexe et qu'il existe toujours un sommet de ce polyèdre qui coïncide avec une solution optimale. Or, à un problème de programmation linéaire en nombres entiers, on peut, en général, faire correspondre un ensemble de points à coordonnées entières. L'enveloppe convexe de cet ensemble de points est un polyèdre convexe. Par conséquent, en déterminant les faces de ce polyèdre, on se ramène à la résolution d'un programme linéaire. On verra un tel exemple plus loin (Section 2.2, exemple 6).

Pendant, la résolution d'un programme linéaire en nombres entiers est beaucoup plus complexe que sa résolution en nombres réels. Des algorithmes spécifiques ont été développés pour cela (voir [15, 20]). Nous n'en parlerons pas ici.

2.2 La modélisation

Pour tout problème concret, il faut commencer par le mettre en équations, c'est-à-dire par en effectuer la *modélisation*. Celle-ci comporte trois étapes

1. identification des variables,
2. formulation des contraintes,
3. définition de la fonction objectif.

Ensuite, il faudra écrire le problème sous forme standard puis le résoudre par l'algorithme du simplexe.

Donnons quelques exemples d'une telle modélisation.

2.2.1 Exemple 1

Une banque propose 4 sortes de prêts à ses clients. Les intérêts annuels que ceux-ci rapportent à la banque sont

prêt 1 : 6%
 prêt 2 : 8%
 prêt 3 : 8%
 prêt 4 : 4%.

Le total des prêts que la banque peut accorder est, au plus, de 25 millions d'Euros mais elle doit se conformer aux règles de gestion suivantes

Règle 1 : les prêts 1 doivent représenter au moins 55% du total des prêts 1 et 2 accordés et leur montant doit être d'au moins 25% de la valeur totale de tous les prêts accordés (en Euros),

Règle 2 : les prêts 2 ne peuvent dépasser 25% de la valeur totale (en Euros) de tous les prêts accordés,

Règle 3 : le taux moyen des intérêts perçus par la banque ne doit pas dépasser 7%.

L'objectif est, bien sur, de maximiser le profit de la banque tout en respectant les contraintes imposées par la gestion de la banque.

Commençons par identifier les variables. Ce qui nous préoccupe c'est le montant total en Euros des prêts des 4 catégories et non pas le nombre de contrats passés dans chacune d'elles. Soit x_i le montant prêté (en millions d'Euros) dans la catégorie i pour $i = 1, \dots, 4$. Naturellement, ces x_i doivent être positifs ou nuls.

Formulons maintenant les contraintes. La limite supérieure que la banque peut prêter est de 25 millions d'Euros, d'où la contrainte

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 25.$$

La règle 1 impose que

$$x_1 \geq 0.55(x_1 + x_2)$$

et

$$x_1 \geq 0.25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

D'après la règle 2, on doit avoir

$$x_2 \leq 0.25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

Le total des intérêts perçus par la banque sera $0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.08x_3 + 0.04x_4$. Le taux moyen pratiqué par la banque sur l'ensemble des sommes prêtées est donc cette somme totale divisée par $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. D'après la règle 3, il doit être au plus égal à 7 %. On doit donc avoir

$$0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.08x_3 + 0.04x_4 \leq 0.07(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

L'objectif est le maximiser le gain de la banque, c'est-à-dire de maximiser

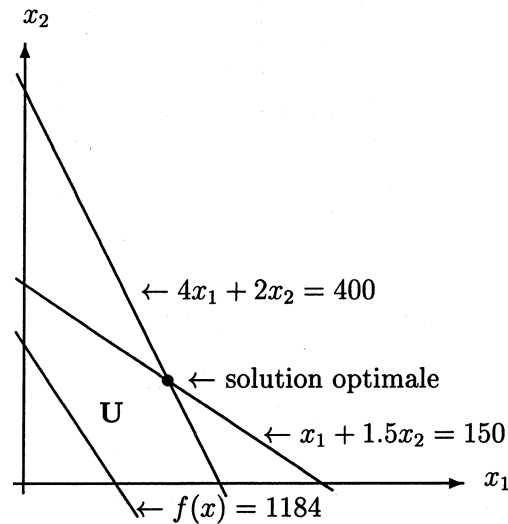
$$f(x) = 0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.08x_3 + 0.04x_4.$$

2.2.2 Exemple 2

Un atelier de confection peut fabriquer en série deux modèles de chemises. Le premier modèle nécessite 1 mètre de tissu, 4 heures de travail et il rapporte 24 Euros. Le second modèle réclame 1.5 mètre de tissu, 2 heures de travail et rapporte 16 Euros. Chaque jour, l'atelier dispose de 150 mètres de tissu, travaille 400 heures

et vend toute sa production. La question est de savoir combien il faut fabriquer de chemise de chaque modèle pour maximiser le bénéfice.

Modélisons d'abord ce problème. Soit x_1 et x_2 les nombres respectifs de chemises du premier et du second modèle. Naturellement, ces deux quantités doivent être positives. La fonction objectif à maximiser (le bénéfice) est $f(x) = 24x_1 + 16x_2$. La contrainte concernant le tissu (la longueur totale de tissus pouvant être utilisé) s'écrit $x_1 + 1.5x_2 \leq 150$. La contrainte sur le temps total de travail des ouvriers est $4x_1 + 2x_2 \leq 400$. Dans le plan (x_1, x_2) , la fonction objectif est représentée par une droite de pente $-3/2$, la première contrainte par une droite de pente $-2/3$ et la seconde contrainte par une droite de pente -2 . Les deux contraintes se coupent au point $(x_1 = 75, x_2 = 50)$. Si l'on déplace la droite qui représente la fonction objectif en lui conservant toujours la même pente, son point d'intersection avec la région réalisable qui correspond à la plus grande valeur pour la fonction objectif se situe au point $(75, 50)$. En ce point, le bénéfice atteint son maximum qui sera de $24 \times 75 + 16 \times 50 = 2600$.



Cet exemple provient du site web réalisé par Beuneu [2].

2.2.3 Exemple 3

Voici un exemple connu sous le nom de *problème du consommateur*, voir [5]. On peut acheter 4 types d'aliments dont les teneurs en calories et en vitamines ainsi que les prix au kilo sont donnés par le tableau

	type 1	type 2	type 3	type 4
calories	2	1	0	1
vitamines	3	4	3	5
prix	2	2	1	8

On cherche à obtenir, au moindre coût, une teneur minimale en vitamines de 7 et au moins 12 calories.

Soit x_i le poids d'aliment i acheté ($i = 1, \dots, 4$). Le coût est donc donné par

$$f(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4.$$

Pour la teneur en vitamines, on veut donc avoir

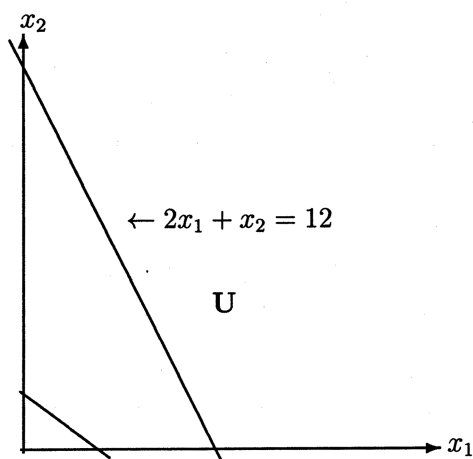
$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geq 7$$

et, pour les calories,

$$2x_1 + x_2 + x_4 \geq 12.$$

La différence avec l'exemple précédent est que, ici, la région réalisable n'est plus bornée. Cependant, bien que cela ne soit pas toujours le cas avec une région réalisable non bornée, Ce problème admet au moins une solution.

Dans le plan (x_1, x_2) , c'est-à-dire en prenant $x_3 = x_4 = 0$, on a la Figure suivante



Un vendeur concurrent veut s'appropriier le marché avec deux types d'aliments, I et II, dont les teneurs en calories et vitamines par unité de volume sont données par le tableau

	type I	type II
calories	1	0
vitamines	0	1

L'objectif de ce concurrent est d'offrir la plus grande quantité possible de calories et de vitamines à un prix inférieur ou égal. Il recherche donc les quantités y_1 et y_2 de ses deux produits telles que

$$\begin{aligned} \max_y & 12y_1 + 7y_2 \\ & 2y_1 + 3y_2 \leq 2 \\ & y_1 + 4y_2 \leq 2 \\ & 3y_2 \leq 1 \\ & y_1 + 5y_2 \leq 8 \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

alors le problème du consommateur et de son concurrent s'écrivent respectivement

$$\begin{array}{ll} \min f(x) = (x, c) & \max (y, b) \\ Ax \geq b & A^T y \leq c. \end{array}$$

C'est un exemple de ce que l'on appelle la *dualité* en programmation linéaire. Ce concept sera étudié dans le Chapitre 5.

2.2.4 Exemple 4

Un cas particulier important dans le contexte industriel est le *problème du transport*.

On a m usines (points de production) qui doivent fournir un certain produit à n clients (points de consommation). L'usine i ($i = 1, \dots, m$) fabrique a_i unités du produit et le client j ($j = 1, \dots, n$) en veut b_j unités. Le coût de transport d'une unité de produit de l'usine i au client j est notée c_{ij} . On appelle x_{ij} la quantité de produit transportée de l'usine i vers le client j .

Le problème consiste à trouver les quantités x_{ij} qui permettent à la fois d'écouler la production et de satisfaire les clients tout en minimisant le coût total du transport.

On a donc le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{ll} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{array}$$

Pour faciliter sa résolution, on présentera les données de ce problème sous la forme suivante

c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Chaque colonne de la matrice des c_{ij} représente un client différent alors que chaque ligne se rapporte à une certaine usine. La dernière colonne (celle des a_i) est celle de la production de chaque usine tandis que la dernière ligne (celle des b_j) regroupe les demandes de chacun des clients.

Donnons un exemple de problème de transport [18].

Un constructeur automobile possède trois usines situées à Paris, Strasbourg et Lyon. Les métaux nécessaires à la fabrication des automobiles arrivent dans les ports du Havre et de Marseille. Les quantités hebdomadaires de métal nécessaires à chaque usine sont respectivement de 400, 300 et 200 tonnes. La quantité hebdomadaire qui en arrive au Havre est de 350 tonnes et elle est de 550 tonnes à Marseille. Les coûts de transport par tonne d'un port à une usine sont donnés dans le tableau suivant

	Paris	Strasbourg	Lyon
Marseille	5	6	3
Le Havre	3	5	4

Ce tableau signifie donc que l'envoi de x tonnes de Marseille à Strasbourg coûte $6x$ Euros.

Le problème consiste à trouver quel est le poids de métal à envoyer à chaque usine depuis chaque port afin que

- 1 – chaque usine reçoive, au moins, la quantité de métal qu'elle demande,
- 2 – les quantités demandées à chaque port n'excèdent pas les quantités disponibles,
- 3 – le coût total du transport soit minimum.

Nous allons désigner par x_{ij} (nombre positif ou nul) le tonnage de métal envoyé depuis le port i jusqu'à l'usine j . L'indice $i = 1$ correspondra au port de Marseille, tandis que $i = 2$ sera utilisé pour le port du Havre. L'usine de Paris correspondra à $j = 1$, celle de Strasbourg à $j = 2$ et celle de Lyon à $j = 3$.

On a donc, pour les contraintes concernant la demande de chaque usine,

$$x_{11} + x_{21} \geq 400$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 300$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 200.$$

Les contraintes sur les ports sont

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 550$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 350.$$

Il faut rendre minimum la quantité

$$5x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23}.$$

Naturellement, un problème de transport est beaucoup plus complexe dans la réalité, c'est-à-dire qu'il comporte un nombre de variables et de contraintes beaucoup plus important.

2.2.5 Exemple 5

Un agent immobilier a deux appartements à vendre. Il a acheté le premier 100 K Euros et le second 150 K Euros. À la revente, il ne veut perdre de l'argent sur aucun appartement et il veut que le prix total de la vente des deux appartements soit au minimum supérieur de 20% au prix total d'achat. La plus-value réalisée est taxée à 30% pour le premier appartement et à 40% pour le second. Le total des impôts payés au titre de la plus-value ne doit pas dépasser 10% du total de la vente.

Quel prix de vente l'agent immobilier doit-il demander pour chaque appartement afin de maximiser son bénéfice après impôt ?

Soient x_1 et x_2 les prix de vente (en K Euros) de chacun des deux appartements. La première contrainte à respecter est

$$x_1 \geq 100$$

$$x_2 \geq 150.$$

Ensuite on doit avoir

$$x_1 + x_2 \geq 1.2(100 + 150).$$

Les plus-values respectives sont de $x_1 - 100$ et $x_2 - 150$. Les impôts sur chaque appartement seront par conséquent

$$\begin{aligned} 0.3(x_1 - 100) \\ 0.4(x_2 - 150). \end{aligned}$$

On veut que

$$0.3(x_1 - 100) + 0.4(x_2 - 150) \leq 0.1(x_1 + x_2)$$

c'est-à-dire

$$0.2x_1 + 0.3x_2 \leq 90.$$

Le profit qu'il faut maximiser est donc de

$$f(x) = (x_1 - 100) - 0.3(x_1 - 100) + (x_2 - 150) - 0.4(x_2 - 150) = 0.7x_1 + 0.6x_2 - 160.$$

On pourra vérifier que les sommets du domaine réalisable sont $A = (100, 200)$, $B = (150, 150)$, $C = (100, 700/3)$ et $D = (450/2, 150)$. En ces points on a $f(A) = 30$, $f(B) = 35$, $f(C) = 50$ et $f(D) = 87.5$. Le maximum de la fonction objectif est donc obtenu en D .

2.2.6 Exemple 6

Donnons maintenant un exemple de programmation linéaire en nombres entiers.

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un sirop. Pour cela, il utilise deux constituants α et β qu'il reçoit par flacons d'un litre.

Le sirop est constitué d'au moins 35% de α et de 55% de β . On complète par de l'excipient dont on ne tient pas compte. Les produits α et β sont traités dans deux machines qui ne peuvent, chacune, fonctionner que 50 heures par semaine au plus. Le traitement d'un litre de produit α nécessite l'utilisation de la première machine pendant 1 heure et de la seconde pendant 2 heures. Pour β , il faut disposer de la première machine pendant 2 heures et de la seconde pendant 1 heure. Chaque semaine, le laboratoire ne dispose, au plus, que de 32 litres des produits α et β au total. Les prix d'achat par litre de α et β sont respectivement de 40 et de 70 Euros. Le sirop est vendu 20 Euros par flacon de 10 cl.

On veut connaître les nombres x_1 et x_2 de litres de α et β à traiter par semaine pour maximiser le bénéfice.

La première contrainte sur le pourcentage du produit α dans la composition du sirop est

$$x_1 \geq 35\%(x_1 + x_2)$$

c'est-à-dire

$$13x_1 - 7x_2 \geq 0.$$

La seconde contrainte concernant le pourcentage du produit β est

$$x_2 \geq 55\%(x_1 + x_2)$$

c'est-à-dire

$$11x_1 - 9x_2 \leq 0.$$

Les contraintes sur les durées d'utilisation des machines conduisent à

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 50 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 50. \end{aligned}$$

La contrainte sur la quantité de produits disponible s'écrit

$$x_1 + x_2 \leq 32.$$

Le bénéfice hebdomadaire (à maximiser) est (puisque'il y a 10 flacons de 10 cl dans un litre)

$$f = 200(x_1 + x_2) - 40x_1 - 70x_2.$$

Les sommets de la région réalisable sont $O = (0, 0)$, $A = (14, 18)$, $B = (72/5, 88/5)$ et $C = (350/33, 650/33)$. La solution ne peut être ni en B ni en C puisqu'un nombre de litres est forcément un nombre entier. La solution entière optimale est donc obligatoirement atteinte en A . Le bénéfice correspondant est de 4580 Euros. On a $f(B) = 4592$ et $f(C) = 140500/33 \simeq 4257.6$. On voit que le point A ne correspond pas au maximum de la fonction objectif lorsque l'on permet à x_1 et x_2 de prendre des valeurs non entières (ce maximum se situe en B). Cependant, dans cet exemple, il n'a pas été nécessaire d'utiliser une technique spécifique de programmation linéaire en nombres entiers car un et un seul des sommets de la région réalisable était entier. Ça n'est plus le cas si nous remplaçons 32 par 31.

2.2.7 Exercice

A titre d'exemple supplémentaire, on propose l'exercice suivant tiré de [18].

Une usine fabrique 4 types de postes de télévision

M1 : portatif noir et blanc

M2 : standard noir et blanc

M3 : standard couleur

M4 : couleur de luxe.

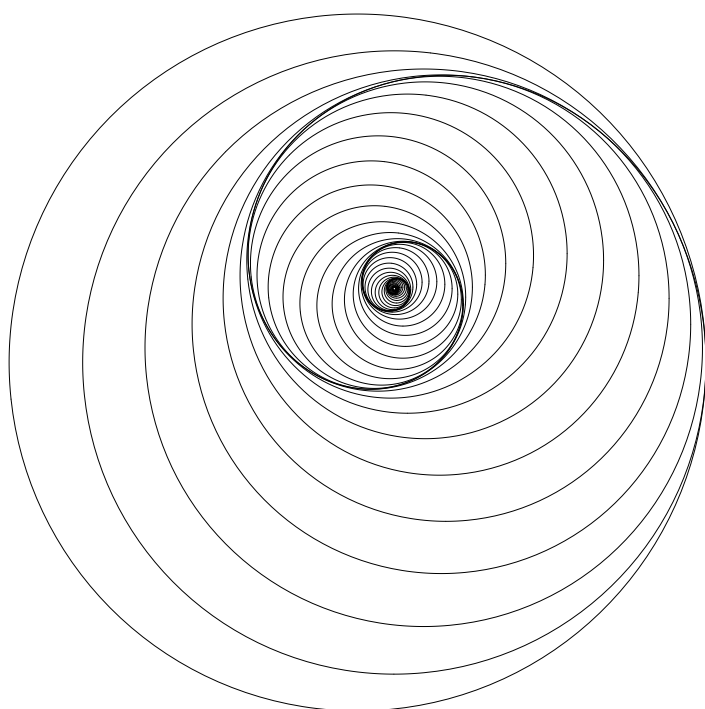
Chaque poste doit passer dans deux ateliers : montage et test. Les durées de montage et de test sont données dans le tableau (en heures)

	M1	M2	M3	M4
Montage	8	10	12	15
Test	2	2	4	5

L'atelier de montage travaille au plus 6000 heures par mois et celui de test 1500. Chaque mois l'entreprise dispose de 450 transformateurs, de 300 tubes couleur et d'un nombre illimités de tubes noir et blanc. Il faut un transformateur par poste, qu'il soit noir et blanc ou couleur.

Les profits réalisés sur chaque type de poste sont de 40, 60, 80 et 100 Euros respectivement. L'entreprise veut maximiser son profit.

Modéliser ce problème et l'écrire sous forme d'un programme linéaire.



Chapitre 3

SOLUTION GRAPHIQUE ET ALGORITHME DU SIMPLEXE

La méthode du simplexe a été introduite par George B. Dantzig en 1947 [6]. Elle permet de résoudre les problèmes de programmation linéaire.

Comme il est d'usage, nous distinguerons la *méthode du simplexe* qui permet de résoudre un problème de programmation linéaire écrit sous une forme quelconque (c'est-à-dire avec des contraintes du type égalité ou inégalité) de l'*algorithme du simplexe* qui suppose que le problème est donné sous sa forme standard (c'est-à-dire uniquement avec des contraintes de type égalité).

Nous allons d'abord montrer, sur un exemple, comment obtenir graphiquement la solution d'un programme linéaire puis nous montrerons comment transformer cette résolution graphique en termes algébriques afin de déboucher sur l'algorithme du simplexe. Puis, sur d'autres exemples, nous formaliserons de plus en plus les règles de l'algorithme du simplexe pour arriver jusqu'à sa théorie qui sera exposée en détail dans le Chapitre 4.

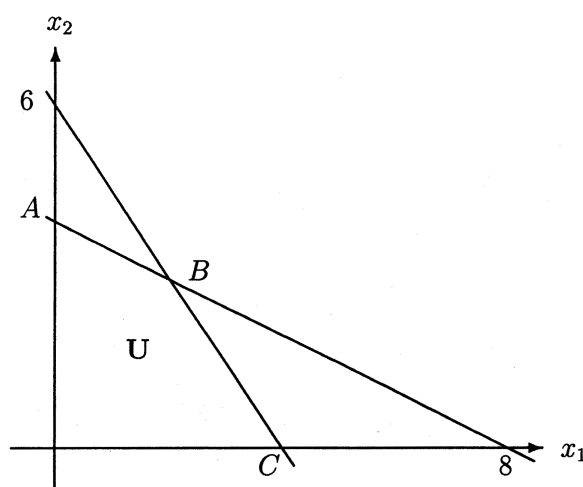
3.1 Solution graphique

Nous supposerons le problème écrit sous forme de la maximisation de la fonction objectif.

Soit le programme linéaire [22]

$$\begin{aligned}\max f(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

La région réalisable est celle délimitée par l'origine $O = (0, 0)$ et les points $A = (0, 4)$, $B = (2, 3)$ et $C = (4, 0)$.



À l'aide des variables d'écart x_3 et x_4 , le programme linéaire s'écrit sous forme standard

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 12 \\ -2x_1 - 3x_2 + f &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Observons que $x_3 = 0$ sur AB qui est un segment de la droite $x_1 + 2x_2 = 8$ et que $x_4 = 0$ sur BC qui appartient à la droite $3x_1 + 2x_2 = 12$. De plus, $x_1 = 0$ sur OA et $x_2 = 0$ sur OC . Ainsi on voit qu'une variable est nulle sur chaque segment (arête) de la frontière de la région réalisable.

Examinons maintenant la valeur de chaque variable aux sommets de cette région réalisable. En O on a $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 8$ et $x_4 = 12$. Le sommet A se situe à la fois sur OA et sur AB . Donc, en A , $x_1 = x_3 = 0$. En substituant ces valeurs dans les contraintes, on trouve qu'en A , $x_2 = 4$ et $x_4 = 4$. De la même façon, en B on a $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ et $x_3 = x_4 = 0$. Enfin, pour le point C on a $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$ et $x_4 = 0$.

On observe donc, qu'en chaque sommet, certaines variables sont nulles tandis que d'autres ne le sont pas. Nous avons la

Définition 3.1

Les variables non nulles s'appellent les variables de base et les variables nulles les variables hors base.

On peut résumer ce que nous savons pour l'instant dans le tableau suivant

sommet	coordonnées	variables de base ($\neq 0$)	variables hors base ($= 0$)
O	$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 12$	x_3, x_4	x_1, x_2
A	$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 4$	x_2, x_4	x_1, x_3
B	$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 0$	x_1, x_2	x_3, x_4
C	$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 0$	x_1, x_3	x_2, x_4

On va démarrer l'algorithme à partir d'un *sommet réalisable* (c'est-à-dire qui appartient à la région réalisable), O dans notre cas, et ensuite passer à un sommet adjacent afin d'avoir une augmentation de la valeur de la fonction objectif f . On verra plus loin comment trouver, au départ, un sommet réalisable si l'origine n'en est pas un.

Le tableau initial du simplexe (qui sera défini dans la Section suivante) correspondra à la situation en ce sommet initial O et les tableaux suivants correspondront aux sommets qui seront choisis ultérieurement. On va examiner chaque sommet pour voir s'il correspond à une solution optimale. Si ça n'est pas une solution optimale, il faudra décider quel sera le sommet suivant. Nous allons d'abord développer les outils qui permettent de mettre en œuvre cette procédure géométriquement, puis nous la traduirons en termes algébriques. Bien entendu, l'avantage de cette traduction algébrique est quelle peut se programmer sur ordinateur. Ça sera l'*algorithme du simplexe*.

On part donc de O , sommet réalisable. En ce point f vaut 0. Il faut d'abord savoir s'il est nécessaire d'aller explorer un autre sommet voisin. Il y a deux sommets adjacents à O qui sont A et C . Si l'on se déplace le long de OA , on trouve que $x_1 = 0$ et $f = 2x_1 + 3x_2$ augmente de 3 à chaque fois que x_2 augmente de 1. D'un autre côté, si l'on se déplace sur OC , on a $x_2 = 0$ et f augmente de 2 à chaque fois que x_1 augmente de 1. Puisque f augmente plus rapidement le long de OA , on sélectionne ce segment et A devient la nouvelle solution réalisable à examiner. En A , $f = 12$ ce qui est effectivement une augmentation de f par rapport à sa valeur en O .

Étudions maintenant si A est optimal ou non. En O , f s'exprimait en fonction des variables hors base x_1 et x_2 . Écrivons maintenant la valeur de f en A à l'aide des variables hors base x_1 et x_3 . Pour cela, on remplace, dans l'expression de f , x_2 par son expression obtenue à l'aide de la première contrainte de (3.1), c'est-à-dire $x_2 = 4 - (x_1 + x_3)/2$. Cette substitution nous permet d'écrire $f = 12 + x_1/2 - 3x_3/2$. À partir de A , si l'on se déplace le long de AB (qui est la seule direction de déplacement possible), alors $x_3 = 0$ et f augmente de $1/2$ pour une augmentation de 1 en x_1 . Puisque f augmente, nous allons en B . La valeur de f en B est de 13, ce qui est une augmentation par rapport à sa valeur en A .

On doit maintenant déterminer si B est une solution optimale. Les variables hors base en B sont x_3 et x_4 . Exprimons f en fonction de ces variables. Pour ce faire, résolvons, en fonction de x_1 et x_2 , le système linéaire formé par les deux premières équations de (3.1). On obtient $x_1 = 2 + x_3/2 - x_4/2$ et $x_2 = 3 - 3x_3/4 + x_4/4$. Ainsi f peut s'écrire $f = 13 - 5x_3/4 - x_4/4$. Si l'on se déplace le long de BC à partir de B , $x_4 = 0$ et f décroît de $5/4$ lorsque x_3 augmente de 1. Par conséquent, f atteint sa valeur maximale en B et ce maximum vaut 13.

On a souvent tendance à penser que la solution optimale se situe toujours au sommet de la région réalisable qui est le plus éloigné de l'origine. C'est faux. En effet, si c'était vrai, cela signifierait que le sommet optimal est indépendant de la fonction objectif. Soit, par exemple, le programme linéaire

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ \max f &= \alpha x_1 + \beta x_2. \end{aligned}$$

La région réalisable est délimitée par le triangle de sommets $O = (0, 0)$, $A = (0, 2)$ et $B = (1, 0)$. On a $f(O) = 0$, $f(A) = 2\beta$ et $f(B) = \alpha$. Donc, si $\alpha = \beta = 1$, l'optimum est atteint en A , tandis qu'il se trouve en B si $\alpha = 3$ et $\beta = 1$.

3.2 Le tableau du simplexe

On a l'habitude de regrouper les données d'un programme linéaire dans un tableau appelé *tableau du simplexe* et de travailler sur ce tableau jusqu'à l'obtention de la solution optimale par la méthode du simplexe.

Considérons le programme linéaire

$$\max f = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + b_{m+1}$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m. \end{aligned}$$

En général $b_{m+1} = 0$. Cependant nous introduisons ici ce second membre supplémentaire car, lors de la recherche d'un point de départ réalisable (voir Section 3.5), nous pourrions avoir besoin d'un b_{m+1} non nul.

La relation qui permet de calculer la valeur de la fonction objectif sera écrite sous la forme

$$-c_1x_1 - \cdots - c_nx_n + f = b_{m+1}.$$

Introduisons maintenant les variables d'écart $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$. Puisque nous avons supposé que toutes les inégalités étaient des majorations par $b_1, \dots, b_m$, le coefficient correspondant à chaque variable d'écart est $+1$. Si certaines inégalités avaient été dans l'autre sens, on aurait mis un coefficient -1 pour la variable d'écart correspondante. On peut également se ramener à un signe d'inégalité ayant le sens ci-dessus en multipliant par -1 les inégalités de sens contraire et en prenant un coefficient $+1$ pour toutes les variables d'écart.

Le tableau initial du simplexe est donc

x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	f	b	base
a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	0	b_1	x_{n+1}
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	1	0	b_m	x_{n+m}
$-c_1$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	1	b_{m+1}	f

La dernière colonne contient les noms des variables de base. Ici, ces variables de base sont $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, ce qui ne restreint pas la généralité puisqu'il est toujours possible de se ramener à ce cas en changeant la numérotation des variables.

L'expression des contraintes et celle de la fonction objectif se lisent directement sur ce tableau. C'est là son intérêt. En effet, on multiplie chaque coefficient par la variable située au dessus dans la première ligne. On a donc

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \\ -c_1x_1 - \cdots - c_nx_n + f &= b_{m+1}. \end{aligned}$$

Au fur et à mesure des étapes de l'algorithme du simplexe, ce tableau se transformera en un tableau plus complet de la forme

x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	f	b	base
a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	$a_{1,n+1}$	$\cdots$	$a_{1,n+m}$	0	b_1	
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	$a_{m,n+1}$	$\cdots$	$a_{m,n+m}$	0	b_m	
$-c_1$	$\cdots$	$-c_n$	$-c_{n+1}$	$\cdots$	$-c_{n+m}$	c_{n+m+1}	b_{m+1}	f

La dernière colonne contient le nom des variables de base. Nous ne les avons pas indiquées ici mais nous verrons plus loin comment elles sont déterminées. Ce tableau se lit comme suit

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} + \cdots + a_{1,n+m}x_{n+m} &= b_1 \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + a_{m,n+1}x_{n+1} + \cdots + a_{m,n+m}x_{n+m} &= b_m \\
 -c_1x_1 - \cdots - c_nx_n - c_{n+1}x_{n+1} - \cdots - c_{n+m}x_{n+m} + c_{n+m+1}f &= b_{n+m}.
 \end{aligned}$$

3.3 L'algorithme du simplexe

Traduisons maintenant en termes algébriques l'approche graphique expliquée précédemment. La solution réalisable initiale est O , les variables de base sont x_3 et x_4 et leurs valeurs respectives en O sont 8 et 12. La valeur de f en O est 0. Le tableau initial du simplexe est donc

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
1	2	1	0	0	8	x_3
3	2	0	1	0	12	x_4
-2	-3	0	0	1	0	f

La dernière colonne fournit les noms des variables de base au point où l'on se trouve, c'est-à-dire, dans notre cas, au point O . Connaissant les variables de base, les variables hors base sont également connues.

La discussion géométrique nous a montré que O n'était pas une solution optimale et nous a conduit vers A . En O , les variables de base sont x_3 et x_4 et, en A , elles sont x_2 et x_4 . Quand on va de O à A , x_2 remplace x_3 comme variable de base. On dit que x_3 est la *variable sortante* (elle sort de la base) et que x_2 est la *variable entrante* (elle y entre). La variable entrante correspondant à la plus grande augmentation de f , qui est 3. Dans le tableau précédent, cela correspond à la valeur la plus négative dans les colonnes de la dernière ligne qui correspondent aux variables $x_1, \dots, x_4$. Cela nous permet de sélectionner la variable entrante x_2 . Si cela n'est pas possible, c'est-à-dire si la dernière ligne du tableau ne comporte pas de valeur négative dans ses $n + m$ premières colonnes, cela signifie que la solution optimale a été obtenue puisqu'il n'y a plus de variable entrante.

Il faut maintenant trouver la variable sortante qui, en allant de O à A , sera x_3 . Les deux premières lignes du tableau correspondent aux équations

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\
 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 12.
 \end{aligned}$$

Sur OA , $x_1 = 0$ et les équations précédentes donnent donc

$$\begin{aligned}x_3 &= 8 - 2x_2 \\x_4 &= 12 - 2x_2.\end{aligned}$$

Puisque $x_3 \geq 0$ et $x_4 \geq 0$, la valeur maximale que x_2 peut prendre pour respecter ces contraintes est $x_2 = 4$, ce qui donne $x_3 = 0$ et $x_4 = 4$ (au point A). Donc x_3 est la variable sortante et devient une variable hors base. On voit que la raison pour laquelle x_3 arrive à la valeur 0 avant x_4 est que $8/2 < 12/2$. Dans le tableau du simplexe, cela revient à diviser, dans les deux premières lignes, l'élément de la dernière colonne par l'élément de la colonne qui correspond à la variable entrante. La ligne qui donne la plus petite valeur fournit la variable sortante, ici x_3 .

Nous avons donc maintenant une procédure de sélection des variables entrante et sortante. Transformons maintenant le tableau du simplexe en un tableau ayant x_2 et x_4 comme variables de base.

Dans (3.1), observons que les variables x_3 et x_4 n'apparaissent chacune que dans une seule équation et que le coefficient correspondant est toujours 1. C'est pour cette raison que, en $O = (0, 0)$, nous avons $x_3 = 8$ et $x_4 = 12$. De plus, le fait que la dernière équation ne fasse intervenir que f et des variables hors base entraîne que son membre de droite soit égal à 0. Ce sont ces mêmes caractéristiques que l'on doit reproduire pour obtenir le tableau du simplexe pour le sommet A en fonction des variables de base x_2 et x_4 . Il s'obtient en choisissant comme *pivot* l'élément qui se trouve dans la colonne de la variable entrante et dans la ligne de la variable sortante. On se sert de ce pivot pour que cet élément se transforme en un 1 et que les autres éléments de la même colonne deviennent des 0 (c'est-à-dire que l'on va éliminer la variable entrante de toutes les lignes sauf de celle qui correspond à la variable sortante). Pour cela, on commence par diviser la première ligne L_1 (celle du pivot) par le pivot. Puis on la multiplie par 2 et on la soustrait de la ligne 2. Un zéro apparaît dans la seconde colonne de la ligne 2. On multiplie ensuite la première ligne par -3 et on la soustrait de la troisième ligne. On obtient un zéro dans la seconde colonne de la ligne 3. Cette procédure correspond en fait à la méthode de Gauss-Jordan décrite dans l'Appendice.

On a ainsi la suite de tableaux

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
1	2	1	0	0	8	x_3
3	2	0	1	0	12	x_4
-2	-3	0	0	1	0	f

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
1/2	1	1/2	0	0	8/2	x_3
3	2	0	1	0	12	x_4
-2	-3	0	0	1	0	f

et le nouveau tableau du simplexe est

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
1/2	1	1/2	0	0	4	x_2
2	0	-1	1	0	4	x_4
-1/2	0	3/2	0	1	12	f

Vérifions que ce tableau correspond bien au système d'équations qui donne $x_2 = 4$, $x_4 = 4$ et $f = 12$ si l'on prend x_2 et x_4 comme variables de base. D'après le nouveau tableau du simplexe, ces équations sont

$$\begin{aligned}x_1/2 + x_2 + x_3/2 &= 4 \\2x_1 - x_3 - x_4 &= 4 \\-x_1/2 + 3x_3/2 + f &= 12.\end{aligned}$$

Les variables x_1 et x_3 sont hors base. En leur donnant la valeur 0, on obtient bien $x_2 = 4$, $x_4 = 4$ et $f = 12$. On a donc bien obtenu un tableau qui correspond au sommet A .

On recommence la même analyse à partir de ce tableau. À cause de la valeur négative $-1/2$ de la dernière ligne, la valeur $f = 12$ n'est pas la solution optimale. La nouvelle variable entrante est x_1 à cause du signe négatif dans cette colonne (c'est le seul). La variable sortante est x_4 puisque $4/2 < 4/(1/2)$. On obtient

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
1/2	1	1/2	0	0	4	x_2
2	0	-1	1	0	4	x_4
-1/2	0	3/2	0	1	12	f

La variable entrante x_1 remplace x_4 dans la seconde ligne et l'on a les tableaux

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
1/2	1	1/2	0	0	4	x_2
1	0	-1/2	1/2	0	4/2	x_4
-1/2	0	3/2	0	1	12	f

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
0	1	3/4	-1/4	0	3	x_2
1	0	-1/2	1/2	0	2	x_1
0	0	5/4	1/4	1	13	f

Puisque la dernière ligne ne comporte aucun élément négatif dans les colonnes 1 à 4, on a donc obtenu le tableau final. Les variables de base sont x_1 et x_2 et elles ont respectivement les valeurs 2 et 3. C'est la tableau du sommet B . La valeur optimale de f est 13. C'est le maximum qui peut être atteint sous les contraintes imposées.

Remarque 3.2

Choisir comme variable entrante celle qui donne la plus forte augmentation de la fonction objectif n'est pas forcément le meilleur choix et il peut conduire à plus d'itérations. Quand on a le choix entre plusieurs variables entrantes, sélectionner celle qui fournit le pivot le plus grand permet souvent d'avoir une plus grande stabilité numérique de l'algorithme. D'autres choix existent dans la littérature et ils donnent lieu à des variantes de l'algorithme du simplexe (voir, par exemple, [18, p. 165]).

Remarque 3.3

Un problème qui peut se révéler important lorsque l'on programme l'algorithme du simplexe est la propagation des erreurs dues à l'arithmétique de l'ordinateur. En effet, on a vu que la solution optimale était obtenue lorsque la dernière ligne du tableau du simplexe ne contenait plus de quantité négative. Il se peut cependant que toutes ces quantités soient positives mais que certaines d'entre elles soient très voisines de zéro. Leur signe est, par conséquent, incertain et il se peut que la solution optimale n'ait pas été atteinte. On peut remédier à ce genre de problème en remplaçant le zéro par un petit intervalle le contenant. On peut également utiliser une arithmétique d'intervalles ou une arithmétique stochastique. On pourra trouver des informations sur ces questions, qui dépassent le cadre de cet ouvrage, dans [8].

Dans les problèmes concrets, il arrive souvent que la matrice A ne comporte qu'un très faible pourcentage d'éléments non nuls. On dit qu'elle est creuse. Si elle reste creuse aux étapes successives de l'algorithme du simplexe, il est possible de diminuer le nombre d'opérations arithmétiques de façon importante. Les codes de programmation linéaire doivent tenir compte de cette possibilité.

De façon générale, l'écriture d'un code performant pour l'algorithme du simplexe présente de grandes difficultés qui ne se décèlent pas à l'énoncé de l'algorithme.

3.4 Exemples

Ces exemples sont empruntés à [22]. Dans tous les exemples de cette Section, nous supposons que les variables hors base sont $x_1, \dots, x_n$ et que celles de base sont $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, c'est-à-dire que l'origine $x_1 = \dots = x_n = 0$ est un point réalisable. Ce cas se présente toujours lorsque toutes les contraintes s'expriment avec le signe inférieur ou égal. Nous verrons, dans la Section 4.5.3 ce qu'il y a lieu de faire si ce n'est pas le cas.

3.4.1 Exemple 1

Une compagnie fabrique deux types de calculateurs de poche : Ord1 et Ord2. Cela prend 5 heures pour fabriquer Ord1 et 2 heures pour Ord2. Les ouvriers de la compagnie travaillent au total 900 heures par semaine. Le coût de fabrication de Ord1 est de 8 Euros et celui de Ord2 est de 10 Euros. Le total du financement hebdomadaire que la compagnie peut investir est de 2800 Euros. Le profit sur chaque Ord1 est de 3 Euros et il est de 2 Euros pour Ord2.

Combien faut-il fabriquer de calculateurs de chaque type par semaine pour maximiser le profit ?

On voit donc que la compagnie doit faire face à deux contraintes, l'une sur le temps et l'autre sur l'argent. Commençons par mettre ce problème en équations.

Nous appellerons x_1 le nombre de Ord1 à fabriquer et x_2 le nombre de Ord2. Naturellement, x_1 et x_2 sont non négatifs.

Le nombre d'heures pour fabriquer x_1 Ord1 est de $5x_1$ et celui pour fabriquer x_2 Ord2 est de $2x_2$. Le temps total est donc de $5x_1 + 2x_2$ heures. Comme 900 heures sont disponibles par semaine, on doit donc avoir

$$5x_1 + 2x_2 \leq 900.$$

Considérons maintenant les contraintes financières. Le coût de fabrication de x_1 Ord1 est de $8x_1$ Euros. Celui de fabrication de x_2 Ord2 est de $10x_2$ Euros. Le coût total de production est donc de $8x_1 + 10x_2$ Euros. Puisque l'on ne peut dépenser que 2800 Euros, on doit donc avoir

$$8x_1 + 10x_2 \leq 2800.$$

En ce qui concerne le profit, il est de $3x_1$ pour Ord1 et de $2x_2$ pour Ord2, soit un total de

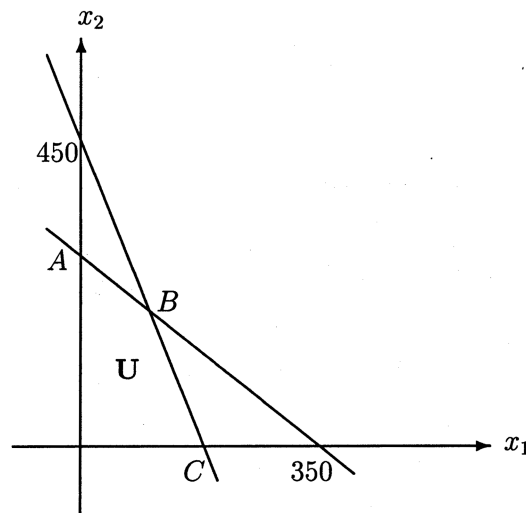
$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2.$$

Il nous faut maintenant trouver les nombres entiers x_1 et x_2 qui maximisent $f(x_1, x_2)$. Nous avons donc abouti au problème de programmation linéaire suivant

$$\begin{cases} \max f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 900 \\ 8x_1 + 10x_2 \leq 2800 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Recherchons d'abord graphiquement la région réalisable U . Il faut trouver dans quelle région du plan se trouvent les couples (x_1, x_2) qui satisfont les contraintes. On considère le quart du plan où x_1 et x_2 sont positifs (c'est-à-dire dans l'intersection du

demi plan $x_1 \geq 0$ avec le demi plan $x_2 \geq 0$). Les couples qui vérifient $5x_1 + 2x_2 \leq 900$ se situent sur et en dessous de la droite $5x_1 + 2x_2 = 900$ (c'est un demi plan). Pour savoir s'il faut se placer en dessous ou au dessus de cette droite (c'est-à-dire dans lequel des deux demi plans délimités par cette droite), il suffit de calculer $5x_1 + 2x_2$ pour des valeurs quelconques de x_1 et x_2 (par exemple $x_1 = x_2 = 0$) et de voir de si la contrainte est satisfaite ou non, c'est-à-dire de quel côté de la droite on se trouve. De même, les points qui satisfont $8x_1 + 10x_2 \leq 2800$ sont sur et en dessous de la droite $8x_1 + 10x_2 = 2800$. La région réalisable est constituée des points qui satisfont l'ensemble des contraintes, c'est-à-dire ceux qui sont situés dans l'intersection de tous ces demi plans. Cette région est un polyèdre convexe.



Dans notre exemple, nous avons

$A = (0, 280)$	$f(0, 280)$	$= 560$
$B = (100, 200)$	$f(100, 200)$	$= 700$
$C = (180, 0)$	$f(180, 0)$	$= 540$
$D = (0, 0)$	$f(0, 0)$	$= 0.$

La solution optimale est en B , c'est-à-dire 100 Ord1 et 200 Ord2, ce qui donne un profit hebdomadaire de 700 Euros.

Bien entendu, dans les problèmes réels qui comportent un grand nombre de variables, il n'est pas possible d'examiner successivement tous les sommets comme nous venons de le faire. La résolution graphique du programme linéaire est alors remplacée par la méthode du simplexe. Nous allons expliquer cette méthode sur l'exemple en cours.

Nous allons d'abord introduire les variables d'écart x_3 et x_4 afin de transformer nos inégalités en égalités. Nous obtenons

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 900 \\ 8x_1 + 10x_2 + x_4 &= 2800. \end{aligned}$$

Écrivons la fonction objectif sous la forme

$$-3x_1 - 2x_2 + f = 0.$$

Le problème consiste maintenant à trouver la solution du système

$$\left. \begin{array}{rrrrrrr} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 0x_4 & + & 0f & = & 900 \\ 8x_1 & + & 10x_2 & + & 0x_3 & + & x_4 & + & 0f & = & 2800 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & f & = & 0 \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

de sorte que f soit le plus grand possible et sous les contraintes $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$. Le programme linéaire a donc été reformulé sous la forme d'un système linéaire avec contraintes de non négativité sur les variables. Il consiste en 3 équations à 5 variables et possède donc plusieurs solutions réalisables dans la région où les contraintes sont satisfaites. La solution optimale se trouve parmi ces solutions réalisables et nous allons maintenant la rechercher par l'algorithme du simplexe. Cet algorithme est basé sur la méthode de Gauss-Jordan avec pivotage partiel (voir l'Appendice).

Formalisons maintenant un peu plus l'algorithme du simplexe tel qu'il a été exposé auparavant. Il consiste en les étapes suivantes

1. écrire la matrice $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$, du programme linéaire mis sous forme standard et augmentée d'une colonne $(0, \dots, 0, 1)^T$ (qui correspond à la fonction objectif f considérée comme une variable supplémentaire) et de son second membre ainsi que de la ligne correspondant à la fonction objectif. C'est le *tableau du simplexe*. Si les m contraintes sont de type inégalité, il a $m + 1$ lignes et $n + m + 2$ colonnes. Chaque colonne correspond à l'une des variables et la dernière colonne comporte les noms des variables de base (supposées être ici $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$)

x_1	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_{n+m}	f	b	base
a_{11}	$\dots$	a_{1n}	1	$\dots$	0	0	b_1	x_{n+1}
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	$\dots$	a_{mn}	0	$\dots$	1	0	b_m	x_{n+m}
$-c_1$	$\dots$	$-c_n$	0	$\dots$	0	1	0	f

Les variables hors base sont celles qui interviennent dans l'expression de f . Dans chaque ligne, le nom de la variable de base qui lui est associé (donné dans la dernière colonne) est celui qui correspond à la colonne de la variable (qui n'est pas hors base) ayant un coefficient égal à 1,

2. localiser l'élément négatif le plus grand en valeur absolue (dans les colonnes qui correspondent aux variables $x_1, \dots, x_{n+m}$) de la dernière ligne (la ligne $m + 1$) de ce tableau. S'il y en a plusieurs, prendre n'importe lequel. Si nous appelons k sa colonne, alors $k \leq n$ et la variable entrante est x_k . Si tous les éléments de cette dernière ligne sont non négatifs, le tableau est dans sa forme finale et la solution optimale a été obtenue,
3. pour chaque ligne i , diviser l'élément b_i de la dernière colonne par l'élément a_{ik} de la ligne i et de la colonne k , mais uniquement si cet élément est positif,

4. sélectionner le diviseur qui donne le plus petit quotient. On l'appelle le *pivot* (si deux éléments possèdent cette propriété, prendre n'importe lequel comme pivot). Si l est la ligne correspondante à ce pivot, alors le pivot est a_{lk} et la variable sortante est celle correspondant à la ligne l du tableau (son nom est donné dans la dernière colonne du tableau),
5. effectuer des combinaisons de lignes pour que le pivot devienne égal à 1 et que les autres éléments de la colonne k du pivot deviennent 0. Cette opération se réalise en commençant par diviser la ligne l , L_l , par le pivot a_{lk} afin d'obtenir la ligne L'_l . Puis, pour $i = 1, \dots, m+1$, $i \neq l$, on obtient la nouvelle ligne L'_i à partir de l'ancienne ligne L_i par la combinaison linéaire $L'_i = L_i - a_{ik}L'_l$,
6. répéter les étapes 2 à 5 précédentes jusqu'à ce que tous les éléments négatifs aient été éliminés de la dernière ligne. On obtient ainsi le tableau final du simplexe et il fournit la solution optimale

Pour notre exemple, nous avons

1. $m = 3$, $n = 6$ et le tableau du simplexe est

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
5	2	1	0	0	900	x_3
8	10	0	1	0	2800	x_4
-3	-2	0	0	1	0	f

Expliquons pourquoi les variables de base sont x_3 et x_4 . En effet, si l'on donne à x_3 la valeur $900 \geq 0$ et à x_4 la valeur $2800 \geq 0$, on voit bien que les contraintes sont satisfaites par $x_1 = x_2 = 0$ ce qui montre que l'origine est un point réalisable, que ces variables sont hors base et, par conséquent, que la base est formée de x_3 et x_4 .

2. Dans la dernière ligne, l'élément le plus grand en valeur absolue est $a_{31} = -3$ qui est situé dans la colonne $k = 1$. Donc x_1 est la variable entrante.
3. Pour $i = 1, \dots, m$, on divise b_i par a_{ik} si a_{ik} est positif. Nous avons $b_1/a_{11} = 900/5 < b_2/a_{21} = 2800/8$. Donc x_3 est la variable qui sort de la base et le pivot est $a_{11} = 5$. Il faut le faire devenir égal à 1. Pour cela, on divise par 5 la première ligne du tableau du simplexe et l'on obtient

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
1	2/5	1/5	0	0	900/5	x_1
8	10	0	1	0	2800	x_4
-3	-2	0	0	1	0	f

La nouvelle base est composée de x_1 et x_4 .

Il nous faut ensuite rendre nuls les éléments a_{21} et a_{31} de la colonne $k = 1$ du pivot. Si nous multiplions la première ligne du tableau précédent par 8 et si nous la soustrayons de la ligne 2, nous obtenons $a_{21} = 0$. Pour rendre nul a_{31} ,

on multiplie la ligne 1 du tableau par -3 et on la soustrait de la ligne 3. Ces opérations nous donnent

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
1	$2/5$	$1/5$	0	0	180	x_1
0	$34/5$	$-8/5$	1	0	1360	x_4
0	$-4/5$	$3/5$	0	1	540	f

On recommence maintenant la procédure à partir de l'étape 2. Dans la dernière ligne, l'élément négatif le plus grand en valeur absolue est $a_{32} = -4/5$. Il correspond à $k = 2$ et donc x_2 entre dans la base.

Pour chaque ligne i , on doit maintenant diviser l'élément b_i de la dernière colonne par l'élément $a_{ik} = a_{i2}$ de la ligne i et de la colonne k (si cet élément est positif). On a $b_1/a_{12} = 180/(2/5) = 450$ et $b_2/a_{22} = 1360/(34/5) = 200$. On sélectionne le diviseur qui donne le plus petit quotient. Il correspond à $k = 2$ ce qui signifie que x_4 sort de la base puisque la seconde ligne du tableau lui correspond. La nouvelle base est donc $\{x_1, x_2\}$ et le pivot est $a_{22} = 34/5$.

Pour rendre ce pivot égal à 1, divisons la ligne 2 par $34/5$. On obtient

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
1	$2/5$	$1/5$	0	0	180	x_1
0	1	$-4/17$	$5/34$	0	200	x_2
0	$-4/5$	$3/5$	0	1	540	f

Nous devons maintenant rendre nuls les éléments a_{12} et a_{32} . Pour a_{12} , on multiplie la ligne 2 par $2/5$ et on la soustrait de la première ligne. Pour a_{32} , on multiplie la ligne 2 par $-4/5$ et on soustrait de la ligne 3. On obtient

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
1	0	$25/85$	$-1/17$	0	100	x_1
0	1	$-4/17$	$5/34$	0	200	x_2
0	0	$7/17$	$2/17$	1	700	f

Puisque tous les éléments a_{mi} de la dernière ligne sont non négatifs pour $i = 1, \dots, n-1$, le tableau du simplexe est dans sa forme finale.

Ce tableau correspond au système

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + \frac{25}{85}x_3 - \frac{1}{17}x_4 + 0f &= 100 \\ 0x_1 + x_2 - \frac{4}{17}x_3 + \frac{5}{34}x_4 + 0f &= 200 \\ 0x_1 + 0x_2 + \frac{7}{17}x_3 + \frac{2}{17}x_4 + f &= 700. \end{aligned}$$

Puisque ce système a été obtenu par combinaisons linéaires des équations du système (3.2), sa solution n'a pas été modifiée. Puisque $x_3, x_4 \geq 0$, la dernière équation nous montre que f prend la valeur maximale $f = 700$ lorsque $x_3 = x_4 = 0$.

En remplaçant x_3 et x_4 par 0 dans les deux autres équations on trouve que la solution optimale est

$$x_1 = 100 \quad \text{et} \quad x_2 = 200$$

et que l'on a

$$f(100, 200) = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 200 = 700.$$

On retrouve bien ainsi la même solution que celle obtenue graphiquement.

Il faut remarquer que le raisonnement utilisé pour arriver à la valeur maximale de f implique que l'élément b_{m+1} de la dernière ligne et de la dernière colonne du tableau final du simplexe soit égal à cette valeur maximale.

3.4.2 Exemple 2

Donnons maintenant un exemple de dimension 3

$$\begin{cases} \max f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 200 \\ x_1 + 2x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

En introduisant les variables d'écart x_4, x_5 et x_6 , le système correspondant d'équations est

$$\left. \begin{array}{rrrrrrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & + & 0f & = & 100 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 0x_4 & + & x_5 & + & 0x_6 & + & 0f & = & 200 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & x_6 & + & 0f & = & 150 \\ -3x_1 & - & 5x_2 & - & 8x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & + & f & = & 0. \end{array} \right\}$$

Dans les tableaux suivants du simplexe, les pivots sont indiqués en gras. Le tableau initial est

$$\begin{array}{cccccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 & x_4 \\ 3 & 2 & \mathbf{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 & x_5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 150 & x_6 \\ \hline -3 & -5 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & f \end{array}$$

L'élément le plus négatif de la dernière ligne est -8 . Donc x_3 rentre dans la base. On a $200/4 \leq 100/1$ et, par conséquent, x_5 sort de la base et le pivot est $a_{23} = 4$. On divise la seconde ligne par le pivot $a_{23} = 4$ et l'on obtient

$$\begin{array}{cccccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 & x_4 \\ 3/4 & 1/2 & \mathbf{1} & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 50 & x_3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 150 & x_6 \\ \hline -3 & -5 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & f \end{array}$$

En effectuant les opérations (ligne 1 $-$ ligne 2) et (ligne 4 $-$ (-8) ligne 2), on trouve

$$\begin{array}{cccccc|c|c|c} 1/4 & 1/2 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & 0 & 50 & x_4 \\ 3/4 & 1/2 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 50 & x_3 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 150 & x_6 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 400 & f \end{array}$$

L'élément le plus négatif de la dernière ligne (qui est en fait le seul) est -1 . Donc x_2 rentre dans la base. On a $150/2 \leq 50/(1/2)$ et, par conséquent, x_6 sort de la base. On divise la ligne 3 par 2, ce qui donne

$$\begin{array}{cccccc|c|c} 1/4 & 1/2 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & 0 & 50 & x_4 \\ 3/4 & 1/2 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 50 & x_3 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 75 & x_2 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 400 & f \end{array}$$

En effectuant les opérations (ligne 1 $- (1/2)$ ligne 3), (ligne 2 $- (1/2)$ ligne 3) et (ligne 4 $- (-1)$ ligne 3), on trouve

$$\begin{array}{cccccc|c|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 0 & 25/2 & x_4 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 0 & 25/2 & x_3 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 75 & x_2 \\ \hline 7/2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1/2 & 1 & 475 & f \end{array}$$

C'est le tableau final du simplexe puisque la dernière ligne ne comporte plus de valeur négative dans ses 6 premières colonnes. D'après ce qui a été dit plus haut, la valeur maximale de f à l'optimum doit être 475. Ce tableau final conduit au système d'équations

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 + 0f &= \frac{25}{2} \\ \frac{1}{2}x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 + 0f &= \frac{25}{2} \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \frac{1}{2}x_6 + 0f &= 75 \\ \frac{7}{2}x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 2x_5 + \frac{1}{2}x_6 + f &= 475. \end{aligned}$$

Toutes les variables devant être non négatives, la dernière équation entraîne que f a une valeur maximale de 475 lorsque $x_1 = x_5 = x_6 = 0$. En substituant ces valeurs dans les autres équations on obtient la solution optimale

$$x_2 = 75 \quad \text{et} \quad x_3 = 25/2$$

et la valeur optimale de la variable d'écart x_4 est $x_4 = 25/2$. On a

$$f(0, 75, 25/2) = 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 475.$$

3.4.3 Exemple 3

Donnons maintenant un exemple ayant plusieurs solutions. Il s'agit de

$$\begin{cases} \max f(x_1, x_2) = 8x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + x_2 \leq 32 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

avec $x_1, x_2, x_4 \geq 0$.

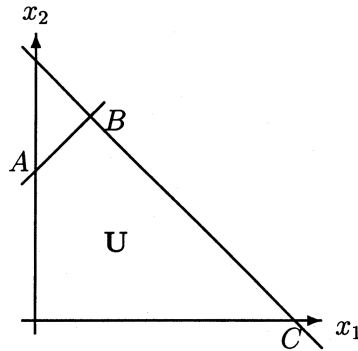
Tout point (x_1, x_2) satisfaisant ces conditions est solution optimale. La seconde équation montre que x_4 peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $[0, 16]$ et que x_2 peut prendre une valeur arbitraire dans l'intervalle $[0, 8]$. Si l'on prend $x_2 = 0$, la première équation donne $x_1 = 8$. Si $x_2 = 8$, alors elle entraîne que $x_1 = 6$. Dans ces deux cas, la valeur à l'optimum de la fonction objectif $f(x_1, x_2) = 8x_1 + 2x_2$ est égale à 64. La même valeur est obtenue pour tout point de la droite $x_1 + x_2/4 = 8$ compris entre les points $(6, 8)$ et $(8, 0)$. Par exemple, pour $x_2 = 4$, on obtient $x_1 = 7$. Tous les résultats de l'approche graphique sont ainsi retrouvés.

3.4.4 Exemple 4

Donnons maintenant un exemple où l'une des contraintes à une pente positive. On considère le programme linéaire

$$\begin{aligned} \max_x f(x) &= -x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 2. \end{aligned}$$

On a la Figure suivante



En partant de l'origine qui est un point réalisable, on obtient

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
-1	1	1	0	0	1	x_3
1	1	0	1	0	2	x_4
1	-3	0	0	1	0	f

x_2 entre dans la base et x_3 en sort. On a le nouveau tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
-1	1	1	0	0	1	x_2
2	0	-1	1	0	1	x_4
-2	0	3	0	1	3	f

x_1 entre dans la base et x_4 en sort. D'où le tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
0	1	1/2	1/2	0	3/2	x_2
1	0	-1/2	1/2	0	1/2	x_1
0	0	2	1	1	4	f

On a donc obtenu la solution optimale $x_1 = 1/2$ et $x_2 = 3/2$ qui sont les coordonnées du point B . C'est bien la solution optimale, comme on pourra le vérifier graphiquement, puisque l'on a $f(A) = 3$, $f(B) = 4$ et $f(C) = -2$.

3.4.5 Exemple 5

Donnons enfin un exemple où il faut minimiser la fonction objectif.

$$\begin{aligned}\min_x f(x) &= -x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 2.\end{aligned}$$

On voit qu'il s'agit de l'exemple précédent après avoir remplacé la maximisation par une minimisation.

On passe à un problème de maximisation en changeant les signes des coefficients de f , c'est-à-dire que l'on considère le problème

$$\max_x f(x) = x_1 - 3x_2.$$

En partant de l'origine qui est un point réalisable, on a le tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
-1	1	1	0	0	1	x_3
1	1	0	1	0	2	x_4
-1	3	0	0	1	0	f

Donc x_1 rentre dans la base et x_4 en sort. Le tableau suivant est, tous calculs faits,

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
0	2	1	1	0	3	x_3
1	1	0	1	0	2	x_1
0	4	0	1	1	2	f

Aucune des quantités des quatre premières colonnes de la dernière ligne n'étant négative, on a obtenu le tableau final. Par conséquent

$$f(x) = 2 - 4x_2 - x_4.$$

La valeur de f est maximale pour $x_2 = x_4 = 0$. En reportant ces valeurs dans les deux autres équations, on trouve que $x_1 = 2$ et $x_3 = 3$. Le minimum est donc atteint au point $C = (2, 0)$ et, comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, $f(C) = -2 < f(A) = 3 < f(B) = 4$.

Remarque 3.4

Lorsque le programme linéaire se présente sous forme de minimisation de la fonction objectif, on peut également, sans changer les signes des coefficients de f , procéder comme dans le cas de la maximisation mais en prenant comme variable entrante celle qui correspond au coefficient positif le plus grand dans la ligne de f . La variable sortante se choisit exactement comme dans le cas d'une maximisation. L'algorithme s'arrête quand la dernière ligne du tableau du simplexe ne comporte plus de quantité positive dans les colonnes qui correspondent aux variables.

3.4.6 Exercice

On propose l'exercice suivant.

On considère le programme linéaire

$$\begin{aligned}\max_x f(x) &= 3x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

1. Résoudre graphiquement ce programme linéaire.
2. Écrire ce programme linéaire sous forme standard.
3. Résoudre ce programme linéaire par l'algorithme du simplexe.

3.5 Détermination du sommet initial

On rappelle que l'origine appartient à la région réalisable (et donc est choisie comme sommet initial) lorsque les contraintes sont toutes de la forme $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ avec $b_i \geq 0$. En effet, dans ce cas là, les variables d'écart x_{n+i} sont affectées du coefficient $+1$ et, en prenant $x_1 = \dots = x_n = 0$ et $x_{n+i} = b_i$, les contraintes sont satisfaites. Lorsque l'une des contraintes s'exprime par une inégalité de sens contraire, le coefficient de la variable d'écart correspondante est -1 et cette contrainte ne peut pas être vérifiée en prenant $x_1 = \dots = x_n = 0$ et $x_{n+i} = b_i$ puisque $b_i > 0$ et $-x_{n+i} = -b_i < 0$. Il nous reste donc à voir comment déterminer le sommet initial de l'algorithme du simplexe dans ce cas.

Il faut d'abord écrire les contraintes du programme linéaire sous forme standard $Ax = b$. Supposons, sans restreindre la généralité, que $b \geq 0$ (si ce n'est pas le cas, on multiplie par -1 les équations pour lesquelles $b_i < 0$ et l'on changera le sens de l'inégalité).

On considère le programme linéaire auxiliaire

$$\begin{aligned}\min_{x,w} g(x, w) &= w_1 + \dots + w_m \\ Ax + w &= b \\ x, w &\geq 0.\end{aligned}$$

Il admet le sommet $x = 0, w = b$ comme solution réalisable. On peut donc trouver la solution optimale de ce programme linéaire auxiliaire à l'aide de l'algorithme du simplexe en prenant ce sommet comme sommet de départ. Soit x, w la solution

optimale obtenue. Si $w \neq 0$, le programme linéaire initial n'admet pas de solution réalisable. Si $w = 0$, alors x est solution réalisable du programme linéaire initial ce qui permet de démarrer l'algorithme du simplexe. En d'autres termes, on voit que la variable auxiliaire w_i mesure l'écart entre b_i et $(Ax)_i$, i -ème composante du vecteur Ax . Cet écart, qui n'est autre que la i -ème composante du vecteur résidu $r = b - Ax$, est nul si x est une solution réalisable du programme linéaire initial.

Dans le programme linéaire auxiliaire, les variables de base sont $w_1, \dots, w_m$. Il faut commencer par écrire g en fonction des variables hors base $x_1, \dots, x_n$. Cela s'effectue en exprimant $w_1, \dots, w_m$ en fonction de $x_1, \dots, x_n$, c'est-à-dire $w_i = b_i - (Ax)_i$ et en remplaçant dans l'expression de g . On arrive ainsi à

$$g(x, w) = (e, b) - (e, Ax) = (e, r) = \sum_{i=1}^m [b_i - (Ax)_i] \quad (3.3)$$

où e est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

Pour l'introduction des variables auxiliaires w_i , il faut tenir compte de la remarque fondamentale suivante : si, dans le système $Ax = b$, l'une des variables (disons x_j) n'apparaît que dans l'une des équations (disons la i -ème) et si a_{ij} et b_i sont de même signe, on n'introduira pas la variable auxiliaire w_i et x_j sera considérée comme étant la variable de base correspondant à la i -ème équation (ce qui revient, en fait, à considérer la somme $w_i + x_j$ comme une seule variable). Dans l'expression (3.3) de la fonction g , on ne prendra en compte que les équations dans lesquelles une variable auxiliaire a été effectivement introduite.

Une fois trouvé le sommet initial du programme linéaire (c'est-à-dire, une fois obtenue la solution optimale $x \neq 0$ du programme linéaire auxiliaire), il nous faudra exprimer sa fonction objectif f en fonction des variables hors base de ce sommet, c'est-à-dire en fonction des x_i qui sont nuls. Ceci peut s'effectuer simultanément à la résolution du programme linéaire auxiliaire en introduisant, dans le tableau du simplexe du programme linéaire auxiliaire, une ligne supplémentaire correspondant à la fonction objectif f et en lui faisant subir les mêmes modifications qu'aux autres lignes lors de la résolution du programme linéaire auxiliaire. Au sommet initial du programme linéaire auxiliaire, la fonction f est, bien entendu, déjà exprimée à l'aide des variables hors base de ce sommet et elle ne doit subir aucune modification.

Résumons les étapes qui conduisent à la détermination du sommet initial du programme linéaire

1. Écrire le programme linéaire sous forme standard avec $b \geq 0$,
2. Former le programme linéaire auxiliaire (sans oublier qu'il ne faut pas toujours introduire de variable auxiliaire w_i dans toutes les contraintes),
3. Exprimer la fonction objectif g du programme linéaire auxiliaire en fonction des x_i (variables hors base en son sommet initial),
4. Résoudre le programme linéaire auxiliaire à partir du sommet initial $x = 0, w = b$,
5. Obtention de la solution $w = 0, x \neq 0$ du programme linéaire auxiliaire,
6. Exprimer la fonction objectif f du programme linéaire en fonction des x_i hors base.

On résoud ensuite le programme linéaire à partir de ce point de départ et de l'expression correspondante de sa fonction objectif f .

Remarque 3.5

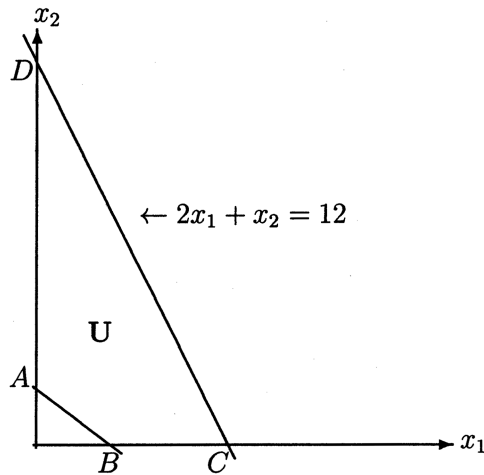
Si le programme linéaire initial n'admet pas de solution réalisable, cela indique le plus souvent une erreur dans la conception des contraintes imposées au problème ou dans les coefficients qui y apparaissent. C'est, par exemple, le cas lorsque la demande des consommateurs excède les stocks. Certaines contraintes peuvent aussi être contradictoires. De telles erreurs sont difficiles à repérer (surtout, comme on peut facilement l'imaginer, dans un programme linéaire avec plusieurs dizaines de milliers de variables).

3.5.1 Exemple 1

Donnons un premier exemple numérique.

$$\begin{aligned}\max_x f(x) &= x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 7 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 12.\end{aligned}$$

Nous avons la Figure suivante



La région réalisable est le polyèdre convexe $ABCD$ avec $A = (0, 7/4)$, $B = (7/3, 0)$, $C = (6, 0)$ et $D = (0, 12)$.

Écrivons les contraintes de notre programme linéaire sous forme standard

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 12.\end{aligned}$$

Les variables x_3 et x_4 n'apparaissent chacune que dans une seule équation. Le coefficient de x_3 dans la première équation est négatif ($= -1$) tandis que le second membre est positif ($= 7$). Nous introduisons donc la variable auxiliaire w_1 . Le coefficient de x_4 dans la seconde équation est de même signe que le second membre.

Aucune variable auxiliaire supplémentaire n'est donc introduite et x_4 jouera ce rôle. Notre problème s'écrit donc

$$\begin{aligned}\min g &= w_1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + w_1 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 12.\end{aligned}$$

Une solution réalisable est $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $w_1 = 7$ et $x_4 = 12$. Les variables de base sont donc w_1 et x_4 . Exprimons la fonction objectif auxiliaire g en fonction des variables hors base. En tirant w_1 de la première équation, nous obtenons donc

$$g = 7 - 3x_1 - 4x_2 + x_3.$$

Le tableau du simplexe pour le programme linéaire auxiliaire est

x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	f, g	b	base
3	4	-1	0	1	0	7	w_1
2	1	0	1	0	0	12	x_4
-1	-1	0	0	0	1	0	f
3	4	-1	0	0	1	7	g

Puisque nous cherchons à minimiser g (et non à la maximiser comme dans les exemples précédents), la variable entrante est déterminée par la colonne qui correspond à la plus grande valeur positive dans la dernière ligne. Il s'agit donc de x_2 . Nous avons $7/4 < 12/1$ ce qui montre que w_1 sort de la base. Divisons la ligne 1 par le pivot $a_{12} = 4$ et effectuons les combinaisons linéaires des lignes pour mettre des zéros dans la deuxième colonne des lignes 2, 3 et 4. On obtient le tableau suivant

x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	f, g	b	base
3/4	1	-1/4	0	1/4	0	7/4	x_2
5/4	0	1/4	1	-1/4	0	41/4	x_4
-1/4	0	-1/4	0	1/4	1	7/4	f
0	0	0	0	-1	1	0	g

Puisque la fonction objectif auxiliaire g vaut zéro, la solution optimale a donc été obtenue. Elle correspond à $x_2 = 7/4$ et $x_4 = 41/4$. En remplaçant x_4 par cette valeur dans la seconde équation, nous obtenons $x_1 = 0$. Le point $A = (0, 7/4)$ est solution optimale du programme linéaire auxiliaire; c'est, comme nous l'avons vu plus haut, un point réalisable du programme linéaire initial. La base est constituée de x_2 et x_4 . D'après le tableau du simplexe précédent, on voit que les contraintes du programme linéaire initial en ce point réalisable s'écrivent, en fonction de ses seules variables,

$$\begin{aligned}3x_1/4 + x_2 - x_3/4 &= 7/4 \\ 5x_1/4 + x_3/4 + x_4 &= 41/4.\end{aligned}$$

La première des contraintes est la même que celle du programme linéaire standard du début tandis que la seconde est une combinaison linéaire des deux contraintes

(pour être plus précis, elle est égale à 4 fois la seconde contrainte initiale moins la première). Le tableau du simplexe montre également que la fonction objectif du programme linéaire initial s'exprime en fonction des variables hors base x_1 et x_3 en A par

$$f(x) = x_1/4 + x_3/4 + 7/4$$

résultat que l'on peut obtenir directement en remarquant que $x_2 = (7 + x_3 - 3x_1)/4$ et donc $f = x_1 + x_2 = (4x_1 + 7 + x_3 - 3x_1)/4$. Il nous faut maximiser f .

Résolvons maintenant ce programme linéaire. Le tableau du simplexe est

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
3	4	-1	0	0	7	x_2
5	0	1	4	0	41	x_4
-1	0	-1	0	4	7	f

On voit, d'après la dernière ligne, que nous avons le choix entre x_1 et x_3 comme variable entrante. Choisissons x_3 . C'est x_4 qui sort puisque $a_{13} = -1 < 0$. On obtient le tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
8	4	0	4	0	48	x_2
5	0	1	4	0	41	x_3
4	0	0	4	4	48	f

C'est le tableau final puisque les quatre premières colonnes de la dernière ligne ne contiennent pas de valeurs négatives. Les variables hors base sont $x_1 = x_4 = 0$. On a $4x_1 + f = 48$ ce qui montre que f est maximum pour $x_1 = 0$. En remplaçant dans la première équation, on trouve que $x_2 = 12$. La solution optimale se situe donc au point D comme il est facile de le vérifier et l'on a $f(D) = 12$. Les résultats complets sont donnés dans le tableau suivant

	x_1	x_2	x_3	x_4	f
A	0	7/4	0	41/4	7/4
B	7/3	0	0	22/3	7/3
C	6	0	11	0	6
D	0	12	41	0	12

Si, au lieu de choisir x_3 comme variable entrante, nous avions pris x_1 alors, pour accéder à la solution optimale D , il aurait fallu passer auparavant par les points B puis C . Cet exemple montre l'influence du choix éventuel de la variable entrante (et éventuellement de la variable sortante) sur la complexité de l'algorithme.

3.5.2 Exemple 2

Donnons un exemple plus complet emprunté à [18].

$$\max_x f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$ax_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 13$$

où a est un paramètre.

Ajoutons une variable auxiliaire dans les deux premières équations. Puisque x_4 n'apparaît que dans la troisième équation avec le même signe que le second membre, une variable auxiliaire ne sera pas introduite dans cette équation et x_4 jouera ce rôle. Nous aurons donc finalement le programme linéaire auxiliaire

$$\begin{aligned} ax_1 + 2x_2 + x_3 + w_1 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + w_2 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 &= 13 \\ \min_{x,w} g(x, w) &= w_1 + w_2. \end{aligned}$$

Une solution réalisable est $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $w_1 = 2$, $w_2 = 12$, $x_4 = 13$. Exprimons la fonction objectif auxiliaire g en fonction des variables hors base. En tirant w_1 de la première équation et w_2 de la seconde (ou, ce qui revient au même comme nous l'avons dit plus haut, en retranchant la somme des deux premières équations aux deux membres de la fonction objectif), nous obtenons

$$g(x, w) = 14 - (a + 1)x_1 - 3x_2 - 6x_3$$

c'est-à-dire que, dans la dernière ligne du tableau du simplexe, nous écrirons

$$(a + 1)x_1 + 3x_2 + 6x_3 + g = 14.$$

Nous allons considérer deux cas selon la valeur du paramètre a .

Prenons d'abord $a = 1$. Le tableau du simplexe est

x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	f, g	b	base
1	2	1	0	1	0	0	2	w_1
1	1	5	0	0	1	0	12	w_2
1	2	6	1	0	0	0	13	x_4
-1	-1	-1	-1	0	0	1	0	f
2	3	6	0	0	0	1	14	g

On voit que x_3 rentre dans la base (car 6 est la plus grande valeur positive de la dernière ligne) et que w_1 en sort (car $2/1 < 13/6 < 12/5$). Le nouveau tableau du simplexe est

x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	f, g	b	base
1	2	1	0	1	0	0	2	x_3
-4	-9	0	0	-5	1	0	2	w_2
-5	-10	0	1	-6	0	0	1	x_4
0	1	0	-1	1	0	1	2	f
-4	-9	0	0	-6	0	1	2	g

On voit que, dans la dernière ligne, tous les coûts réduits des différentes variables sont négatifs ou nuls. On a donc obtenu la solution optimale du programme linéaire auxiliaire. La dernière ligne de ce tableau nous donne

$$g(x, w) = 2 + 4x_1 + 9x_2 + 6w_1.$$

Le minimum est donc atteint pour $x_1 = x_2 = w_1 = 0$. En reportant dans la seconde ligne du tableau, on obtient $w_2 = 2$. Par conséquent $w \neq 0$, ce qui montre que la programme linéaire initial n'a pas de solution réalisable.

Prenons maintenant $a = 0$. Le tableau du simplexe est

x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	f, g	b	base
0	2	1	0	1	0	0	2	w_1
1	1	5	0	0	1	0	12	w_2
1	2	6	1	0	0	0	13	x_4
-1	-1	-1	-1	0	0	1	0	f
1	3	6	0	0	0	1	14	g

La variable x_3 rentre dans la base et w_1 en sort. On a

x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	f, g	b	base
0	2	1	0	1	0	0	2	x_3
1	-9	0	0	-5	1	0	2	w_2
1	-10	0	1	-6	0	0	1	x_4
-1	1	0	-1	1	0	1	2	f
1	-9	0	0	-6	0	1	2	g

La variable x_1 rentre dans la base et x_4 en sort. Le nouveau tableau du simplexe est

x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	f, g	b	base
0	2	1	0	1	0	0	2	x_3
0	1	0	-1	1	1	0	1	w_2
1	-10	0	1	-6	0	0	1	x_1
0	-9	0	0	-5	0	1	3	f
0	1	0	-1	0	0	1	1	g

La variable x_2 rentre dans la base. Pour savoir quelle variable doit sortir de la base, on voit que $2/2 = 1/1$. On peut donc faire sortir soit x_3 soit w_2 . Mais il faut nous rappeler que le but est d'obtenir un vecteur w nul. On a donc intérêt à faire sortir w_2 (voir, en exercice, ce qu'il se passe si c'est x_3 que l'on fait sortir). On obtient

x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	f, g	b	base
0	0	1	2	-1	-2	0	0	x_3
0	1	0	-1	1	1	0	1	x_2
1	0	0	-9	4	10	0	11	x_1
0	0	0	-9	4	9	1	12	f
0	0	0	0	-1	-1	1	0	g

C'est le tableau final puisqu'aucune quantité de la dernière ligne n'est strictement positive. Les variables hors base sont x_4 , w_1 et w_2 . Puisqu'elles sont nulles, la dernière ligne du tableau nous donne $g = 0$ et le minimum a bien été atteint. En reportant les valeurs des variables hors base dans les contraintes, on obtient $x_1 = 11$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 0$. C'est un point réalisable pour le programme linéaire initial. En ce point, les contraintes du programme linéaire initial deviennent

$$\begin{aligned}x_3 + 2x_4 &= 0 \\x_2 - x_4 &= 1 \\x_1 - 9x_4 &= 11\end{aligned}$$

et sa fonction objectif s'écrit à l'aide des variables hors base

$$\max_x f(x) = 9x_4 + 12.$$

Le tableau du simplexe pour le programme linéaire initial est donc

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	base
0	0	1	2	0	0	x_3
0	1	0	-1	0	1	x_2
1	0	0	-9	0	11	x_1
0	0	0	-9	1	12	f

3.5.3 Exercice 1

On propose l'exercice suivant.

On considère le programme linéaire

$$\begin{aligned}\max_x f(x) &= 3x_1 + 2x_2 \\5x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\x_1 - x_2 &\leq 1 \\x_1 + x_2 &\leq 3 \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

1. Trouver graphiquement puis à l'aide de l'algorithme du simplexe, un point de départ réalisable.
2. Donner l'expression de f en fonction des variables hors base en ce point.

3.5.4 Exercice 2

On considère le programme linéaire suivant

$$\begin{aligned}\max_x f(x) &= x_1 + x_2 \\x_1 + x_2 &\geq 2 \\x_1 + x_2 &\leq 7 \\3x_2 - x_1 &\leq 9 \\3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Les sommets de la région réalisable sont

$$A = (2, 0)$$

$$B = (0, 2)$$

$$C = (0, 3)$$

$$D = (3, 4)$$

$$E = (4, 3)$$

$$F = (6, 0).$$

Puisque l'origine n'est pas un sommet réalisable, il faut commencer par déterminer le sommet initial. Lorsque que l'on résoud le programme linéaire auxiliaire qui permet cette détermination, on verra qu'on a le choix entre les points de départ A et B . Si l'on prend A comme point de départ, on trouve que la solution optimale se situe en E alors que, si l'on part de B , on l'obtient en D .

Expliquer pourquoi et en tirer les conclusions.

Chapitre 4

PRÉSENTATION THÉORIQUE DE L'ALGORITHME DU SIMPLEXE

En première lecture, cette Section peut être omise, sauf les définitions 4.1–4.5 qui sont utilisées dans la Section 5.

Grâce aux exemples précédents, nous commencerons par formaliser l'algorithme du simplexe. Pour cela, nous suivrons l'exposé de [19].

Puis, ensuite, nous présenterons l'algorithme du simplexe de façon plus théorique.

4.1 Formalisation de l'algorithme du simplexe

Supposons le programme linéaire écrit sous forme standard et partons donc de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$$

où les m dernières colonnes correspondent aux variables d'écart. Nous dénoterons les colonnes de la matrice A par $A^1, \dots, A^{n+m}$. Les contraintes $Ax = b$ s'écrivent donc

$$x_1 A^1 + \cdots + x_{n+m} A^{n+m} = b.$$

Nous voulons minimiser la fonction objectif $f(x) = (c, x)$.

Supposons que nous connaissions un sommet réalisable (on verra, dans la Section 4.5.3, la théorie qui permet de le déterminer). En ce point, n variables au moins sont nulles et m variables au plus sont différentes de zéro. Pour simplifier, supposons que $x_{m+1} = \cdots = x_{n+m} = 0$ et que les m variables $x_1, \dots, x_m$ soient non nulles. Alors, en ce sommet, on a

$$x_1 A^1 + \cdots + x_m A^m = b \quad (4.1)$$

et la valeur correspondante de la fonction objectif est

$$f_1 = c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m. \quad (4.2)$$

Supposons que les vecteurs $A^1, \dots, A^m \in \mathbb{R}^m$ soient linéairement indépendants. Ils forment donc une base et tout vecteur A^i peut s'écrire dans cette base. Nous poserons donc

$$A^j = \gamma_1^j A^1 + \cdots + \gamma_m^j A^m, \quad j = 1, \dots, n+m. \quad (4.3)$$

Posons également

$$h_j = \gamma_1^j c_1 + \cdots + \gamma_m^j c_m - c_j, \quad j = 1, \dots, n+m. \quad (4.4)$$

Nous allons maintenant essayer de diminuer (puisque nous traitons un problème de minimisation de la fonction objectif) la valeur de f_1 en incluant une dose θx_k , $\theta > 0$, de la variable x_k pour $k > m$. Il nous faut déterminer la valeur de θ . Pour préserver les contraintes, multiplions (4.3) par θ pour $j = k$ et soustrayons de (4.1). On obtient

$$(x_1 - \theta\gamma_1^k)A^1 + \cdots + (x_m - \theta\gamma_m^k)A^m + \theta A^k = b.$$

Multiplions (4.4) par θ pour $j = k$ et soustrayons de (4.2). Cela donne comme nouvelle valeur de la fonction objectif

$$(x_1 - \theta\gamma_1^k)c_1 + \cdots + (x_m - \theta\gamma_m^k)c_m + \theta c_k = f_1 - \theta h_k.$$

Bien entendu, ce changement n'est profitable que si $h_k > 0$ puisque l'on veut minimiser la fonction objectif. Pour que cette diminution de la fonction objectif soit la plus importante possible, il faut prendre θ le plus grand possible sans que l'un des coefficients $x_i - \theta\gamma_i^k$ devienne négatif. Par conséquent, il faut prendre θ tel que

$$\theta = \min_i \frac{x_i}{\gamma_i^k}.$$

Soit p l'indice qui réalise ce minimum, c'est-à-dire tel que $\theta = x_p/\gamma_p^k$. Avec ce choix de θ , le coefficient de c_p dans la fonction objectif devient nul, les autres sont non négatifs et nous obtenons comme nouvelle valeur de la fonction objectif

$$f'_1 = f_1 - \theta h_k \leq f_1.$$

On a ainsi une nouvelle base en échangeant les vecteurs A^k et A^p .

Il nous faut maintenant exprimer tous les vecteurs dans la nouvelle base. Nous avons

$$A^k = \gamma_1^k A^1 + \cdots + \gamma_m^k A^m.$$

Tirons A^p de cette relation

$$A^p = \frac{1}{\gamma_p^k} (A^k - \gamma_1^k A^1 - \cdots - \gamma_{p-1}^k A^{p-1} - \gamma_{p+1}^k A^{p+1} - \cdots - \gamma_m^k A^m)$$

et substituons le dans (4.3)

$$\begin{aligned} A^j &= \gamma_1^j A^1 + \cdots + \gamma_{p-1}^j A^{p-1} + \frac{\gamma_p^j}{\gamma_p^k} (A^k - \gamma_1^k A^1 - \cdots - \gamma_{p-1}^k A^{p-1} - \gamma_{p+1}^k A^{p+1} - \cdots \\ &\quad - \gamma_m^k A^m) + \gamma_{p+1}^j A^{p+1} + \cdots + \gamma_m^j A^m. \end{aligned}$$

On obtient donc, puisque A^p a remplacé A^k ,

$$A^j = \tilde{\gamma}_1^j A^1 + \cdots + \tilde{\gamma}_{p-1}^j A^{p-1} + \tilde{\gamma}_k^j A^k + \tilde{\gamma}_{p+1}^j A^{p+1} + \cdots + \tilde{\gamma}_m^j A^m$$

avec

$$\tilde{\gamma}_i^j = \begin{cases} \gamma_i^j - (\gamma_p^j/\gamma_p^k)\gamma_i^k, & i \neq p \\ \gamma_i^j/\gamma_i^k, & i = p. \end{cases}$$

En substituant A^p dans (4.1), on a de même

$$x'_1 A^1 + \cdots + x'_{p-1} A^{p-1} + x'_k A^k + x'_{p+1} A^{p+1} + \cdots + x'_m A^m = b$$

avec

$$x'_i = \begin{cases} x_i - (x_p/\gamma_p^k)\gamma_i^k, & i \neq p \\ x_i/\gamma_i^k, & i = p. \end{cases}$$

De plus, on trouve facilement que h_j se transforme en

$$h'_j = \tilde{\gamma}_1^j c_1 + \cdots + \tilde{\gamma}_m^j c_m - c_j = h_j - (\gamma_p^j/\gamma_p^k)h_k$$

et, comme nous l'avons déjà vu plus haut,

$$f'_1 = f_1 - (x_p/\gamma_p^k)h_k.$$

De façon compacte, on peut résumer toutes ces relations dans le tableau suivant

$$\begin{pmatrix} x_1 & \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \cdots & \gamma_1^{n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m & \gamma_m^1 & \gamma_m^2 & \cdots & \gamma_m^{n+m} \\ f_1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Appelons γ_p^k le *pivot*. On passe d'un tableau au tableau suivant en divisant d'abord tous les éléments de la ligne du pivot par ce pivot. Il devient donc égal à 1. Puis, en effectuant des combinaisons linéaires de cette ligne avec les autres lignes du tableau, on rend nuls tous les éléments de la colonne k autres que le pivot. Les éléments des autres colonnes sont modifiés selon les relations qui viennent d'être données.

On répète l'ensemble de cette étape de l'algorithme du simplexe jusqu'à ce que tous les h_j soient négatifs ou jusqu'à ce, pour un certain h_k positif, tous les γ_i^k soient négatifs ou nuls. Dans le premier cas, la solution optimale obtenue est aussi bonne que toute autre solution optimale, adjacente ou non. Dans le second cas, θ peut être pris arbitrairement grand et la fonction objectif ne possède pas de minimum.

4.2 Définitions, notations et résultats préliminaires

Nous allons maintenant passer à une présentation théorique de l'algorithme du simplexe. Celle-ci est empruntée aux livres de Ciarlet [5] et Sakarovitch [18].

Commençons par un certain nombre de définitions et de notations. Nous passerons ensuite à des résultats préliminaires. Les démonstrations ne seront pas données ici.

Les premières définitions à donner ont trait aux bases. On rappelle que la matrice A qui intervient dans un programme linéaire possède m lignes et n colonnes avec $m \leq n$.

Définition 4.1

Soit $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ un ensemble de m indices et soit A_I la matrice $m \times m$ formée par les colonnes A^i de A pour lesquelles $i \in I$. De même, soit $x_I \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de composantes x_i pour $i \in I$. On dit que I est une base si la matrice A_I est régulière. A_I s'appelle la matrice de base associée à I et

$$x_I = (A_I)^{-1}b \quad \text{et} \quad x_i = 0 \quad \text{si} \quad i \notin I$$

s'appelle la solution de base correspondant à la base I . Si cette solution est réalisable, on parle alors de solution de base réalisable.

On voit donc que la solution de base est obtenue en fixant à 0 les variables hors base et en résolvant le système $m \times m$ restant. À une base il correspond donc une et une seule solution de base. L'inverse n'est pas vrai. Il peut exister des solutions de base qui proviennent de bases différentes, c'est-à-dire que deux bases différentes peuvent donner la même solution. On parle alors de *dégénérescence*. Naturellement, ce cas pose des problèmes pratiques que nous verrons plus loin. Considérons, par exemple,

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 3 \\3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 7.\end{aligned}$$

La solution $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$ est associée aux deux bases $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 4\}$. En effet, pour la base $\{1, 2, 3\}$, $x_4 = 0$ puisqu'il est hors base. On voit que $x_1 = x_2 = 1$ et $x_3 = 0$ est solution des trois équations précédentes. Pour la seconde base, x_3 est nul puisqu'il est hors base et la solution $x_1 = x_2 = 1$ et $x_4 = 0$ vérifie les contraintes.

Un cas de dégénérescence est celui où $b = 0$. En effet, la solution $x = 0$ est associée à n'importe quelle base.

Soit c_I le vecteur formé par les composantes c_i de c pour $i \in I$.

Définition 4.2

On dit qu'un programme linéaire standard est sous forme canonique si

1 - A_I est, à une permutation près de ses colonnes, la matrice identité (de dimension m),

2 - $c_I = 0$.

On pose $\tilde{c} = c - A^T d_I$ avec $d_I = (A_I)^{-T} c_I$. Le vecteur d_I s'appelle le vecteur multiplicatif relatif à la base I et $\tilde{c}$ le coût réduit relatif à la base I (c'est un vecteur). On parlera aussi de coût réduit relatif à chaque variable.

Définition 4.3

On dit qu'une base I est réalisable si la solution de base qui lui correspond est réalisable.

On considère le cas d'un programme linéaire où il faut maximiser la fonction objectif. On a le

Théorème 4.4

Soit I est une base réalisable. Si le coût réduit relatif à I est négatif ou nul, alors la solution de base qui lui est associée est une solution optimale du programme linéaire.

C'est ce théorème qui justifie la

Définition 4.5

Une base I dont le coût réduit est négatif ou nul s'appelle une base optimale. La solution correspondante s'appelle solution optimale de base.

Remarque 4.6

Dans le cas d'un programme linéaire où il faut minimiser (au lieu maximiser) la fonction objectif, il faut, dans le théorème et la définition précédents, remplacer négatif par positif.

Voyons maintenant d'autres définitions et résultats.

- Un sous-ensemble U de points d'un espace vectoriel est dit *convexe* si, quelques soient deux points de U , le segment qui les joint appartient lui aussi entièrement à U . En d'autres termes, si $u, v \in U$, alors, quelque soit $\lambda \in [0, 1]$, $w = \lambda u + (1 - \lambda)v \in U$.
- On appelle *polyèdre* l'ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^n$ défini par

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au \leq b\}.$$

C'est une généralisation de la notion de polygone convexe (non nécessairement borné) du plan.

Remarquons que Au s'écrit aussi

$$\sum_i u_i A^i$$

où les u_i sont les composantes du vecteur u et les A^i les colonnes (qui sont des vecteurs) de la matrice A .

- Soient $u \in U, w \in U$, U convexe, $0 < \lambda < 1$ et $u = \lambda v + (1 - \lambda)w$. Si ces conditions impliquent que $w = u = v$, on dit que u est un *point extrémal* de U .
- Un point extrémal d'un polyèdre s'appelle un *sommet* (même notion que dans le plan).

Dans la suite, U sera l'ensemble des vecteurs u qui satisfont $Au = b$ avec $u \geq 0$.

À un point quelconque $u \in U$, on associe l'ensemble d'indices

$$I^+(u) = \{1 \leq i \leq n \mid u_i > 0\}.$$

Si l'origine appartient à U (de façon équivalente, si $b = 0$), c'est un sommet puisque les conditions $\lambda u + (1 - \lambda)v = 0$ avec $u, v \geq 0$ et $\lambda \in]0, 1[$ impliquent $u = v = 0$. De plus, $I^+(0) = \emptyset$ où $\emptyset$ désigne l'ensemble vide (c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément).

Pour les autres sommets, on a le

Théorème 4.7

Un point $u \in U, u \neq 0$ est un sommet de U si et seulement si les vecteurs A^i , pour $i \in I^+(u)$, sont linéairement indépendants.

L'algorithme du simplexe repose sur le résultat fondamental suivant

Théorème 4.8

Si un programme linéaire a une solution, alors au moins l'un des sommets de U est aussi solution.

On a la conséquence suivante

Corollaire 4.9

Si U n'est pas vide, il possède au moins un sommet. Les sommets sont en nombre fini.

4.3 Description de l'algorithme du simplexe

Nous avons vu que la solution optimale d'un programme linéaire se trouve en l'un des sommets de U et que, d'autre part, ces sommets sont en nombre fini. Cependant, il est exclu d'évaluer la fonction objectif en chacun d'eux, cela étant beaucoup trop coûteux. L'algorithme du simplexe consiste à évaluer la fonction objectif f aux sommets de U , en passant d'un sommet à l'autre par une stratégie particulière qui fait décroître la fonction objectif (nous considérons le cas où il faut minimiser f). Si la décroissance est stricte, on atteindra obligatoirement la solution en un nombre fini d'étapes.

S'il n'y a pas décroissance stricte de la fonction objectif, un phénomène de *cyclage* peut se produire. L'éventualité où le minimum de la fonction objectif est $-\infty$ n'est pas exclue, l'algorithme du simplexe étant même capable de reconnaître ce cas en l'absence de cyclage.

4.4 Autres définitions et résultats

On désigne par A^i la i -ème colonne de la matrice A . Avec les notations précédentes, le programme linéaire s'écrit

$$\begin{aligned} &\text{trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ qui minimise } (c, x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ &\text{sous les contraintes } \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i A^i = b, & A^i \in \mathbb{R}^m \\ x_i \geq 0, & i = 1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sans restreindre la généralité, on supposera que la matrice A est de rang m , ce qui impose $m \leq n$. En effet, si A est de rang $m' < m$ alors soit U est vide et le problème n'a pas de solution, soit on peut extraire du système $Ax = b$ un sous-ensemble de m' équations dont la matrice est de rang m' .

Il est nécessaire de distinguer deux types de sommets. Exprimons d'abord de façon différente la définition d'un sommet

Définition 4.10

Un point $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ est un sommet de U si et seulement si

$$\begin{cases} u_i \geq 0, & i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n u_i A^i = \sum_{i \in I^+(u)} u_i A^i = b \end{cases}$$

où les vecteurs $A^i \in \mathbb{R}^m, i \in I^+(u)$, sont linéairement indépendants et où $I^+(u) = \{1 \leq i \leq n \mid u_i > 0\}$.

Un sommet est dit

$$\begin{aligned} &\text{non dégénéré si } \text{card}(I^+(u)) = m, \\ &\text{dégénéré si } \text{card}(I^+(u)) < m, \end{aligned}$$

où $\text{card}(I^+(u))$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble $I^+(u)$ (ce nombre s'appelle de *cardinal* de l'ensemble u).

On voit donc que, si l'origine appartient à U , alors c'est un sommet dégénéré puisque $I^+(0)$ est l'ensemble vide et donc $\text{card}(I^+(0)) = 0$.

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, il va être nécessaire d'associer à chaque sommet exactement m vecteurs A^i linéairement indépendants. Dans le cas d'un sommet dégénéré, $\text{card}(I^+(u)) = m' < m$ et l'on complétera les m' vecteurs $A^i, i \in I^+(u)$, par $m - m'$ vecteurs $A^i, i \notin I^+(u)$, de sorte que les m vecteurs ainsi obtenus soient linéairement indépendants. Ceci est toujours possible (puisque l'on a supposé que A est de rang m), mais pas de façon unique. Nous sommes donc conduits à la définition équivalente suivante pour un sommet

Définition 4.11

Un point $u \in \mathbb{R}^n$ est un sommet de U si et seulement si il existe un ensemble $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ avec $\text{card}(I) = m$ tel que

$$\begin{cases} u_i > 0, & i \in I \quad \text{et} \quad u_i = 0, & i \notin I \\ \sum_{i=1}^n u_i A^i = \sum_{i \in I} u_i A^i = b \end{cases}$$

où les vecteurs $A^i \in \mathbb{R}^m, i \in I$, sont linéairement indépendants.

Dans ce cas, on dit que $A^i, i \in I$, est une base associée au sommet u .

La base associée à un sommet non dégénéré est définie de manière unique tandis que celle associée à un sommet dégénéré ne l'est pas nécessairement.

4.5 Une étape de l'algorithme

Décrivons maintenant une étape de l'algorithme du simplexe, c'est-à-dire le passage d'un sommet au suivant. Le choix du sommet initial sera discuté plus loin.

Nous nous placerons dans le cas où la fonction objectif doit être minimisée.

4.5.1 Passage d'un sommet au suivant

Supposons connu un sommet u de U , de base A^i avec $i \in I$. Pour passer au sommet suivant (lorsque cela est possible) on va remplacer l'un des vecteurs A^i de la base (c'est-à-dire avec $i \in I$) par un vecteur A^j hors base (c'est-à-dire, avec $j \notin I$). On aura ainsi défini la nouvelle base associée au nouveau sommet.

Soit j un indice n'appartenant pas à I . Puisque les vecteurs A^i pour $i \in I$ forment une base, le vecteur A^j peut s'écrire

$$A^j = \sum_{i \in I} \gamma_i^j A^i$$

où les nombres γ_i^j sont définis de façon unique.

Soit θ un nombre réel quelconque. On a, en remplaçant A^j par son expression,

$$\sum_{i \in I} (u_i - \theta \gamma_i^j) A^i + \theta A^j = \sum_{i \in I} u_i A^i = b.$$

On en déduit que tous les points de composantes

$$\begin{cases} u_i - \theta \gamma_i^j, & i \in I \\ \theta, & i = j \\ 0, & i \notin I \cup \{j\} \end{cases}$$

appartiennent à U si $0 \leq \theta \leq \theta^j$ où

$$\theta^j = \min_{i \in I} \{u_i / \gamma_i^j \mid \gamma_i^j > 0\}.$$

En ces points, la fonction objectif f vaut

$$\sum_{i \in I} c_i(u_i - \theta \gamma_i^j) + \theta c_j = f(u) + \theta(c_j - \sum_{i \in I} \gamma_i^j c_i).$$

Donc, pour diminuer strictement la valeur de la fonction objectif, il faut que $\theta^j > 0$ et que $(c_j - \sum_{i \in I} \gamma_i^j c_i) < 0$.

Il faut que le point correspondant à $\theta = \theta^j$ soit dans U si $0 < \theta^j < \infty$, et c'est effectivement ce que l'on peut démontrer.

Il faut distinguer plusieurs cas selon les signes des nombres qui interviennent dans les relations précédentes

– **cas A**

si tous les nombres $(c_j - \sum_{i \in I} \gamma_i^j c_i)$ sont positifs ou nuls pour $j \notin I$, le sommet u est une solution optimale du programme linéaire,

– **cas B**

si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire s'il existe au moins un indice $j \notin I$ tel que $(c_j - \sum_{i \in I} \gamma_i^j c_i) < 0$, alors il faut passer à un autre sommet en annulant au moins l'une des nouvelles composantes $u_i - \theta \gamma_i^j$, $i \in I$, pour une certaine valeur finie de θ . On va voir que cette valeur ne peut être que $\theta = \theta^j$.

Ce cas se subdivise en trois

– *cas B1*

s'il existe au moins un indice $j \notin I$ pour lequel

$$(c_j - \sum_{i \in I} \gamma_i^j c_i) < 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in I, \gamma_i^j \leq 0,$$

alors il est impossible d'annuler l'une des nouvelles composantes. On a $\inf_{v \in U} f(v) = -\infty$ et le programme linéaire n'a pas de solution,

– *cas B2*

s'il existe au moins un indice $j' \notin I$ pour lequel on a

$$(c_{j'} - \sum_{i \in I} \gamma_i^{j'} c_i) < 0,$$

$$\gamma_i^{j'} > 0 \quad \text{pour au moins un indice } i \in I,$$

$$i \in I \text{ et } \gamma_i^{j'} > 0 \text{ entraînent } u_i = 0,$$

alors le point u' correspondant à

$$\theta = \theta^{j'} = \min_{i \in I} \{u_i / \gamma_i^{j'} \mid \gamma_i^{j'} > 0\} > 0$$

est un sommet de U , différent de u , et l'on a

$$f(u') < f(u).$$

Ce sommet est associé à la nouvelles base A^j , $j \in I'$, avec $I' = (I - \{j''\}) \cup \{j'\}$ où $j'' \in I$ est l'un quelconque des indices tels que $\theta^{j'} = u_{j''} / \gamma_{j''}^{j'}$,

– cas B3

s'il existe au moins un indice $j \notin I$ tel que $(c_j - \sum_{i \in I} \gamma_i^j c_i) < 0$ et si, pour chacun des indices pour lesquels cette inégalité est vérifiée, on a $\gamma_i^j > 0$ et $u_i = 0$ pour au moins un indice $i \in I$, alors on peut associer une autre base au même sommet u . Il y a donc non décroissance de la fonction objectif f et, dans ce cas, on peut avoir affaire à un phénomène de cyclage. Nous en donnerons un exemple plus loin (exemple 5).

Faisons maintenant un certain nombre de remarques concernant la mise en œuvre pratique de la méthode.

1. Si les cas B1 et B2 se produisent simultanément, on se placera dans le cas B1 qui termine l'algorithme.
2. Lorsque l'on se trouve dans le cas B2 (qui est le plus fréquent) il existe plusieurs stratégies pour choisir entre les différents indices $j \notin I$ pour lesquels $\theta^j > 0$. On peut prendre celui qui assure la plus grande diminution de la fonction objectif (c'est ce choix que nous avons fait dans les exemples numériques précédents et suivants), ou le plus petit d'entre eux, ou celui qui correspond au plus petit nombre $(c_j - \sum_{i \in I} \gamma_i^j c_i) < 0$.
3. Dans le cas B3, pour choisir entre les divers vecteurs A^j , $j \notin I$, qui peuvent être introduits dans la base, on prend en général celui de plus petit indice.
4. Le cas B3 se produit si le sommet est dégénéré mais ce n'est pas obligatoire.
5. Les cas A et B1 arrêtent l'algorithme. Les cas B2 ne peuvent être qu'en nombre fini.

Si un sommet $u \in U$ est connu trois éventualités, qui s'excluent mutuellement, peuvent se produire

1. Une suite finie de cas B2 et/ou B3 terminée par un cas A : le dernier sommet obtenu est solution du programme linéaire.
2. Une suite finie de cas B2 et/ou B3 terminée par un cas B1 : le problème n'a pas de solution.
3. Une suite finie de cas B2 et/ou B3, puis une suite infinie de cas B3 : cela se produit si l'on retrouve la même base après un nombre fini de cas B3 consécutifs. C'est le phénomène de cyclage et l'algorithme ne permet pas de conclure. Cependant, dans les problèmes réels, on constate que ce cas ne se présente jamais et, donc, aucune stratégie pour l'éviter n'est incluse dans les logiciels.