
STATISTIQUE

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Effectifs relatifs	2
Le signe de sommation Σ	3
Moyenne, variance, écart type	4
Formule améliorée pour le calcul de la variance	5
Effectifs cumulés	6
Interpolation linéaire	7
Médiane d'une famille de nombres	8
Médiane d'un caractère statistique	9
Caractère réduit	20
Histogramme normé	21
Courbe de Gauss	22
Fonction cumulative Φ	23
Distribution normale	24
Table de la fonction Φ	25

EXERCICES

§ 1. INTRODUCTION

En statistique, on désigne par **population** "tout ensemble défini d'objets de même nature". Ces objets présentent tous un certain **caractère**, qu'il s'agit d'étudier pour en révéler les tendances principales.

Exemples

Population	Elèves d'une classe	Poulets d'un élevage	Tiges usinées	Ampoules électriques
Caractère	Note de français	Poids	Longueur	Durée de vie

Un caractère statistique est soit de nature **discrète** (il ne peut prendre que des valeurs réelles isolées), soit de nature **continue** (il peut prendre toute valeur d'un certain intervalle réel).

Dans le cas discret, on regroupe souvent les données en un tableau où figurent les k valeurs possibles $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, ainsi que les **effectifs** correspondants $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ (n_i est le nombre de fois que la valeur x_i est prise par le caractère).

Dans le cas continu, on regroupe les valeurs possibles du caractère en **classes** de même amplitude.

Exemple 1 (caractère discret)

Dans une classe de 25 élèves, les notes (x_i) mises pour une dictée se sont présentées avec les effectifs (n_i) suivants :

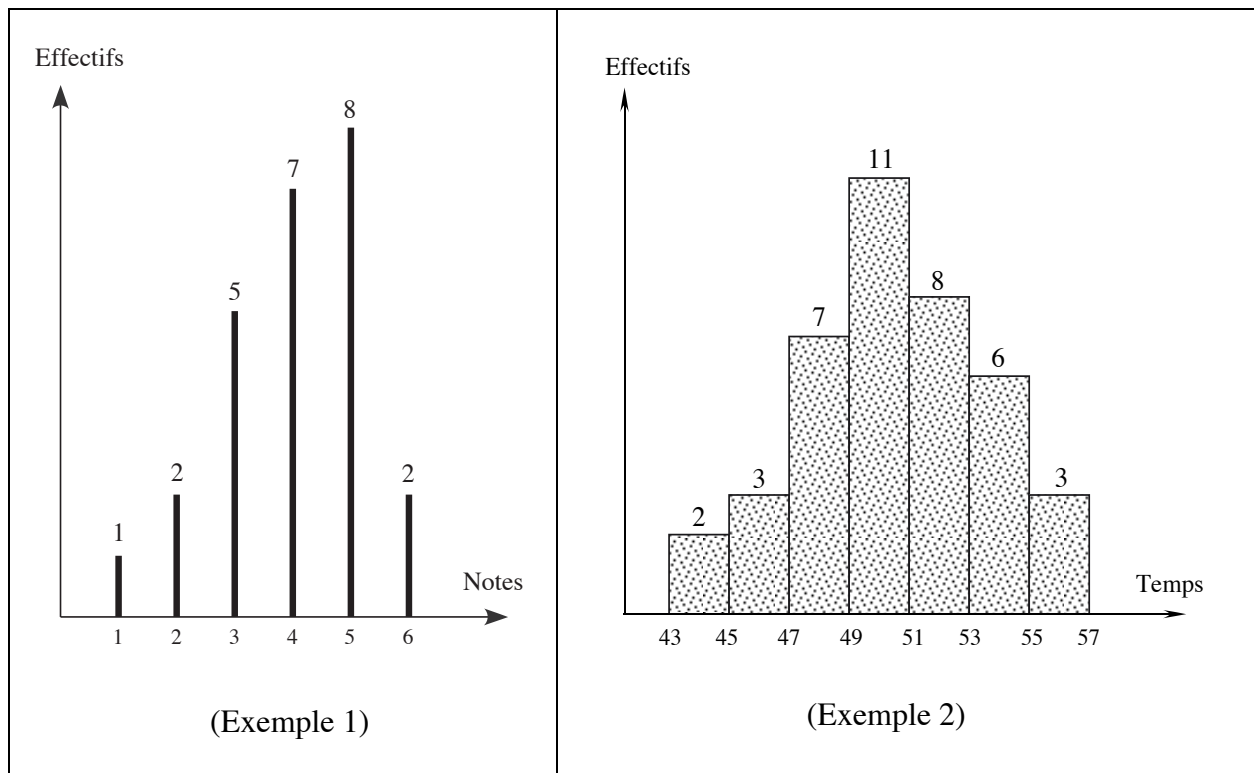
Notes x_i	Effectifs n_i
1	1
2	2
3	5
4	7
5	8
6	2

Exemple 2 (*caractère continu*)

Lors d'une course pédestre, les temps (en minutes) des 40 participants se distribuent comme suit :

Temps	Centres des classes x_i	Effectifs n_i
[43 ; 45 [	44	2
[45 ; 47 [	46	3
[47 ; 49 [	48	7
[49 ; 51 [	50	11
[51 ; 53 [	52	8
[53 ; 55 [	54	6
[55 ; 57 [	56	3

Les données des deux exemples ci-dessus peuvent être visualisées au moyen d'un *diagramme en bâtons* (cas discret) ou d'un *histogramme* (cas continu) :



§ 2. EFFECTIFS RELATIFS

Il est souvent intéressant de faire figurer dans un tableau statistique, pour chaque valeur x_i que peut prendre le caractère (ou pour chaque classe dans le cas d'une distribution continue) la proportion p_i des individus (ou objets) qui présentent cette valeur x_i . Ces proportions sont appelées **effectifs relatifs** ou **fréquences**. Si n est l'effectif total ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$), alors, par définition :

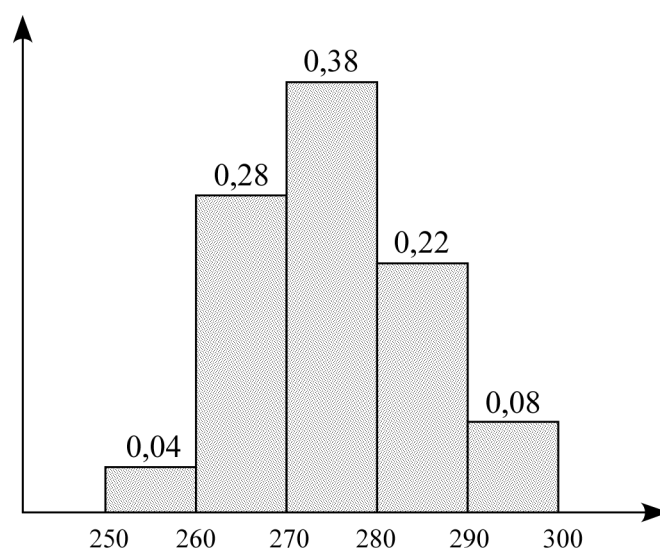
$$p_i = \frac{n_i}{n}$$

Exemple

Durée de vie, en heures, d'un certain type de tube néon, testée sur un échantillon de 50 tubes :

Durée de vie	Effectifs n_i	Effectifs relatifs p_i
[250 ; 260 [	2	$2/50 = 0,04 = 4\%$
[260 ; 270 [	14	$14/50 = 0,28 = 28\%$
[270 ; 280 [	19	$19/50 = 0,38 = 38\%$
[280 ; 290 [	11	$11/50 = 0,22 = 22\%$
[290 ; 300 [	4	$4/50 = 0,08 = 8\%$

Graphiquement, on construit l'**histogramme des effectifs relatifs** :



A noter : $p_1 + p_2 + \dots + p_k = \frac{1}{n}(n_1 + n_2 + \dots + n_k) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$.

§ 3. LE SIGNE DE SOMMATION Σ

Définition

Soient $p \leq n$ deux entiers et $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_n$ une suite de nombres. Pour abréger l'écriture de la somme $a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$, on se sert du signe Σ ("sigma") :

$$\sum_{i=p}^n a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$$

("somme de $i = p$ à n des a_i ")

Exemples

1. $\sum_{i=4}^9 i^2 = 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 =$ somme des carrés des entiers de 4 à 9.
2. $\sum_{i=0}^{50} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50 =$ somme des 51 premiers entiers.
3. $\sum_{k=0}^{50} 2k = 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 98 + 100 =$ somme des nombres pairs de 0 à 100.
4. $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} =$ somme des inverses des entiers entre 1 et n .
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = 0,33333\dots = \frac{1}{3}$.

Propriétés

1. $\sum_{i=p}^n \alpha a_i = \alpha \sum_{i=p}^n a_i$
2. $\sum_{i=p}^n (a_i + b_i) = \left(\sum_{i=p}^n a_i \right) + \left(\sum_{i=p}^n b_i \right)$
3. $\sum_{i=p}^n \left(\sum_{j=q}^m a_{ij} \right) = \sum_{j=q}^m \left(\sum_{i=p}^n a_{ij} \right)$

§ 4. MOYENNE, VARIANCE, ÉCART TYPE

On considère un caractère statistique x défini sur une population de taille n .

La moyenne m , la variance v et l'écart type s de ce caractère sont définis comme suit :

1. Données non groupées

Le caractère prend les valeurs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

$$\begin{aligned}m &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\v &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - m^2 \\s &= \sqrt{v}\end{aligned}$$

2. Données groupées

Le caractère prend n_1 fois la valeur x_1 , n_2 fois la valeur x_2 , ... , n_k fois la valeur x_k .
($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)

$$\begin{aligned}m &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i \\v &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - m)^2 n_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i \right) - m^2 \\s &= \sqrt{v}\end{aligned}$$

3. Données groupées par classes

Les valeurs du caractère ont été rangées dans k classes contiguës de même largeur. Ces classes, de centres respectifs $x_1, x_2, \dots, x_k$, contiennent respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ valeurs du caractère. ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)

$$\begin{aligned}m &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i \\v &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - m)^2 n_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i \right) - m^2 \\s &= \sqrt{v}\end{aligned}$$

§ 5. FORMULE AMÉLIORÉE POUR LE CALCUL DE LA VARIANCE

Par définition, la variance v est donnée par :

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \text{moyenne des "écarts quadratiques"}$$

Montrons que :

$$v = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - m^2$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i m + m^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2x_i m + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2m}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} n m^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2m^2 + m^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - m^2. \end{aligned}$$

Exemple

$$x_1 = 7 ; x_2 = 5 ; x_3 = 8 ; x_4 = 9$$

$$m = \frac{7+5+8+9}{4} = \frac{29}{4} = 7,25$$

$$v = \frac{49+25+64+81}{4} - \left(\frac{29}{4} \right)^2 = \frac{219}{4} - \frac{841}{16} = \frac{35}{16} = 2,1875$$

$$s \cong 1,48$$

Remarque

$$v = (\text{moyenne des carrés}) - (\text{carré de la moyenne})$$

§ 6. EFFECIFS CUMULÉS

On s'intéresse parfois à la partie d'une population dont les individus présentent un caractère inférieur (ou supérieur) à une valeur donnée. Cela amène naturellement l'ajout d'une nouvelle colonne au tableau habituel (classes | effectifs).

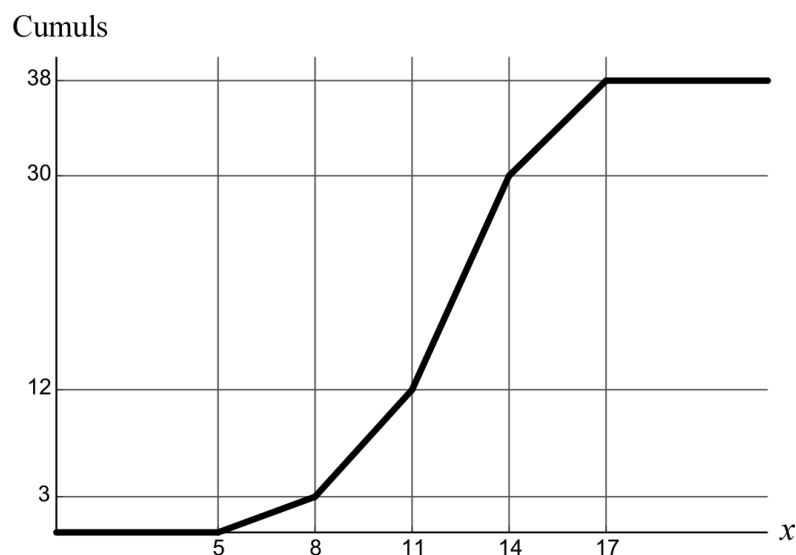
Soit par exemple un caractère x associé à un échantillon de 38 individus, distribué comme indiqué dans les deux premières colonnes du tableau suivant :

Classes	Effectifs n_i	Effectifs cumulés N_i
$[5 ; 8 [$	3	3
$[8 ; 11 [$	9	12
$[11 ; 14 [$	18	30
$[14 ; 17 [$	8	38

La troisième colonne donne le cumul des effectifs : le chiffre figurant dans la i -ème ligne est la somme des effectifs des lignes 1 à i .

L'effectif cumulé correspondant à la troisième ligne, 30, fournit donc le nombre d'individus dont le caractère est inférieur à 14, c'est-à-dire à la borne supérieure de la troisième classe.

Le cumul des effectifs peut être représenté graphiquement par la ***courbe polygonale des effectifs cumulés*** :

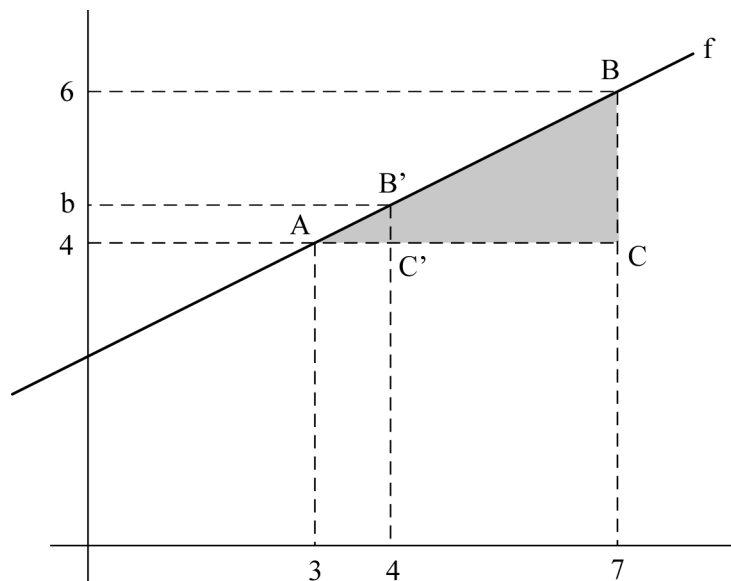


Définition

Nous nommerons ***fonction cumulative*** la fonction dont le graphe est la courbe des effectifs cumulés.

§ 7. INTERPOLATION LINÉAIRE

Considérons par exemple la fonction affine f telle que $f(3)=4$ et $f(7)=6$:



Il s'agit de déterminer rapidement l'image b de $x=4$.

x	$f(x)$
3	4
4	b
7	6

En appliquant le théorème de Thalès à la figure ci-dessus, on obtient :

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC} \Leftrightarrow \frac{b-4}{6-4} = \frac{4-3}{7-3} \Leftrightarrow \frac{b-4}{2} = \frac{1}{4}$$

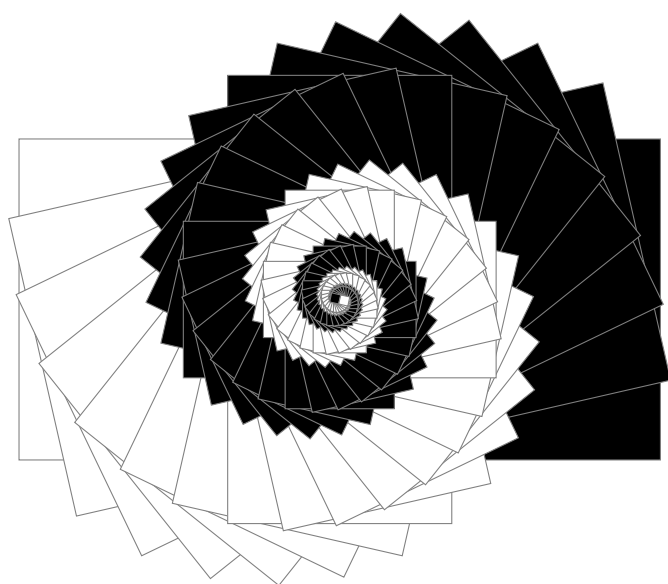
$$\Leftrightarrow b-4 = \frac{1}{4} \cdot 2 \Leftrightarrow b = 4 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \boxed{4,5}$$

Voici un autre exemple, selon le même principe :

x	$f(x)$
3	4
a	5,5
7	6

On cherche cette fois la préimage a du nombre 5,5 par la fonction affine f :

$$\frac{a-3}{7-3} = \frac{5,5-4}{6-4} \Leftrightarrow \frac{a-3}{4} = \frac{1,5}{2} \Leftrightarrow a-3 = \frac{1,5}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow a = 3 + \frac{1,5}{2} \cdot 4 = \boxed{6}$$



§ 8. MÉDIANE D'UNE FAMILLE DE NOMBRES

Considérons n nombres réels, non nécessairement distincts, et rangeons-les dans l'ordre croissant :

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$$

On définit la médiane M de ces nombres comme suit :

- Si n est impair : $M = x_{(n+1)/2}$ (c'est le « nombre du milieu »)
- Si n est pair : $M = \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{n/2+1})$ (c'est la moyenne des deux « nombres centraux »)

Exemples

a) 9 nombres : 6 ; 31 ; 3,5 ; 2 ; 17 ; 5,1 ; 2 ; 6 ; 6.

Dans l'ordre croissant : 2 ; 2 ; 3,5 ; 5,1 ; **6** ; 6 ; 6 ; 17 ; 31.

$$M = x_{(9+1)/2} = x_5 = \boxed{6}.$$

b) 10 nombres : 1 ; 7 ; 2,5 ; 6 ; 4,2 ; 3 ; 54 ; 2 ; 7 ; 5.

Dans l'ordre croissant : 1 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; **4,2** ; **5** ; 6 ; 7 ; 7 ; 54.

$$M = \frac{1}{2}(x_{10/2} + x_{10/2+1}) = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(4,2 + 5) = \boxed{4,6}.$$

On voit qu'il y a dans la famille considérée autant de nombres inférieurs à M que de nombres supérieurs à M .

Remarque

La médiane n'est pas sensible aux « valeurs extrêmes ». Dans l'exemple b) qui précède, on peut remplacer le 54 par 1000 (ou par 5,1) sans que la médiane ne change. C'est la raison pour laquelle on préfère la médiane à la moyenne dans certain cas, comme celui-ci :

Salaire des 7 collaborateurs d'une petite entreprise :

5'500 ; 5'500 ; 5'600 ; 5'650 ; 6'200 ; 7'500 ; 35'000 (le patron !)

Le salaire moyen est de 10'136 tandis que le salaire médian n'est que de 5'650.

§ 9. MÉDIANE D'UN CARACTÈRE STATISTIQUE

- **Cas discret**

Dans le cas d'une population finie de taille n , si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les valeurs du caractère – non nécessairement distinctes, – la médiane du caractère est, par définition, celle de la famille de nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$.

- **Cas continu**

Les données sont regroupées par classes et l'on détermine les effectifs cumulés ainsi que la courbe polygonale des effectifs cumulés. Soient n l'effectif total et F la fonction cumulative (dont le graphe est la courbe des effectifs cumulés). La médiane M est alors définie par :

$$F(M) = \frac{n}{2} = 50\% \text{ de l'effectif total}$$

Remarque. Cette définition s'utilisera également dans le cas discret si les valeurs du caractère sont « nombreuses ».

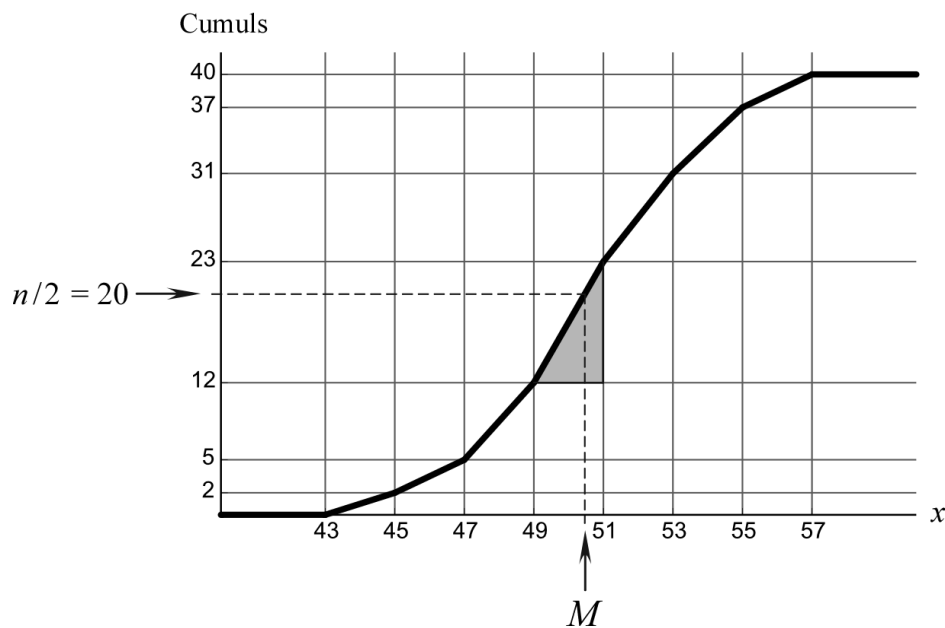
Exemple

On reprend la course pédestre de l'exemple 2 du §1. Il y a $n = 40$ participants.

- Données groupées et calcul des effectifs cumulés :

Temps	Effectifs n_i	Effectifs cumulés N_i
[43 ; 45 [	2	2
[45 ; 47 [	3	5
[47 ; 49 [	7	12
[49 ; 51 [	11	23
[51 ; 53 [	8	31
[53 ; 55 [	6	37
[55 ; 57 [	3	40

- Courbe des effectifs cumulés :



Il faut trouver un nombre M tel que $F(M) = n/2 = 20$. À l'aide du théorème de Thalès appliqué dans le triangle grisé, on trouve :

$$\frac{M - 49}{51 - 49} = \frac{20 - 12}{23 - 12} \Leftrightarrow M - 49 = \frac{20 - 12}{23 - 12} \cdot (51 - 49) = \frac{8}{11} \cdot 2 \Leftrightarrow M = 49 + \frac{8}{11} \cdot 2 \cong \boxed{50,45}$$

On peut aussi, sans passer par le graphique, procéder par interpolation linéaire :

49	12	
M	20	$\Rightarrow M = 49 + \frac{20 - 12}{23 - 12} \cdot (51 - 49) \cong \boxed{50,45}$
51	23	

§ 20. CARACTÈRE RÉDUIT

A tout caractère x de moyenne m et d'écart-type s , on peut associer son caractère *réduit* x^* défini par :

$$x^* = \frac{x - m}{s}$$

Exemple

Un étudiant a obtenu la note $x = 8,4$ à un examen de mathématiques dont la moyenne était $7,5$ et l'écart type $1,2$. Sa note *réduite* est donc $x^* = \frac{8,4 - 7,5}{1,2} = 0,75$.

Théorème

La moyenne du caractère réduit est égale à **0**. L'écart-type du caractère réduit est égal à **1**.

Preuve

- *Moyenne*

$$\begin{aligned} m^* &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - m}{s} = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^n (x_i - m) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m \right) \\ &= \frac{1}{s} \left(m - \frac{1}{n} nm \right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

- *Variance*

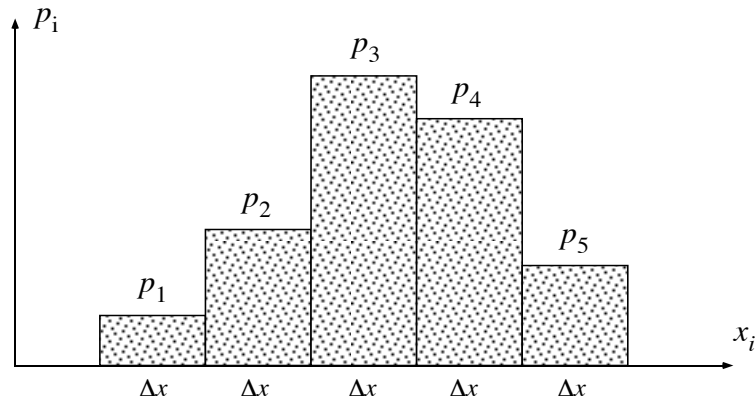
$$\begin{aligned} v^* &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^*)^2 - 0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m}{s} \right)^2 = \frac{1}{ns^2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i m + m^2) \\ &= \frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2m}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m^2 \right) = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2m^2 + \frac{1}{n} nm^2 \right) \\ &= \frac{1}{v} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2m^2 + m^2 \right) = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - m^2 \right) = \frac{v}{v} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

- *Ecart type*

$$s^* = \sqrt{v^*} = \sqrt{1} = \mathbf{1}$$

§ 21. HISTOGRAMME NORMÉ

Considérons l'histogramme des effectifs relatifs d'un caractère x construit à partir de classes de même amplitude Δx :

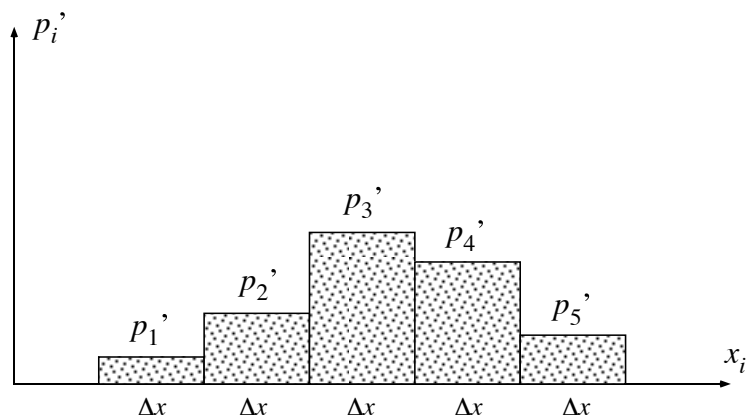


Le calcul qui suit montre que l'aire de la région grisée est égale à Δx :

$$\text{Aire grisée} = \sum_{i=1}^k p_i \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^k p_i = \Delta x$$

Si donc l'on remplace les effectifs relatifs p_i par $p_i' = \frac{p_i}{\Delta x}$ pour dessiner l'histogramme, l'aire de celui-ci vaudra **1**.

Le nouvel histogramme ainsi défini, d'aire unité, est appelé *histogramme **normé*** du caractère x .



Faisons remarquer que l'aire du i -ème rectangle de l'histogramme normé est égale à $p_i' \cdot \Delta x = p_i$, donc à la proportion (pourcentage) des individus appartenant à la i -ème classe.

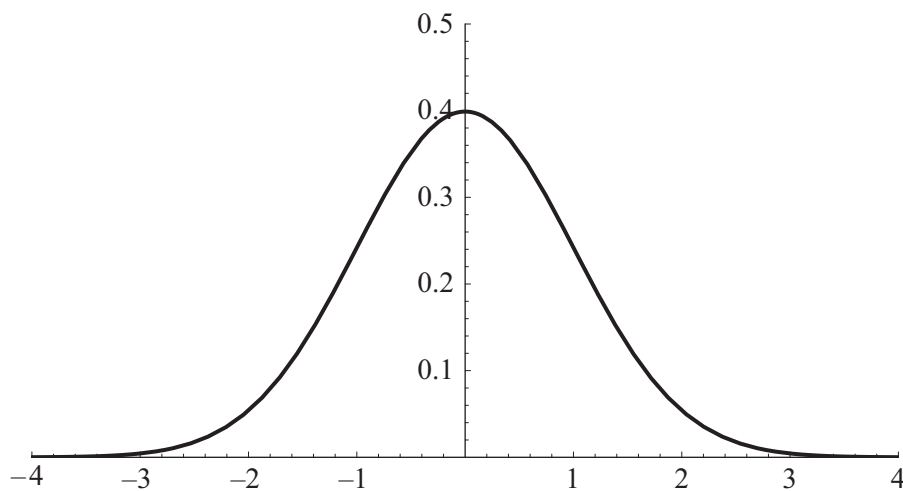
On en déduit que *la proportion des individus qui présentent un caractère compris entre deux valeurs données a et b ($a < b$) est environ égale à l'aire de la partie de l'histogramme normé comprise entre les verticales d'abscisses a et b .*

§ 22. COURBE DE GAUSS

On appelle *courbe de Gauss (centrée et réduite)* le graphe de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

où e désigne la "base du logarithme naturel" : $e \cong 2,718$.



Comme $g(-x) = g(x)$ pour tout x , la courbe de Gauss est symétrique relativement à l'axe Oy .

Elle est entièrement située au-dessus de l'axe Ox , bien qu'elle en devienne extrêmement proche pour $x < -4$ ou $x > 4$.

De plus, on démontre que

l'aire de la région comprise entre la courbe et l'axe Ox est égale à 1,

l'unité d'aire étant donnée par le rectangle de sommets $(0 ; 0)$, $(1 ; 0)$, $(1 ; 1)$ et $(0 ; 1)$.

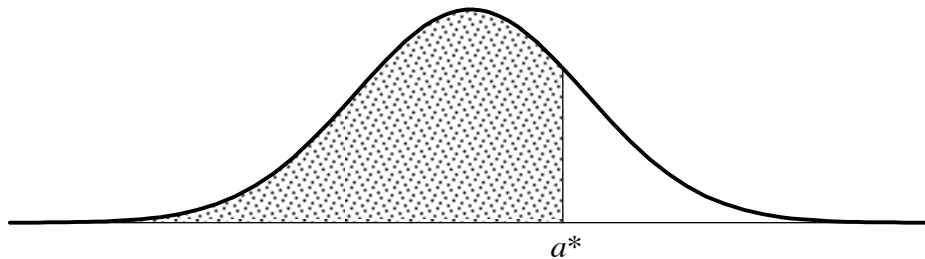
§ 24. DISTRIBUTION NORMALE

Un caractère x de moyenne m et d'écart-type s est dit **distribué normalement** si l'"escalier" bordant l'histogramme *normé* de $x^* = \frac{x-m}{s}$ est "proche" de la courbe de Gauss

$$y = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Dans ce cas, la **proportion (pourcentage) des individus présentant un caractère inférieur au nombre a** , notée $p(x < a)$, sera approximativement égale à l'aire sous g entre $-\infty$ et

$$a^* = \frac{a-m}{s} :$$



Ainsi :

$$p(x < a) = p(x^* < a^*) \cong \Phi(a^*)$$

De même, la proportion des individus ayant un caractère compris entre les nombres a et b peut se calculer au moyen de la fonction cumulative Φ : $p(a \leq x < b) = p(a^* \leq x^* < b^*) \cong$ aire sous g entre a^* et $b^* = \Phi(b^*) - \Phi(a^*)$.

$$p(a \leq x < b) \cong \Phi(b^*) - \Phi(a^*)$$

Exemple

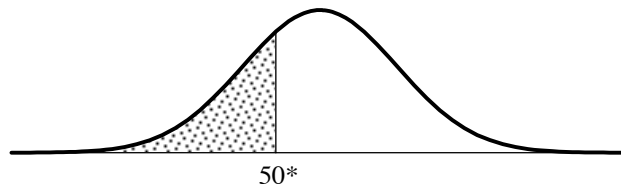
Lors de l'épreuve de mathématiques de la Maturité 2018, évaluée sur 100 points, la moyenne obtenue par les étudiants vaudois a été de 58,2 points, avec un écart-type de 14,3. La distribution des notes étant supposée *normale*, déterminer :

- a) La proportion des étudiants dont le nombre de points fut inférieur à 50.
- b) La proportion des étudiants dont le nombre de points fut compris entre 80 et 90.

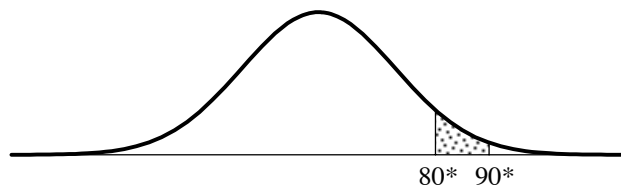
Solution

Soit x le caractère "note de l'étudiant". Comme la distribution de x est supposée normale, l'histogramme normé de $x^* = \frac{x - 58,2}{14,3}$ est proche de la courbe de Gauss. On peut donc se servir de la fonction cumulative Φ pour répondre aux deux questions :

$$\text{a) } p(x < 50) = p(x^* < 50^*) = p\left(x^* < \frac{50 - 58,2}{14,3}\right) \cong p(x^* < -0,57) \cong \Phi(-0,57) \cong 0,28 = 28\%$$



$$\begin{aligned} \text{b) } p(80 < x < 90) &= p(80^* < x^* < 90^*) \cong p(1,524 < x^* < 2,224) \cong \Phi(2,224) - \Phi(1,524) \\ &\cong 0,9869 - 0,9362 = 0,0507 \cong 5,1\% \end{aligned}$$



§ 25 A. TABLE DE LA FONCTION $\Phi : u < 0$

$\Phi(u)$ = aire sous la courbe de Gauss entre $-\infty$ et u

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-4.0	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08692	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
-1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
-0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
-0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
-0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
-0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

Exemple : $\Phi(-1,54)$ se lit à l'intersection de la ligne "-1.5" et de la colonne "4" : 0,06178 .

§ 25 B. TABLE DE LA FONCTION $\Phi : u \geq 0$

$\Phi(u)$ = aire sous la courbe de Gauss entre $-\infty$ et u

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Exemple : $\Phi(1,13)$ se lit à l'intersection de la ligne "1.1" et de la colonne "3" : 0,87076.

EXERCICES

1. Ecrire sans le signe Σ :

a) $\sum_{i=1}^3 2i$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^4 x^k$$

c) $\sum_{i=3}^6 i \cdot x^i$

$$\text{d) } \sum_{p=1}^2 \alpha_p \mathbf{e}_p$$

e) $\sum_{i=1}^5 \frac{(-1)^i}{i}$

f) $\sum_{p=0}^3 a^p b^{3-p}$

g) $\sum_{k=0}^4 (2k+1)$

$$\text{h) } n = \sum_{i=1}^3 n_i$$

$$\text{i) } \sum_{i=1}^3 x_i n_i$$

j) $\sum_{i=1}^3 (x_i - 3) \cdot n_i$

Rép.

$$\begin{aligned} f) & (x_1 - 3)n_1 + (x_2 - 3)n_2 + (x_3 - 3)n_3 \\ g) & 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \quad h) \quad n = n_1 + n_2 + n_3 \quad i) \quad x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 \\ d) & x_1 e_1 + x_2 e_2 \quad e) \quad -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \quad f) \quad b^3 + a b^2 + a^2 b + a^3 \\ a) & 2 + 4 + 6 \quad b) \quad x + x^2 + x^3 + x^4 \quad c) \quad 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 \end{aligned}$$

2. Ecrire au moyen du signe Σ :

1) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

2) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$

Rép. 1) $\sum_{i=1}^{10} i$

$$2) \sum_{i=1}^8 2i$$

3. Ecrire au moyen du signe Σ :

1) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$

$$2) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$3) \quad \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$$

4) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7$

5) $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{7}{100000}$

6) $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$

Rép. 1) $\sum_{k=1}^5 a_{2k}$

$$2) \sum_{i=0}^5 \frac{1}{2^i}$$

$$3) \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{e}_i$$

$$4) \sum_{i=0}^7 (-1)^i x^i$$

$$5) \sum_{i=1}^5 \frac{7}{10^i}$$

$$6) \sum_{i=0}^5 a^{5-i} b^i$$

4. Calculer $x = \sum_{n=0}^3 f(n) \cdot 10^n$ et $y = \sum_{n=-2}^3 g(n) \cdot 10^n$, sachant que :

n	-2	-1	0	1	2	3
$f(n)$	0	0	3	7	9	1
$g(n)$	8	1	7	2	0	1

Rép. $x = 1973$; $y = 1027,18$

5. Lors d'une course pédestre, les temps des 50 participants, en minutes et secondes, ont été :

10 15	13 59	14 05	13 50	15 52	10 40	14 01	12 50	09 25	13 05
12 05	11 24	13 00	16 30	12 08	17 40	10 55	14 50	17 20	13 21
10 03	13 21	15 45	13 56	08 10	12 30	14 29	12 50	11 20	11 20
12 14	14 01	11 51	15 30	13 01	15 56	12 35	14 40	12 52	14 30
08 32	16 05	10 35	13 36	16 51	15 09	11 03	17 25	09 50	12 56

- a) Grouper les données ci-dessus en classes de largeur 2', à partir de $b_0 = 8'$.
 [b_0 = borne inférieure de la première classe.]
 b) Les représenter au moyen d'un histogramme.

6. a) 5 personnes se présentent à un examen, et obtiennent les notes suivantes :

$$x_1 = 3,5 / x_2 = 3 / x_3 = 5 / x_4 = 4,5 / x_5 = 4$$

Calculer la moyenne m , la variance v et l'écart type s du caractère x = note.

- b) Même question pour 5 autres personnes dont les résultats sont :

$$x_1 = 2 / x_2 = 1,5 / x_3 = 6 / x_4 = 5,5 / x_5 = 5$$

Rép. a) $m = 4 / v = 0,5 / s = 0,707$ b) $m = 4 / v = 3,5 / s = 1,871$

7. Au laboratoire de physique, une série de mesures de l'accélération de la pesanteur terrestre a donné les résultats suivants :

$$9.95 / 9.85 / 10.13 / 9.69 / 9.47 / 9.98 / 9.87 / 9.46 / 10.0$$

- a) Calculer la moyenne et la variance de ces résultats.
 b) Recalculer la variance, mais avec la "formule améliorée" $v = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - m^2$.

Rép. $m = 9,8\bar{2}$; $v = 0,04926$

8. Les températures mensuelles moyennes de 5 villes suisses ont été les suivantes (entre 1901 et 1960) :

a) Bâle	0.2	1.4	5.2	8.9	13.4	16.6	18.4	17.6	14.3	9.2	4.3	1.4
b) Neuchâtel	0.0	1.0	4.9	8.8	13.4	16.6	18.6	17.9	14.7	9.2	4.3	1.3
c) Genève	0.2	1.1	4.9	8.7	13.1	16.5	18.3	17.6	14.3	9.1	4.5	1.5
d) Lausanne	0.2	1.2	5.0	8.5	13.0	16.2	18.2	17.6	14.5	9.5	4.5	4.4
e) Sion	-0.2	1.6	6.2	10.3	14.9	18.0	19.6	18.6	15.3	10.0	4.6	0.8

Calculer pour chaque ville la température moyenne annuelle et l'écart type.

Rép. Bâle : 9,24 / 6,43 Neuchâtel : 9,23 / 6,61 Genève : 9,15 / 6,42
 Lausanne : 9,40 / 6,13 Sion : 9,98 / 6,98

9. On a pesé 100 poussins âgés de 2 semaines. Les résultats de ces pesées ont été regroupés par classes de centres x_i et d'effectifs n_i :

x_i :	78	83	88	93	98	103	108	113	118	123	128	133
n_i :	1	1	4	9	14	20	17	15	10	5	3	1

Calculer la moyenne et l'écart type des poids.

Rép. $m = 106,25$; $s = 10,52$

10. Les notes obtenues par 35 candidats lors d'un examen de baccalauréat ont été :

3.5 5.0 4.5 3.5 3.5 5.0 2.0 4.0 5.0 3.5 3.0 2.5 5.5 4.0 5.0 5.0 5.5 4.0
 4.0 3.5 1.5 3.5 4.0 5.5 5.0 4.5 3.0 4.5 3.5 5.5 4.0 3.5 3.5 3.0 2.5

Grouper ces données dans un tableau du type (x_i, n_i) . Les représenter par un diagramme en bâtons. Calculer la moyenne et l'écart type.

Rép. $m = 3,957$; $s = 1,0097$

11. Les salaires mensuels payés aux ouvriers d'une entreprise se répartissent comme suit :

4	ouvriers gagnent entre	2400	et	2700	francs
21	ouvriers gagnent entre	2700	et	3000	francs
104	ouvriers gagnent entre	3000	et	3300	francs
163	ouvriers gagnent entre	3300	et	3600	francs
121	ouvriers gagnent entre	3600	et	3900	francs
57	ouvriers gagnent entre	3900	et	4200	francs
22	ouvriers gagnent entre	4200	et	4500	francs
10	ouvriers gagnent entre	4500	et	4800	francs

Calculer le salaire mensuel moyen ainsi que l'écart type.

Rép. $m = 3559,36$; $s = 393,6$

12. En 1984-1985 les Hautes Ecoles suisses comptaient 72'604 étudiants qui se répartissaient comme suit :

Sciences humaines	41'626
Sciences exactes	12'301
Médecine	10'870
Ingénieurs	7'807

Calculer l'effectif relatif de ces différents domaines.

Rép. 0,573 ; 0,169 ; 0,150 ; 0,108

13. Lors d'un contrôle de circulation routière, on a relevé les vitesses suivantes (arrondies à l'entier inférieur ou égal) :

117	134	130	113	127	125	98	110	124	122
126	101	106	121	121	104	124	117	109	128
134	146	111	139	123	124	130	123	120	133
111	143	145	111	110	119	114	104	126	99
140	105	119	134	128	119	137	109	122	130
92	104	113	130	120	84	166	138	129	119

- Grouper ces données par classes d'amplitude 10, à partir de $b_0 = 80$.
[b_0 désigne la borne inférieure de la première classe.]
- Calculer la moyenne et l'écart type.
- Dessiner l'histogramme des effectifs relatifs.

Rép. $m = 121,67$; $s = 14,45$

14. Une usine teste la durée de vie d'un lot de 20 petits moteurs pour jouets qu'elle fabrique. On a mesuré les durées de vie suivantes (en heures) :

738	935	642	721	693	742	786	1214	630	429
221	475	1035	594	750	936	994	627	844	838

Déterminer la moyenne et l'écart type.

Rép. $m = 742,2$; $s = 220,2$

16. Voici les résultats obtenus dans le cours de comptabilité du professeur Lecompte :

6.8	5.2	4.9	5.6	6.9
7.4	4.1	5.9	7.9	8.1
4.2	5.7	6.0	8.8	8.7
4.7	6.5	5.5	6.8	6.5
5.0	7.8	6.1	9.0	8.5
6.5	6.6	7.2	6.3	9.5

- a) Grouper ces notes en classes d'amplitude 1, à partir de $b_0 = 4$, et construire l'histogramme des effectifs relatifs.
b) Calculer la moyenne et l'écart type.

Rép. $m = 6,63$; $s = 1,41$

17. Le salaire mensuel moyen des employés d'une entreprise est de 3480 francs ; celui des hommes de l'entreprise est de 4000 francs, alors que celui des femmes est de 3200 francs.
Quelle est la répartition hommes/femmes du personnel ?

Rép. 35 % ; 65 %

18. Un caractère est distribué comme indiqué ci-dessous. Construire l'histogramme des effectifs relatifs. Vérifier que l'aire de l'histogramme est égale à 1 .

Classes	n_i
$[3,5 ; 4,5 [$	2
$[4,5 ; 5,5 [$	4
$[5,5 ; 6,5 [$	4
$[6,5 ; 7,5 [$	6
$[7,5 ; 8,5 [$	3
$[8,5 ; 9,5 [$	1

20. La moyenne obtenue lors d'une épreuve par un groupe de 300 étudiants en statistique est de 4,34. Les 50 meilleurs ont une moyenne de 5,00 alors que les 10 plus mauvais ont eu une moyenne de 2,00. Quelle est la moyenne des 240 autres ?

Rép. 4,30

21. Le tableau ci-dessous donne les résultats d'une enquête sur le poids en kg des individus d'une population.

48	72	54	80	58	70	69	58	57	60
85	94	78	81	64	49	54	57	57	62
63	69	72	71	82	87	64	65	73	58
61	67	49	52	60	66	69	89	84	82
73	70	72	58	64	51	65	77	79	80
59	57	81	78	76	79	68	67	53	59

- Ranger ces données en classes d'amplitude 5, à partir de $b_0 = 45$, et calculer les effectifs.
- Déterminer la moyenne et l'écart type.

Rép. $m = 67,75$; $s = 11,344$

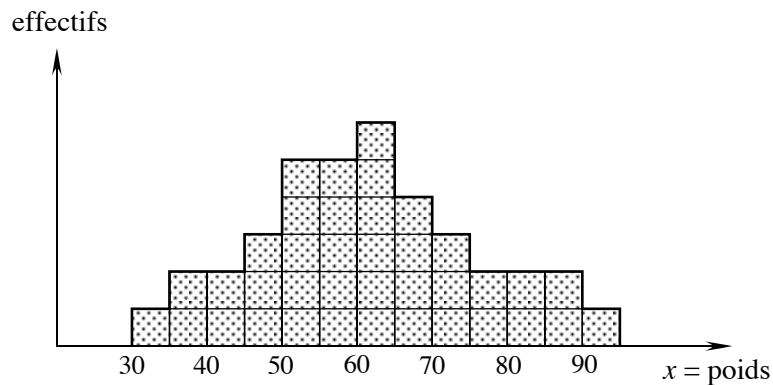
22. On considère le tableau statistique suivant :

x_i	n_i
3	7
5	12
x_3	15
10	6

Calculer x_3 sachant que la variance est égale à 6,84 et que les x_i sont rangés de manière croissante.

Rép. $x_3 = 9$

25. On considère l'histogramme ci-dessous relatif au poids x (en kg) des individus d'une certaine population.



Déterminer : (en supposant que le poids n'est jamais exactement un nombre entier)

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $p(x < 50)^*$ | b) $p(x < 100)$ | c) $p(30 \leq x < 40)$ |
| d) $p(60 \leq x < 70)$ | e) $p(70 \leq x < 81)$ | f) $p(52 \leq x < 65)$ |
| g) $p(x \geq 82)$ | h) $p(x < 46)$ | i) $p(x < 29)$ |

Rép. a) 21,1% b) 100% c) 7,9% d) 26,3% e) 14,2% f) 36,8%
 g) 11,1% h) 14,7% i) 0%

26. Le tableau qui suit donne l'âge des ouvriers d'une entreprise :

Age	Nombre	Age	Nombre
20 – 25	35	40 – 45	90
25 – 30	45	45 – 50	74
30 – 35	70	50 – 55	51
35 – 40	105	55 – 60	30

- a) Construire un histogramme illustrant ces données.
 b) Déterminer le nombre d'ouvriers dont l'âge est compris entre 28 ans et 48 ans.

Rép. b) 327,4 (!)

* $p(\text{"condition sur } x\text{"})$ est, par définition, la proportion des individus dont le caractère x vérifie la condition donnée.

40. Déterminer la moyenne, la médiane et le mode des nombres suivants :

a) 3 ; 5 ; 2 ; 6 ; 5 ; 9 ; 5 ; 2 ; 8 ; 6

b) 51,6 ; 48,7 ; 50,3 ; 49,5 ; 48,9

Rép. a) 5,1 ; 5 ; 5 b) 49,8 ; 49,5 ; aucun

41. On a rangé les résultats de 20 mesures dans l'ordre croissant :

119	125	126	128	132	135	135	135	136	138
138	140	140	142	142	144	144	145	145	146

Déterminer la médiane et les quartiles.

Rép. $M = 138$; $Q_1 = 133,5$; $Q_2 = 138$; $Q_3 = 143$

42. On a rangé les résultats de 20 mesures dans l'ordre croissant :

147	147	147	148	149	150	150	152	153	154
155	157	158	161	163	163	165	168	173	176

Déterminer la médiane et les quartiles.

Rép. $M = 154,5$; $Q_1 = 149,5$; $Q_2 = 154,5$; $Q_3 = 163$

43. Les salaires horaires de cinq employés sont respectivement 25,20 fr, 39,60 fr, 32,80 fr, 92,00 fr et 37,50 fr. Calculer le salaire horaire moyen et le salaire horaire médian.

Rép. $m = 45,42$; $M = 37,50$

44. Une clinique fait une étude sur la façon dont la varicelle se transmet. Elle a enregistré le nombre de frères et sœurs de chacun des patients atteints par cette maladie contagieuse. Voici les données brutes :

1	1	2	3	1	0	2	4	2	0	0	1
3	0	2	2	3	5	0	1	6	3	0	1
2	3	0	2	1	4	1	2	3	1	2	0
0	2	2	4	7	2	3	3	0	1	1	2
1	1	2	5	0	3	1	2	4	2	1	1

- Identifier la population.
- Identifier le caractère statistique (ou variable statistique).
- Ce caractère est-il discret ou continu ?
- Dresser le tableau des effectifs cumulés.
- Construire la courbe des effectifs cumulés.

Rép. a) les patients atteints de varicelle b) le nombre de frères et sœurs c) discret

45. Calculer la médiane de chacun de ces trois tests et comparer avec les moyennes :

1	BANDINI	Sylvain	6.5	5.5	8.0
2	BLOCH	Sylvain	4.5	4.5	7.0
3	BONZON	Stéphane	8.5	7.0	6.5
4	BURDET	Sam	7.5	6.5	6.0
5	BURRI	Pierre	5.0	7.5	6.5
6	CRAINIC	Philippe	3.0	10.0	1.5
7	DARDEL	Paul	4.0	5.5	6.0
8	DUBEY	Michael	5.0	7.0	8.0
9	DUBIGNY	Mathias	6.0	6.5	7.0
10	DUPOND	Lucia	8.0	9.0	9.0
11	DUPONT	Luc	6.0		7.5
12	JAKUES	Jonathan	9.0	6.0	2.0
13	JUILLERAT	Jean-Luc	4.0	7.5	2.5
14	KARIMI	Frédéric	9.0	5.0	7.0
15	KELLER	Florian	5.0	5.0	8.0
16	MERCIER	Florence	4.5	6.5	1.0
17	MOHAROS	Estelle	5.5	7.0	7.0
18	MONKEWITZ	Corina	9.0	7.5	1.5
19	NIEDERBERGER	Claude	10.0	8.0	8.0
20	PAYOT	Christel	8.0	7.0	5.5
21	PLOCEK	Annie	6.0	7.5	2.0
22	SILLIG	Andreas	5.5	5.0	5.5
23	TSCHUI	Alexandre	9.0	9.5	7.0
24	WERNLI	Adrien	5.5	6.0	8.0
moyennes de classe :			6.4	6.8	5.8

Rép. 6 ; 7 ; 6,75

46. Une assurance a enregistré le salaire de tous ses vendeurs pour l'année dernière. Voici les données rangées par ordre croissant :

10'520	20'420	24'150	26'390	27'880	32'110	34'620	38'350
14'310	20'630	24'420	26'510	28'000	32'430	35'270	39'240
16'020	21'110	24'530	26'520	29'080	32'480	35'890	39'810
16'670	21'350	24'910	26'710	29'160	32'610	36'100	40'700
17'220	21'790	25'080	27'400	29'770	33'720	36'440	41'660
18'450	22'500	25'160	27'550	30'330	33'740	36'540	41'720
19'160	22'630	25'900	27'630	30'410	33'740	36'660	42'600
19'320	22'910	26'220	27'660	30'720	34'220	37'390	44'310
19'470	23'400	26'250	27'790	31'650	34'570	37'650	46'270
19'710	23'820	26'340	27'840	31'820	34'620	38'200	48'340

- Identifier la population.
- Identifier la variable statistique.
- Grouper les données en 8 classes de largeur 5'000, avec $b_0 = 10'000$, et calculer les effectifs cumulés.
- Construire la courbe des effectifs cumulés.
- Déterminer la proportion des employés qui ont un salaire compris entre 25'000 et 35'000.

Rép. a) ensemble des vendeurs employés l'année dernière b) salaire annuel
 c) 2 ; 10 ; 24 ; 45 ; 61 ; 73 ; 78 ; 80 e) 46,25 %

47. Interpoler linéairement, c'est-à-dire trouver a ou b sachant que la fonction f est affine :
(Une fonction *affine* est du type $x \mapsto mx + h$; son graphe est une droite.)

a)

x	$f(x)$
35	11
37	b
40	15

b)

x	$f(x)$
50	3
a	5
60	9

c)

x	$f(x)$
2	30
10	b
17	70

d)

x	$f(x)$
45	12
a	16
55	18

Rép. a) 12,6 b) $53,\bar{3}$ c) $51,\bar{3}$ d) $51,\bar{6}$

48. Lors d'une course de vélo, les 32 participants ont mis les temps suivants, en minutes, pour effectuer le parcours :

Temps	[43 ; 45 [	[45 ; 47 [	[47 ; 49 [	[49 ; 51 [	[51 ; 53 [	[53 ; 55 [
Effectifs	2	3	7	11	6	3

- a) Dessiner l'histogramme des effectifs et la courbe des effectifs cumulés.
b) Déterminer la moyenne et la médiane des temps.

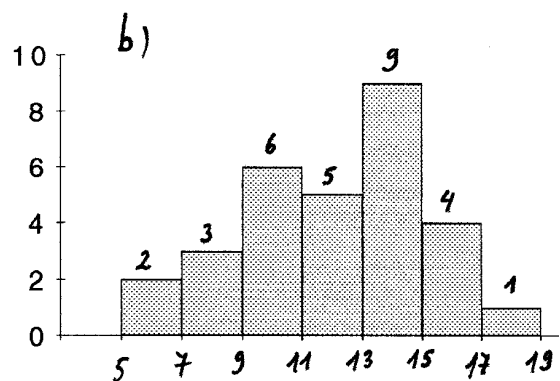
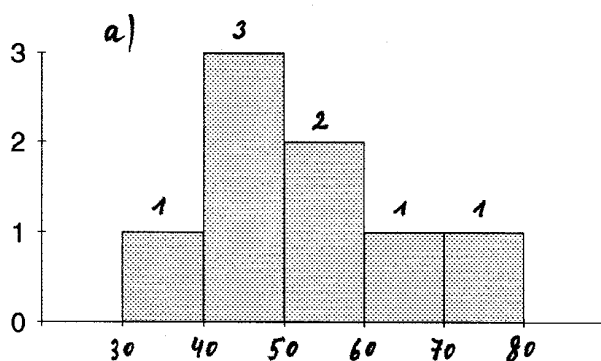
Rép. b) 49,56 ; 49,73

49. Une distribution est donnée par ses effectifs cumulés. Calculer la médiane par interpolation linéaire.

classes	[10; 20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[
eff. cum.	2	7	14	20

Rép. 34,3

50. La distribution d'une variable statistique est donnée par son histogramme. Déterminer la médiane.



Rép. a) 50 b) 12,6

51. Voici les résultats d'un test noté sur 10 points :

6.8	5.2	4.9	5.6	6.9
7.4	4.1	5.9	7.9	8.1
4.2	5.7	6.0	8.8	8.7
4.7	6.5	5.5	6.8	6.5
5.0	7.8	6.1	9.0	8.5
6.5	6.6	7.2	6.3	9.5

- a) Grouper ces notes en classes d'amplitude 1, depuis $b_0 = 4$, calculer les effectifs cumulés et construire la courbe des effectifs cumulés.
- b) Calculer la moyenne, l'écart type et la médiane.

Rép. $m = 6,63$; $s = 1,41$; $M = 6,5$

52. En faisant une enquête auprès de 40 élèves, on leur a demandé le nombre d'enfants dans leur famille. Les résultats sont synthétisés dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	12	10	8	4	3	1	1	1

Déterminer la moyenne, la médiane et le mode du nombre d'enfant par famille.

Rép. 2,7 ; 2 ; 1

53. Pour étudier l'effet de la caféine sur la fréquence cardiaque, on réalise l'expérience suivante :

Douze sujets prennent une tasse de café décaféiné, puis, 24 heures plus tard, une tasse de café normal, avec caféine. La fréquence cardiaque, en nombre de battements par minute, est mesurée à chaque fois deux heures après l'absorption du café.

Le tableau ci-dessous indique les résultats obtenus :

Sujet No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence cardiaque Café décaféiné	74	95	88	62	66	74	64	82	80	72	91	68
Fréquence cardiaque Café normal	76	92	92	64	72	75	74	80	90	92	89	84

On note x_i la fréquence cardiaque du sujet numéro i après absorption de café décaféiné et y_i la fréquence après absorption de café normal. On pose $z_i = y_i - x_i$.

Calculer la moyenne et la médiane de la série statistique $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{12}$.

Rép. $m = 5,33$; $M = 3$

54. Les tailles de 40 enfants ont été groupées par classes d'amplitude 9 :

Taille [cm]	[118 ; 127 [	[127 ; 136 [	[136 ; 145 [	[145 ; 154 [	[154 ; 163 [	[163 ; 172 [	[172 ; 181 [
Effectifs	3	5	9	12	5	4	2

- a) Dessiner l'histogramme des effectifs et la courbe des effectifs cumulés.
b) Déterminer la classe modale, la moyenne et la médiane.

Rép. b) [145 ; 154 [; $m = 147,475$; $M = 147,25$

55. Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé, de 25 mm de diamètre théorique. On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de cent pièces au hasard dans la fabrication. Les mesures des diamètres ont donné les résultats suivants :

Diamètre	[24,0 ; 24,2 [	[24,2 ; 24,4 [	[24,4 ; 24,6 [	[24,6 ; 24,8 [	[24,8 ; 25,0 [
Effectifs	0	5	13	24	19

Diamètre	[25,0 ; 25,2 [	[25,2 ; 25,4 [	[25,4 ; 25,6 [	[25,6 ; 25,8 [	[25,8 ; 26,0 [
Effectifs	14	10	8	5	2

- a) Calculer la moyenne m , la médiane M et l'écart type s .
b) La production de la machine est jugée bonne dès que les conditions suivantes sont remplies :
- m est dans l'intervalle $[24,9 ; 25,1]$;
 - s est inférieur à 0,4 ;
 - 95 % au moins de l'échantillon se trouve dans l'intervalle $[m - 2s ; m + 2s]$.

Cette production peut-elle être considérée comme bonne ?

Rép. a) $m = 24,946$; $M = 24,884$; $s = 0,3856$ b) oui

56. Calculer la moyenne de l'échantillon E obtenu en réunissant deux échantillons disjoints E_1 et E_2 dont les caractéristiques sont :

$$E_1 : n_1 = 40 ; m_1 = 74,1$$

$$E_2 : n_2 = 60 ; m_2 = 72,0$$

Rép. $m = 72,84$

70.—

x_i	n_i
4	3
6	2
7	4
9	1

Un caractère x est distribué comme indiqué ci-contre.

a) Calculer la moyenne m et l'écart type s .

b) Calculer la moyenne et l'écart type du caractère réduit $x^* = \frac{x - m}{s}$.

Rép. a) 6,1 ; 1,578 b) 0 ; 1

71. Démontrer que si x est un caractère de moyenne m et d'écart type s , alors le caractère réduit

$$x^* = \frac{x - m}{s}$$

a une moyenne de 0 et un écart type de 1.

72. On considère la fonction f définie par $f(x) = 3^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Dessiner soigneusement le graphe de f . [Unité sur l'axe Ox : 4 carrés ; sur l'axe Oy : 10 carrés.]

73. Au moyen d'une table de la fonction cumulative Φ , déterminer les valeurs suivantes :

a) $\Phi(0,13)$; $\Phi(2,05)$; $\Phi(0)$; $\Phi(-0,4)$; $\Phi(-1,52)$; $\Phi(-2,09)$; $\Phi(3,98)$

b) α tel que $\Phi(\alpha) = 0,9834$; β tel que $\Phi(\beta) = 0,352$

Rép. a) 0,5517 / 0,9798 / 0,5 / 0,3446 / 0,0643 / 0,0183 / 0,99997 b) $\alpha = 2,13$; $\beta = -0,38$

74. Le tableau ci-contre représente la distribution des charges maximales (en kilos) supportées par les cordes que fabrique une certaine usine.

a) Construire l'histogramme des effectifs relatifs.

b) Construire l'histogramme des effectifs relatifs du caractère réduit.

Charge maximale	Nombre de cordes
[93 ; 96[	2
[96 ; 99[	5
[99 ; 102[	12
[102 ; 105[	18
[105 ; 108[	14
[108 ; 111[	6
[111 ; 114[	3
[114 ; 117[	1

75. Paul passe parfois pour être le cancre de sa classe. Pourtant, à sa manière, il déploie une activité que l'on peut, sans hésitation, qualifier de scientifique. Par exemple, pendant les leçons de biologie, il relève scrupuleusement les voyelles insolites "an" qui émaillent les propos de son professeur. Il faut préciser que celui-ci était autrefois bègue et que ce n'est qu'après un traitement prolongé et plus ou moins réussi qu'il a appris à modérer son bégaiement en intercalant dans son discours des "an" salvateurs. Voici un petit échantillon de ce que cela peut donner : "Pour *an* terminer l'étude de cet *an* embranchement des *an* vertébrés, nous *an* allons disséquer la prochaine fois une *an* poule."

Paul a donc recensé, lors des leçons de son professeur, les nombres suivants de "an" insolites :

25	17	13	33	28	24	05	18	26	30
25	24	15	16	20	27	16	12	23	15
15	15	23	14	22	05	05	23	25	30
11	14	26	20	19	18	32	14	26	27

- Calculer la moyenne m et l'écart type s du caractère x = nombre de "an" proférés pendant la leçon.
- Ranger ces données par classes d'amplitude 10 ($[0 ; 10[$, $[10 ; 20[$, ...), puis construire l'histogramme des effectifs relatifs.
- Construire l'histogramme des effectifs relatifs du caractère réduit.

Rép. a) $m = 19,9$; $s = 7,1547$

76. Les tailles des individus mâles d'un certain canton suisse (que nous ne nommerons pas) sont distribuées *normalement* avec une moyenne de 161 cm et un écart type de 6 cm. Déterminer la proportion des individus de cette population qui mesurent :

- moins de 170 cm ?
- moins de 149 cm ?
- entre 164 et 176 cm ?

Rép. a) 93,3% b) 2,3% c) 30,2%

77. Un fabricant de chaussures sait que la pointure de la population qu'il dessert est distribuée à peu près normalement avec une moyenne de 42,4 et un écart type de 1,3 (chaussures pour messieurs). Il va produire 5000 paires de chaussures pour hommes (pointures entières seulement). Combien doit-il en prévoir pour la pointure 42 ? pour la pointure 46 ? (On admettra, même si cela fait parfois mal aux pieds, que les personnes ayant une pointure comprise entre 39,5 et 40,5 chaussent du 40.)

Rép. 1434 ; 40

78. Si la distribution des longueurs des pièces fabriquées par une machine est normale, avec une moyenne de 11,5 mm et un écart type de 0,2 mm, quelle est la proportion des pièces produites dont la longueur est :

- comprise entre 11,6 et 11,9 mm ?
- inférieure à 11,2 mm ?
- supérieure à 11,4 mm ?
- comprise entre 11,3 et 11,8 mm ?

Rép. a) 28,6% b) 6,7% c) 69,2% d) 77,5%

79. La taille moyenne de 500 élèves d'une école est 151 cm et l'écart type 15 cm. En supposant que la taille soit distribuée suivant une loi normale, trouver combien d'élèves ont une taille

- a) comprise entre 120 et 155 cm.
- b) supérieure à 185 cm.

Rép. a) 293 b) 6

80. Le diamètre intérieur moyen de rondelles produites par une machine est égal à 1,275 cm et l'écart type à 0,013 cm. L'usage que l'on fait de ces rondelles nécessite que le diamètre reste compris entre 1,260 cm et 1,290 cm. Autrement, les rondelles sont considérées comme défectueuses. Déterminer le pourcentage de rondelles défectueuses produites par la machine, en supposant que ces diamètres sont distribués normalement.

Rép. 25%

81. Une usine fabrique des vis dont le diamètre obéit à une loi normale de moyenne 0,24 cm et d'écart type 0,02 cm. On considère qu'une vis est défectueuse si son diamètre n'est pas compris dans l'intervalle $[0,20 ; 0,28]$. Calculer la proportion de vis défectueuses.

Rép. 4,6%

82. On sait que, dans un test, le 30% des individus obtiennent un score inférieur à 60 points, et que les résultats sont distribués normalement avec un écart type de 20. Calculer la proportion des individus qui ont plus de 90 points.

Rép. 16,4 %

83. Une usine produit des batteries automobiles dont le prix de revient est de 100 fr et le prix de vente de 150 fr par pièce. Chaque batterie vendue est remboursée si elle est défectueuse dans un délai de deux ans. En supposant que la durée de vie d'une batterie (en années) est un caractère distribué normalement, de moyenne 2,6 et d'écart type 0,5, calculer le bénéfice réalisé sur un lot de 1000 batteries.

Rép. 32750 fr

84. Lors de la fabrication en série de billes, on admet que le diamètre x d'une bille est réparti suivant une loi normale. A l'aide de deux cribles, l'un comportant des trous de diamètre 10 mm et l'autre des trous de 13 mm, on a pu évaluer les proportions suivantes :

$$p(x \leq 10) = 0,1736 \quad \text{et} \quad p(x \geq 13) = 0,1446$$

Calculer la moyenne et l'écart type du caractère x .

Rép. 11,41 mm ; 1,5 mm