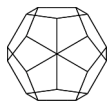
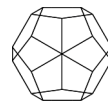
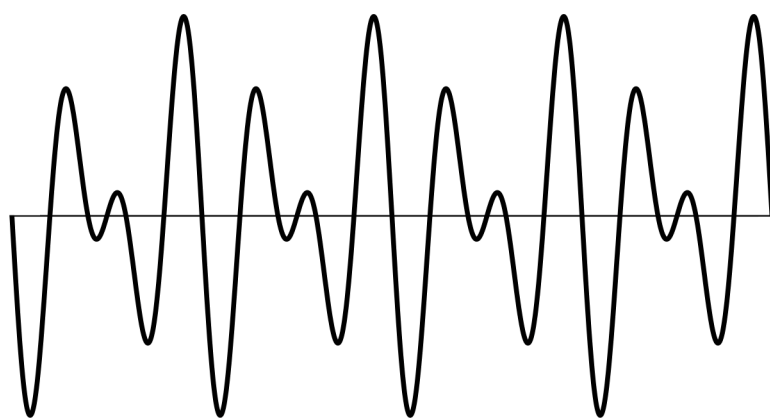


# TRIGONOMÉTRIE



$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$





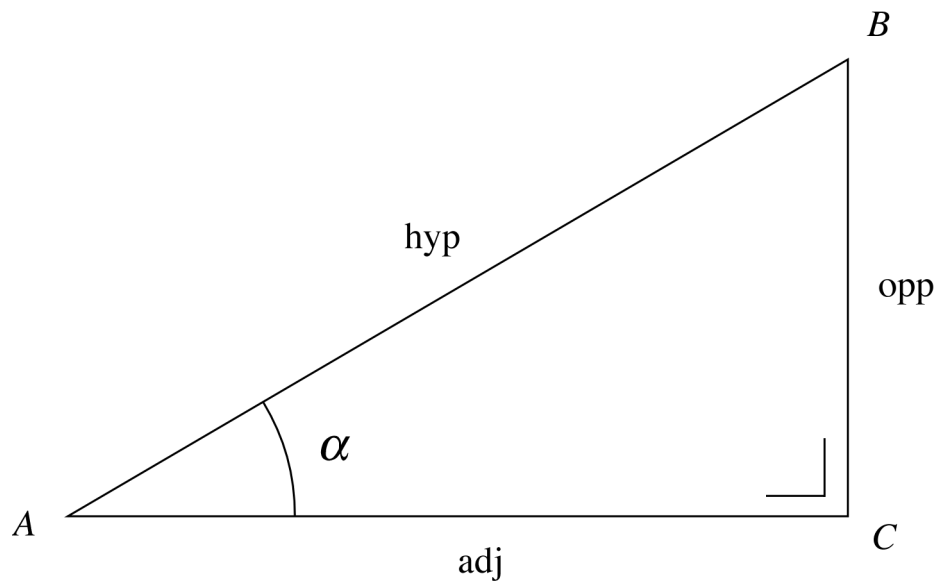
*fonction*  $x \mapsto \sin(2x) + \cos(3x)$

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| Rapports trigonométriques d'un angle aigu .....                 | 1  |
| Angles particuliers .....                                       | 2  |
| Longueur d'un arc de cercle. Aire d'un secteur circulaire ..... | 3  |
| Radians .....                                                   | 4  |
| Le cercle trigonométrique .....                                 | 5  |
| Graphes des fonctions trigonométriques .....                    | 6  |
| Relations trigonométriques fondamentales .....                  | 7  |
| Formules de réduction .....                                     | 8  |
| Le théorème du sinus .....                                      | 9  |
| Le théorème du cosinus .....                                    | 10 |
| Formule de l'aire .....                                         | 11 |
| Résolution d'un triangle quelconque .....                       | 12 |
| Equations du type $\sin(u(x)) = \sin(v(x))$ .....               | 13 |
| Formules d'addition .....                                       | 14 |
| $a \cos x + b \sin x$ .....                                     | 15 |

## *EXERCICES*

## § 1. RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ANGLE AIGU



$AB =$  **hyp**oténuse

$BC =$  cathète **opp**osé à  $\alpha$

$AC =$  cathète **adj**acent à  $\alpha$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

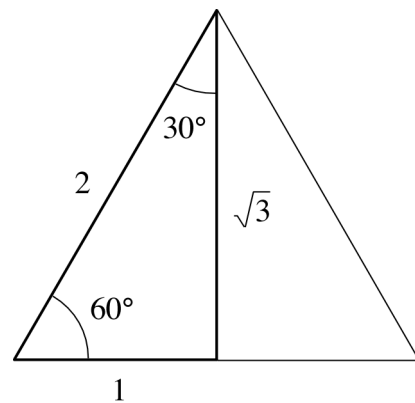
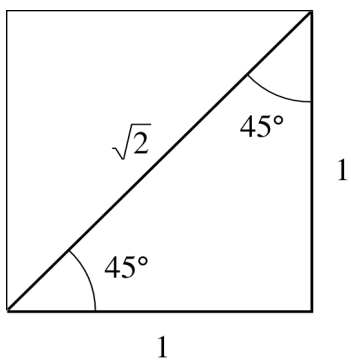
$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$$

## § 2. ANGLES PARTICULIERS

| $\alpha$      | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ |
|---------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|
| $\sin \alpha$ | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          |
| $\cos \alpha$ | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0          |
| $\tan \alpha$ | 0         | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | néant      |

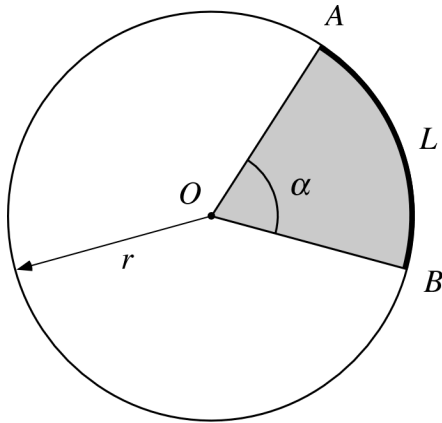


En considérant un *demi-carré* de côté **1** ou un *demi-triangle équilatéral* de côté **2**, on peut facilement retrouver les *valeurs exactes* des rapports trigonométriques de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  :



### § 3. LONGUEUR D'UN ARC DE CERCLE. AIRE D'UN SECTEUR CIRCULAIRE

On considère un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ , ainsi qu'un arc  $\widehat{AB}$  de ce cercle, d'angle au centre  $\alpha$  et de longueur  $L$ . Soit  $S$  l'aire du secteur circulaire  $OAB$ .



$L$  = longueur de l'arc  $\widehat{AB}$

$S$  = aire du secteur  $OAB$  (= aire grisée)

Il est clair que la longueur  $L$  et l'aire  $S$  sont toutes deux proportionnelles à  $\alpha$ . Ainsi :

- Le rapport de  $L$  à la circonférence du cercle est égal au rapport de  $\alpha$  à l'angle plein.

$$\frac{L}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360}$$

( $\alpha$  en *degrés*)

- Le rapport de  $S$  à l'aire du disque est égal au rapport de  $\alpha$  à l'angle plein.

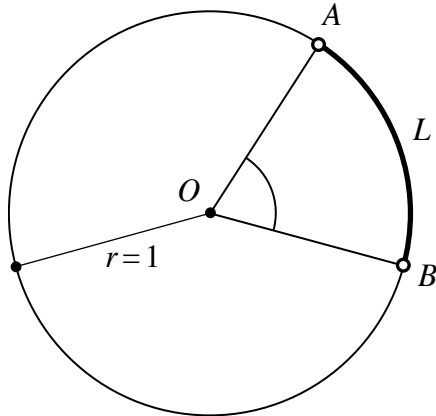
$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360}$$

( $\alpha$  en *degrés*)

## § 4. RADIANS

### Définition

La mesure d'un angle en radians est la longueur de l'arc qu'il intercepte sur un cercle de rayon 1 centré au sommet de l'angle.



$$\begin{aligned} L &= \text{longueur de l'arc } \widehat{AB} \\ &= \text{mesure de l'angle } \widehat{AOB} \text{ en radians} \end{aligned}$$

### Formules de conversion

Soit  $d$  la mesure de l'angle  $\widehat{AOB}$  en degrés. Le périmètre du cercle de rayon 1 valant  $2\pi$ , on a :

$$\frac{L}{2\pi} = \frac{d}{360} \Leftrightarrow \frac{L}{\pi} = \frac{d}{180} \Leftrightarrow \frac{L}{d} = \frac{\pi}{180}$$

Ainsi :

|                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{\text{mesure en radians}}{\text{mesure en degrés}} = \frac{\pi}{180}$ |
|------------------------------------------------------------------------------|

### Angles particuliers

| degrés  | 180   | 90              | 60              | 45              | 30              | ~57 |
|---------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----|
| radians | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 1   |

## § 5. LE CERCLE TRIGONOMETRIQUE

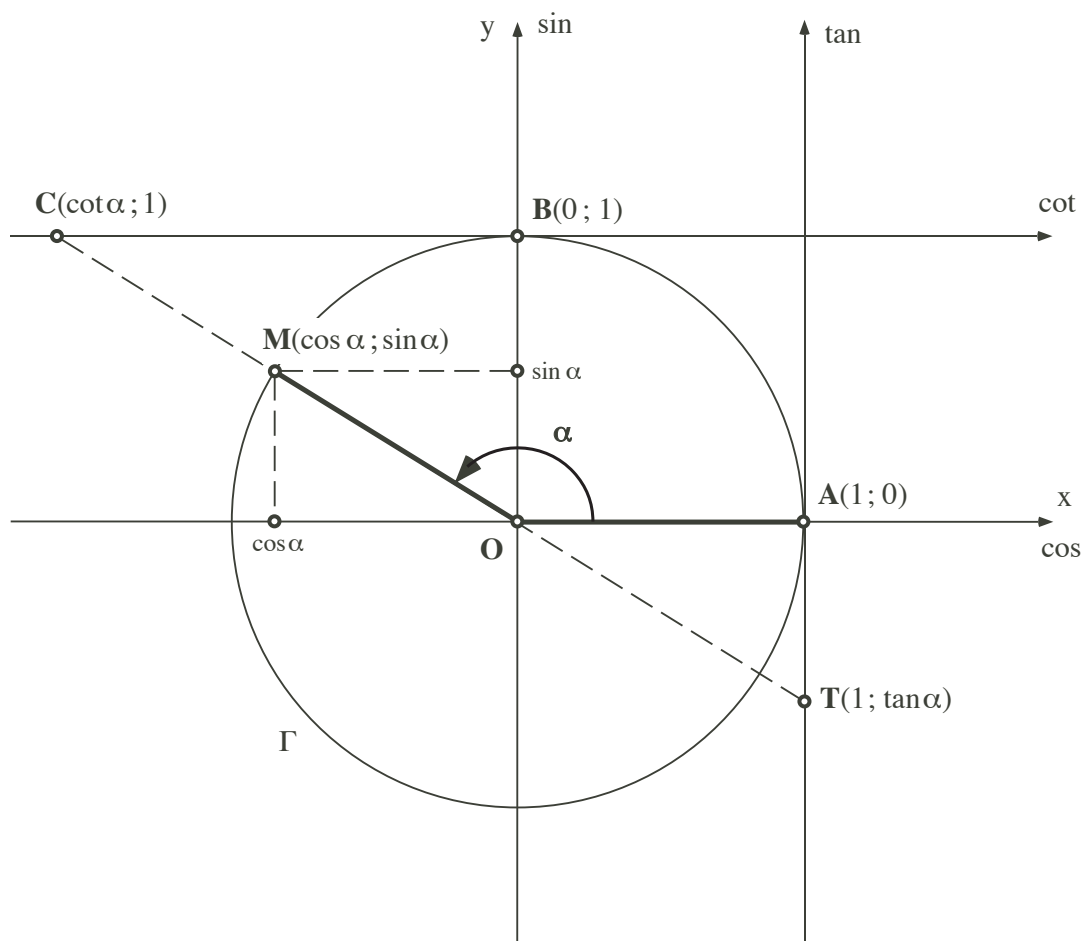
Dans un repère orthonormé  $Oxy$ , on considère le cercle  $\Gamma$  de centre  $O$  et de rayon 1. A tout angle orienté  $\alpha$ , on associe le point  $M$  de  $\Gamma$  défini par :

$$M = \text{image de } A(1; 0) \text{ par la rotation d'angle } \alpha \text{ autour de } O.$$

Soit encore  $T$  le point d'intersection de la droite  $OM$  avec la verticale passant par  $A$ , et  $C$  le point d'intersection de la droite  $OM$  avec l'horizontale passant par  $B(0; 1)$ . On définit alors le cosinus, le sinus, la tangente et la cotangente de l'angle orienté  $\alpha$  comme suit :



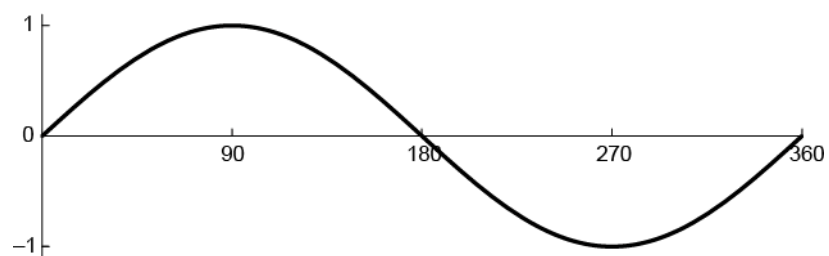
|               |   |                 |
|---------------|---|-----------------|
| $\cos \alpha$ | = | abscisse de $M$ |
| $\sin \alpha$ | = | ordonnée de $M$ |
| $\tan \alpha$ | = | ordonnée de $T$ |
| $\cot \alpha$ | = | abscisse de $C$ |



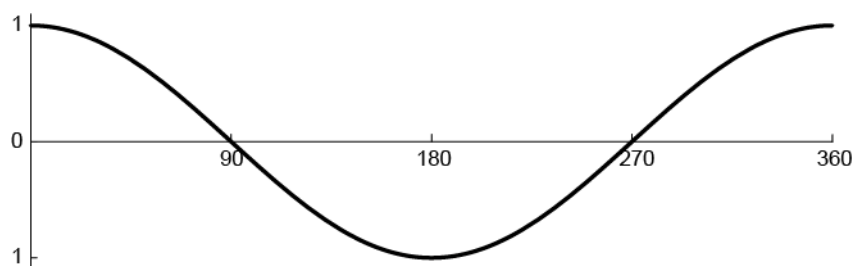
Le cercle  $\Gamma$ , muni des axes  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  et  $\cot$ , est appelé *cercle trigonométrique*.

## § 6. GRAPHES DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

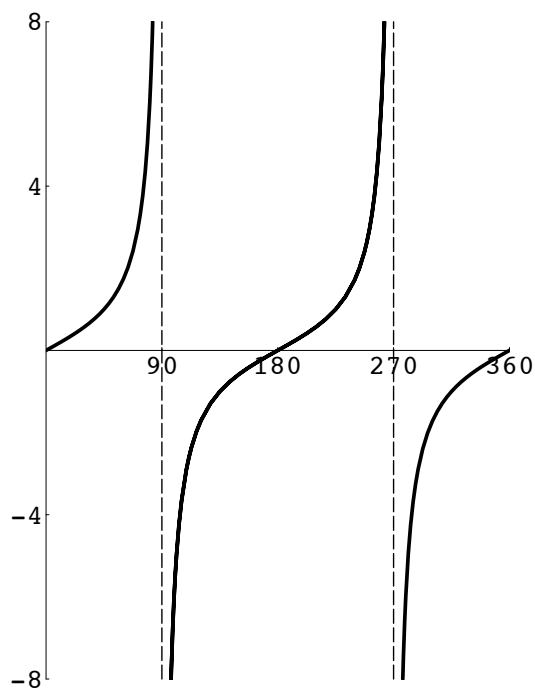
- Fonction  $\sin x$



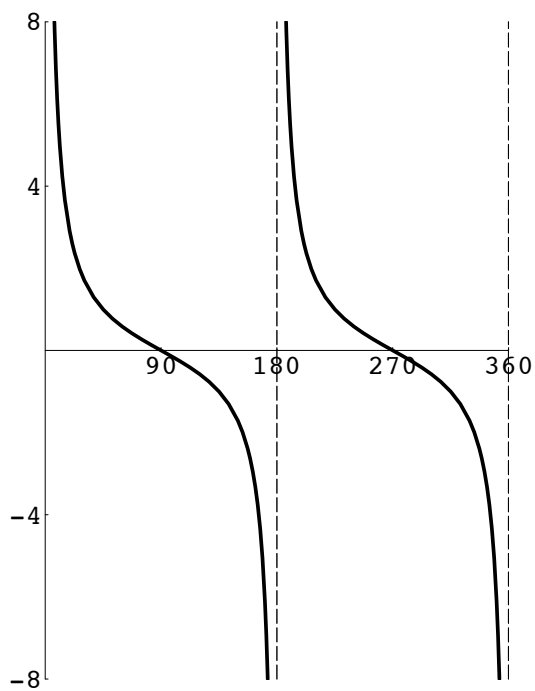
- Fonction  $\cos x$



- Fonctions  $\tan x$  et  $\cot x$



$\tan x$



$\cot x$

## § 7. RELATIONS TRIGONOMETRIQUES FONDAMENTALES

### Théorème

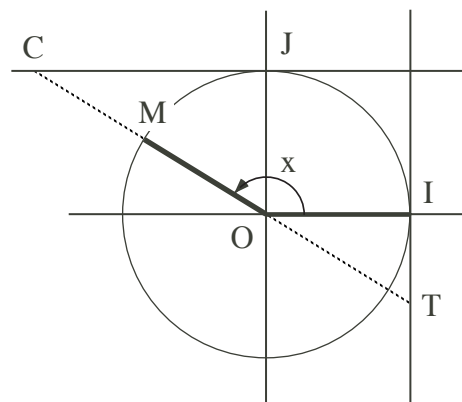
Les fonctions trigonométriques satisfont, partout où elles sont définies, les relations suivantes :

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $(1) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |
| <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">(2) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">(3) \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}</math> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">(4) \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">(5) \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x</math> </div> </div> |  |

### Preuve

Relativement à la base orthonormée  $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ , et par définition des fonctions trigonométriques, on a : (cf. figure)

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan x \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} \cot x \\ 1 \end{pmatrix}$$



Il en résulte ce qui suit :

1.  $\|\overrightarrow{OM}\|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$  ; or  $\|\overrightarrow{OM}\| = 1$  ; d'où la relation (1).

2. Les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OT}$  sont colinéaires ;

$$\Rightarrow \cos x \tan x = \sin x \quad (\text{produits croisés égaux}) ; \Rightarrow (2).$$

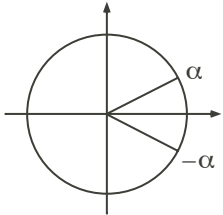
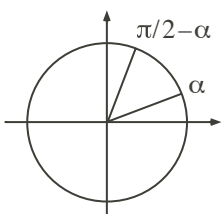
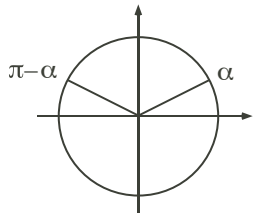
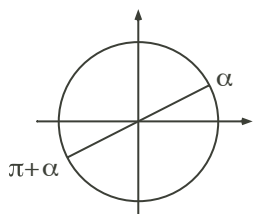
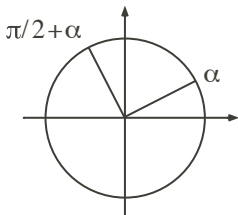
3. Comme ci-dessus, mais à partir des vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OC}$ .

4. Divisant la relation (1) par  $\cos^2 x$ , on obtient :

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} ; \Rightarrow \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

5. Comme ci-dessus, mais en divisant (1) par  $\sin^2 x$ .

## § 8. FORMULES DE RÉDUCTION

|                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$<br>$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$<br>$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$<br>$\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$                                                                                      | <p>Les fonctions sin et cos sont <math>2\pi</math>-périodiques</p> <p>Les fonctions tan et cot sont <math>\pi</math>-périodiques</p> |
| $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$<br>$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$<br>$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$<br>$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$                                                                                                         |                                                   |
| $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$<br>$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$<br>$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$<br>$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$    |                                                  |
| $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$<br>$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$<br>$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$<br>$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$                                                                                     |                                                  |
| $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$<br>$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$<br>$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$<br>$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$                                                                                      |                                                  |
| $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$<br>$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$<br>$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$<br>$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$ |                                                 |

## § 9. LE THÉORÈME DU SINUS

### Théorème

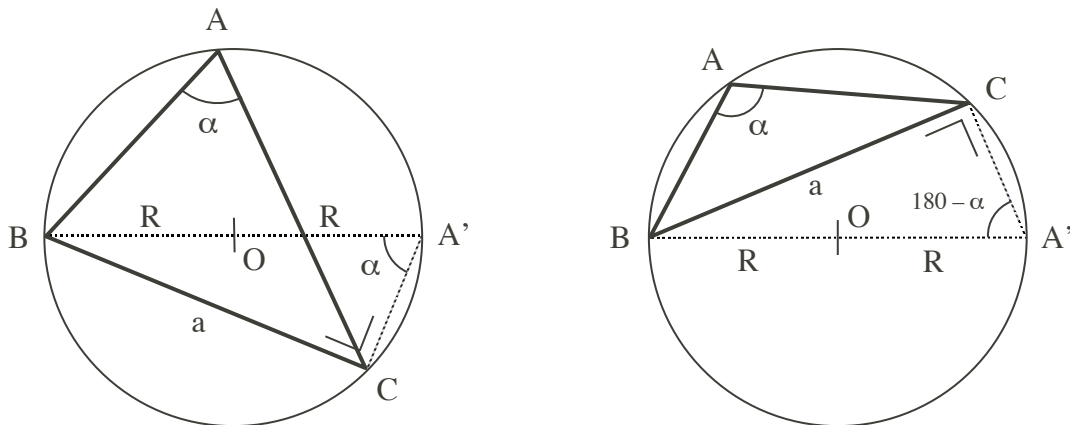
Dans tout triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés. Plus précisément, dans un triangle  $ABC$ , on a :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

où  $R$  désigne le rayon du cercle circonscrit à  $ABC$ .

### Preuve

On introduit le symétrique  $A'$  de  $B$  par rapport au centre  $O$  du cercle circonscrit :



En se rappelant les propriétés des angles inscrits, on voit que  $\widehat{BA'C}$  égale  $\alpha$  ou  $180^\circ - \alpha$ , et que  $\widehat{BCA'}$  égale  $90^\circ$ .

Le triangle rectangle  $A'BC$  donne alors  $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$ , même dans la cas de la figure de droite,

puisque  $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$ . D'où :  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ .

Si  $A' = C$ , on a  $\alpha = 90^\circ$  et  $a = 2R$ , ce qui aboutit également à  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ .

Un raisonnement analogue fournit  $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$  et  $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ .

## § 10. LE THÉORÈME DU COSINUS\*

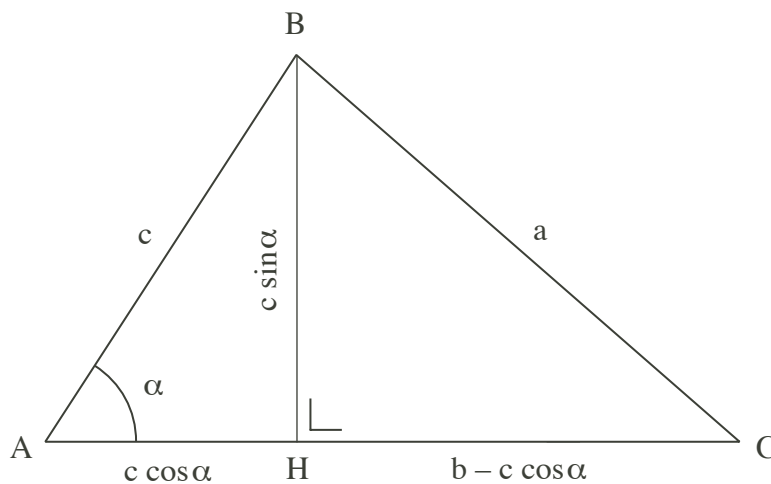
### Théorème

Dans tout triangle  $ABC$ , on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

### Preuve

Soit  $H$  le pied de la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $ABC$ .



Le triangle rectangle  $ABH$  donne  $\sin \alpha = \frac{BH}{c}$  et  $\cos \alpha = \frac{AH}{c}$ . Il en résulte que  $BH = c \sin \alpha$  et  $AH = c \cos \alpha$ , puis que  $HC = b - c \cos \alpha$ .

On applique alors le théorème de Pythagore au triangle  $BCH$  :

$$\begin{aligned} a^2 &= HC^2 + BH^2 = (b - c \cos \alpha)^2 + (c \sin \alpha)^2 = b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha + c^2 \sin^2 \alpha \\ &= b^2 + c^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_1 - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

La démonstration est analogue si  $H$  est hors du segment  $AC$ .

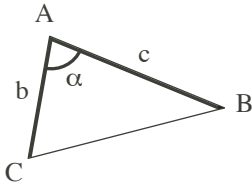
Le traitement des cas particuliers  $H = A$  et  $H = C$  est laissé aux bons soins du lecteur.

---

\* ou théorème de Pythagore généralisé

## § 11. FORMULE DE L'AIRE

### Théorème

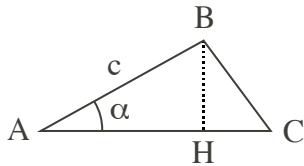


$$\text{Aire}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

### Preuve

Soit  $H$  le pied de la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $ABC$ .

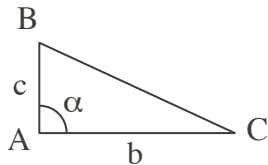
#### 1. $\alpha$ aigu



Le triangle  $ABH$  donne  $\sin \alpha = \frac{BH}{c}$  et donc  $BH = c \sin \alpha$ . Ainsi :

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

#### 2. $\alpha = 90^\circ$

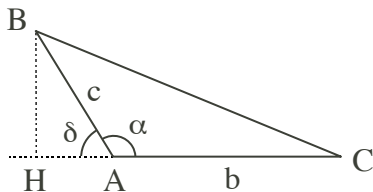


$$\sin \alpha = 1.$$

Il faut donc prouver que  $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}bc$ .

Clair !

#### 3. $\alpha$ obtus

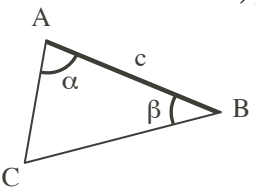
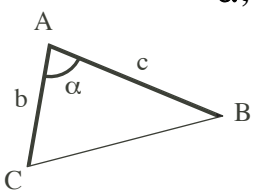
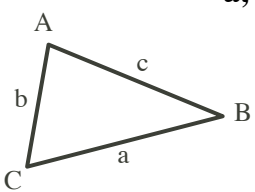
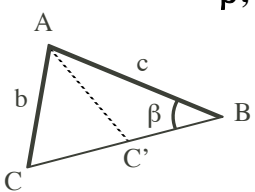


Le triangle  $ABH$  donne  $\sin \delta = \frac{BH}{c}$  et donc  $BH = c \sin \delta = c \sin(180 - \alpha) = c \sin \alpha$ .

Ainsi :

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

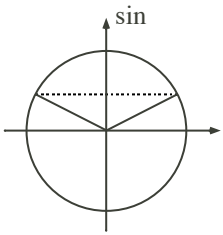
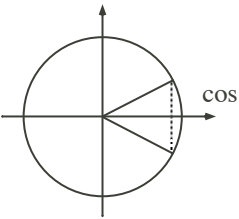
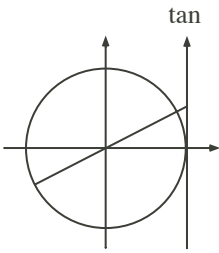
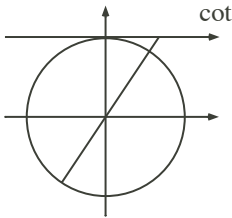
## § 12. RÉOLUTION D'UN TRIANGLE QUELCONQUE

| Données                                                                                                       | Résolution                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>I</b> $\alpha, \beta, c$  | 1) $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$<br>2) Le <i>théorème du sinus</i> donne $a$ et $b$                                                                                                                             |
| <b>II</b> $\alpha, b, c$     | 1) Le <i>théorème du cosinus</i> donne $a$ , puis $\beta$<br>2) $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$                                                                                                                   |
| <b>III</b> $a, b, c$       | 1) Le <i>théorème du cosinus</i> donne $\alpha$ et $\beta$<br>2) $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$                                                                                                                  |
| <b>IV</b> $\beta, b, c$    | 1) Le <i>théorème du sinus</i> donne $\gamma$ (ou $\gamma' = 180^\circ - \gamma$ )<br>2) $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$ (ou $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma'$ )<br>3) Le <i>théorème du sinus</i> donne $a$ |

### Mise en garde

Pour trouver un angle, il faut préférer le théorème du cosinus à celui du sinus, chaque fois que possible, afin d'éviter *l'indétermination due au sinus* : entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ , deux angles différents peuvent avoir le même sinus, ce qui n'est pas le cas pour le cosinus.

## § 13. ÉQUATIONS DU TYPE $\sin(u(x)) = \sin(v(x))$

|                                                                                                              |                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin(u) = \sin(v) \Leftrightarrow u = \begin{cases} v + k \cdot 2\pi \\ \pi - v + k \cdot 2\pi \end{cases}$ |    |
| $\cos(u) = \cos(v) \Leftrightarrow u = \begin{cases} v + k \cdot 2\pi \\ -v + k \cdot 2\pi \end{cases}$      |    |
| $\tan(u) = \tan(v) \Leftrightarrow u = v + k \cdot \pi$                                                      |   |
| $\cot(u) = \cot(v) \Leftrightarrow u = v + k \cdot \pi$                                                      |  |

### Exemple

$$\sin(2x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(2x = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + k \cdot 2\pi\right) \text{ ou } \left(2x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + k \cdot 2\pi\right)$$

$$\left(x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) \text{ ou } \left(3x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$$

$$\left(x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) \text{ ou } \left(x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

## § 14. FORMULES D'ADDITION

### Théorème

$$(A) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$(B) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$(C) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

### Démonstration

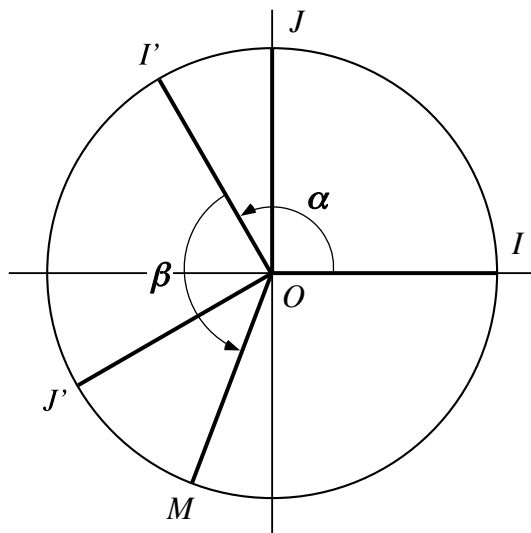
Soit  $M$  le point du cercle trigonométrique associé à l'angle  $\alpha + \beta$ , et  $(O, I', J')$  le repère obtenu par rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $O$  du repère  $(O, I, J)$ . On a, par définition des fonctions trigonométriques :

$$(1) \quad \overrightarrow{OM} = \cos(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{OI} + \sin(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{OJ}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OM} = \cos \beta \cdot \overrightarrow{OI'} + \sin \beta \cdot \overrightarrow{OJ'}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{OI'} = \cos \alpha \cdot \overrightarrow{OI} + \sin \alpha \cdot \overrightarrow{OJ}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{OJ'} &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overrightarrow{OI} + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overrightarrow{OJ} \\ &= -\sin \alpha \cdot \overrightarrow{OI} + \cos \alpha \cdot \overrightarrow{OJ} \end{aligned}$$



On remplace alors dans (2)  $\overrightarrow{OI'}$  et  $\overrightarrow{OJ'}$  par leurs expressions (3) et (4) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \cos \beta \cdot (\cos \alpha \cdot \overrightarrow{OI} + \sin \alpha \cdot \overrightarrow{OJ}) + \sin \beta \cdot (-\sin \alpha \cdot \overrightarrow{OI} + \cos \alpha \cdot \overrightarrow{OJ}) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cdot \overrightarrow{OI} + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cdot \overrightarrow{OJ}. \end{aligned}$$

D'où les formules (A) et (B), en comparant avec (1).

La formule (C) s'établit comme suit :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

## § 15. $a \cos(x) + b \sin(x)$

### Théorème

Soient  $a, b \in \mathbb{R}^*$  et  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Il existe  $\varphi \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$a \cos x + b \sin x = r \sin(x + \varphi)$$

### Preuve

Choisissons  $\varphi$  de manière que

$$\tan \varphi = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \text{signe}(\sin \varphi) = \text{signe}(a)$$

Alors :  $r \sin(x + \varphi) = r(\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = (r \sin \varphi) \cos x + (r \cos \varphi) \sin x$ .

Il suffit donc d'établir que  $a = r \sin \varphi$  et  $b = r \cos \varphi$ .

De  $\tan \varphi = \frac{a}{b}$ , on tire  $\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{a^2}{b^2}$  ;

$$\Rightarrow b^2 \sin^2 \varphi = a^2 \cos^2 \varphi = a^2 (1 - \sin^2 \varphi) = a^2 - a^2 \sin^2 \varphi ;$$

$$\Rightarrow a^2 = (a^2 + b^2) \sin^2 \varphi = r^2 \sin^2 \varphi ;$$

$$\Rightarrow a = \pm r \sin \varphi .$$

Or  $\sin \varphi$  et  $a$  sont supposés de même signe ;

$$\Rightarrow a = r \sin \varphi \quad \text{et, en reprenant} \quad \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{a}{b}, \quad b = r \cos \varphi .$$

### Exercices

**11.** Un triangle ABC est rectangle en C. Calculer ses angles et ses côtés inconnus, sachant que :

- |                                           |                                        |
|-------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1) $\beta = 65,8^\circ$ ; $BC = 4,75$     | 2) $BC = 12,3$ ; $AB = 25,43$          |
| 3) $BC = 48,523$ ; $\alpha = 53,46^\circ$ | 4) $BC = 112,5$ ; $\beta = 14,5^\circ$ |

Rép. 1)  $\alpha = 24,2^\circ$  /  $AB = 11,59$  /  $AC = 10,57$       2)  $\alpha = 28,93^\circ$  /  $\beta = 61,07^\circ$  /  $AC = 22,26$   
3)  $\beta = 36,54^\circ$  /  $AB = 60,39$  /  $AC = 35,96$       4)  $\alpha = 75,5^\circ$  /  $AB = 116,2$  /  $AC = 29,1$

**12.** Un triangle ABC est isocèle en A. Calculer ses angles et ses côtés inconnus, sachant que :

- |                                        |                                          |
|----------------------------------------|------------------------------------------|
| 1) $\alpha = 48,5^\circ$ ; $BC = 22,8$ | 2) $\alpha = 103,48^\circ$ ; $AB = 4,24$ |
|----------------------------------------|------------------------------------------|

Rép. 1)  $\beta = \gamma = 65,75^\circ$  ;  $AB = AC = 27,76$       2)  $\beta = \gamma = 38,26^\circ$  ;  $BC = 6,66$

**13.** Quelle est la hauteur d'une tour qui donne 36 m d'ombre lorsque le soleil est élevé de  $37,5^\circ$  au-dessus de l'horizon ?

Rép. 27,6 m

**14.** Un rectangle a pour dimensions 117,40 m et 65,18 m. Quelles sont les angles formés par les diagonales avec les côtés ?

Rép.  $29,04^\circ$  ;  $60,96^\circ$

**15.** Une route s'élève régulièrement en formant avec l'horizontale un angle de  $4,5^\circ$ . Quelle distance horizontale parcourt-on lorsqu'on a suivi la route durant 6,4 km ? De combien s'est-on élevé ?

Rép. 6380 m ; 502 m

**16.** Calculer l'aire d'un triangle ABC rectangle en A, sachant que  $\beta = 22^\circ$  et que  $AC = 6$  cm.

Rép.  $44,55 \text{ cm}^2$

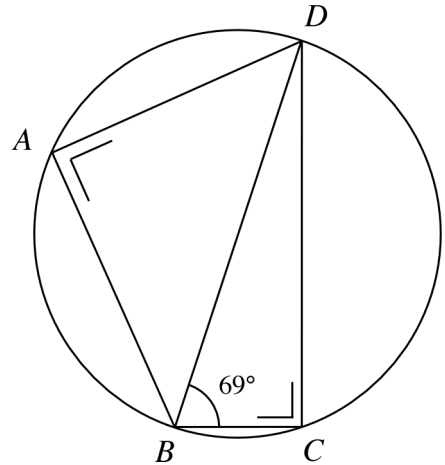
**17.** Un triangle ABC est isocèle en A ( $AB = AC$ ). On donne :  $AB = 15$  et  $\beta = 53^\circ$ . Calculer la hauteur AH de ce triangle (H sur BC), ainsi que son périmètre.

Rép. 11,98 ; 48,054

### Exercices

**18.** Dans ce quadrilatère, on sait que  $AD = 35$  et  $CD = 117$ .

Calculer les côtés  $BC$  et  $AB$ .



Rép.  $BC = 44,9$  ;  $AB = 120,34$

**19.** Le périmètre d'un octogone régulier est égal à 15,3 cm. Calculer le rayon du cercle dans lequel il est inscrit.

Rép. 2,499 cm

**20.** Calculer l'aire d'un losange  $ABCD$ , sachant que la diagonale  $AC$  mesure 38 cm et que  $\widehat{ABC} = 72^\circ$ .

Rép.  $993,7 \text{ cm}^2$

**21.** Quelle est la mesure de l'angle formé par deux diagonales d'un cube ?

Rép.  $70,53^\circ$  (ou  $109,47^\circ$ )

**22.** Le pont d'un bateau se trouve à 4 m au-dessus de l'eau. Le capitaine mesure que le rayon lumineux qui parvient d'un phare forme avec l'horizontale un angle de  $4^\circ$ . Il sait de plus que la lampe du phare se trouve à 60 m au-dessus de l'eau. A quelle distance du phare le bateau se trouve-t-il ?

Rép. 800,8 m

**23.** Déterminer la hauteur d'un triangle équilatéral de côté  $c = 1$ . [Rép.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ]

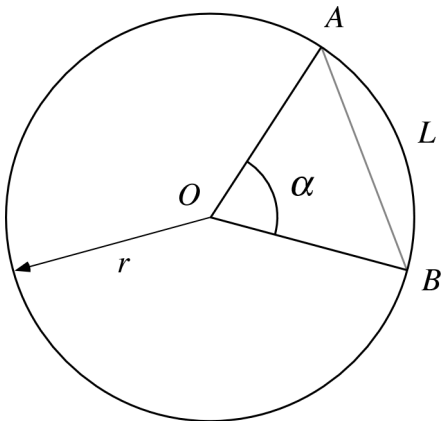
## Exercices

**24.** Connaissant la base  $BC = 15$  et l'angle au sommet  $\alpha = 40^\circ$  d'un triangle isocèle  $ABC$ , calculer :

- a) la longueur des côtés égaux.
- b) la longueur de la hauteur issue de  $B$ .
- c) le rayon du cercle inscrit.
- d) le rayon du cercle circonscrit.

Rép. a) 21,93    b) 14,095    c) 5,25    d) 11,67

**25.—**



$r$  = rayon du cercle.

$L$  = longueur de l'arc  $\widehat{AB}$ .

$S$  = aire du secteur circulaire  $OAB$  d'angle  $\alpha$ .

- a) Sachant que  $\alpha = 25^\circ$  et  $r = 12$ , calculer  $L$ ,  $S$  et la longueur du segment  $AB$ .
- b) Connaissant  $L = 3$  et  $r = 8$ , déterminer l'angle  $\alpha$  et l'aire  $S$ .
- c) Trouver le rayon  $r$  si l'on donne  $L = 15$  et  $\alpha = 125^\circ$ .

Rép. a) 5,236 ; 31,416 ; 5,195    b)  $21,486^\circ$  ; 12    c) 6,875

**26.** Un triangle  $ABC$  est inscrit dans un cercle de centre  $O$  et de rayon 3.

On donne  $\widehat{AOB} = 100^\circ$ ,  $\widehat{BOC} = 115^\circ$  et  $\widehat{AOC} = 145^\circ$ . Calculer :

- a) la longueur de l'arc  $\widehat{BC}$  passant par  $A$ .
- b) l'aire du secteur circulaire  $OBC$  de  $115^\circ$ .
- c) la longueur du segment  $AB$ .

Rép. 12,828 ; 9,032 ; 4,596

**27.** Une charge est soulevée verticalement à l'aide d'une corde fixée à une poulie dont le diamètre mesure 40 cm. Si le brin de la corde sur lequel on tire fait avec la verticale un angle de  $30^\circ$ , calculer la longueur de la corde en contact avec la poulie.

Rép. 52,36 cm

**28.** La distance "à vol d'oiseau" de Rolle à Villeneuve est approximativement égale à 45 km. En supposant qu'on parvienne à relier, par un câble parfaitement rectiligne, deux bornes situées au bord du lac, l'une à Rolle et l'autre à Villeneuve, quelle serait la profondeur maximum atteinte par le câble dans le lac ? (Rayon terrestre : 6400 km)

## Exercices

**29.** Résoudre les équations suivantes : (inconnue :  $x$ )

1)  $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$

2)  $\frac{a}{x} = \frac{b}{4a}$

3)  $\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{a}{c}$

4)  $(a+b)x = a$

5)  $ax + 2x = 5$

6)  $ax + bx = a^2 - b^2$

7)  $ax = 5 + 3x$

8)  $2x = b + ax$

Rép. 1)  $\frac{ad}{b}$  2)  $\frac{4a^2}{b}$  3)  $\frac{a \sin \alpha}{c}$  4)  $\frac{a}{a+b}$  5)  $\frac{5}{a+2}$  6)  $a-b$   
7)  $\frac{5}{a-3}$  8)  $\frac{b}{2-a}$

**30.** Résoudre les équations suivantes : (inconnue :  $x$ )

1)  $5x = a + bx$

2)  $x + 3 = 2ax - b^2$

3)  $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$

4)  $\frac{x}{3} = \frac{a}{2x}$

5)  $\frac{x}{2a} = \frac{4a^2}{x^2}$

6)  $x - x \tan \alpha = 7$

7)  $x \sin \alpha + 1 = x \cos \alpha + 3$

8)  $\frac{x+a}{2} = r \cos \alpha$

Rép. 1)  $\frac{a}{5-b}$  2)  $\frac{3+b^2}{2a-1}$  3)  $\pm \sqrt{ab}$  4)  $\pm \sqrt{\frac{3a}{2}}$  5)  $2a$   
6)  $\frac{7}{1-\tan \alpha}$  7)  $\frac{2}{\sin \alpha - \cos \alpha}$  8)  $2r \cos \alpha - a$

**31.** Résoudre les équations suivantes : (inconnue :  $x$ )

1)  $3a^2x - 2 = \frac{b}{3}$

2)  $x \tan \alpha - a = b + x \tan \beta$

3)  $m^2x - 1 = m + x$

4)  $ax - a^3 = bx - ab^2$

Rép. 1)  $\frac{b+6}{9a^2}$  2)  $\frac{a+b}{\tan \alpha - \tan \beta}$  3)  $\frac{1}{m-1}$  4)  $a(a+b)$

## Exercices

**32.** Résoudre les systèmes suivants : (inconnues :  $x$  et  $y$ )

$$1) \begin{cases} a = \frac{x}{y} \\ b = x + y \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \tan \alpha - xy = 7 \\ y = \tan \beta \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} xy = 100 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} a = \frac{x}{y} \\ b = \frac{x+10}{y} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \tan \alpha = \frac{x}{y} \\ b = \frac{x}{y+1} \end{cases}$$

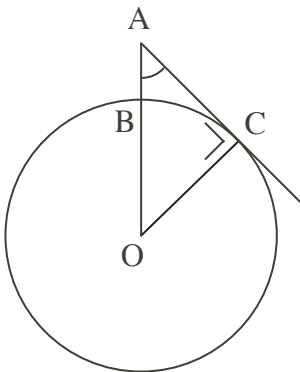
$$6) \begin{cases} \sin \alpha = \frac{x}{y} \\ y - x = 1 \end{cases}$$

Rép. 1)  $\frac{ab}{a+1}; \frac{b}{a+1}$  2)  $\frac{7}{\tan \alpha - \tan \beta}; \tan \beta$  3)  $\pm 20; \pm 5$  4)  $\frac{10a}{b-a}; \frac{10}{b-a}$   
 5)  $\frac{b \tan \alpha}{\tan \alpha - b}; \frac{b}{\tan \alpha - b}$  6)  $\frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}; \frac{1}{1 - \sin \alpha}$

**33.** D'un triangle isocèle ABC ( $AB = AC$ ), on connaît l'aire  $S = 9$  et l'angle  $\alpha = 20^\circ$ . Calculer BC et la hauteur issue de A.

Rép. 2,519 ; 7,144

**34.—**



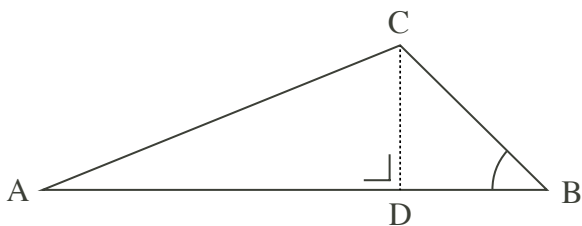
Un observateur ( $A$ ), placé à une hauteur  $AB = 252$  m au-dessus du niveau de la mer, a mesuré que le rayon visuel  $AC$  aboutissant à l'horizon sensible faisait avec la verticale un angle de  $89,49^\circ$ .

Déduire de cette mesure le rayon terrestre.

(Poser  $x = OB = OC$ )

Rép. 6361 km

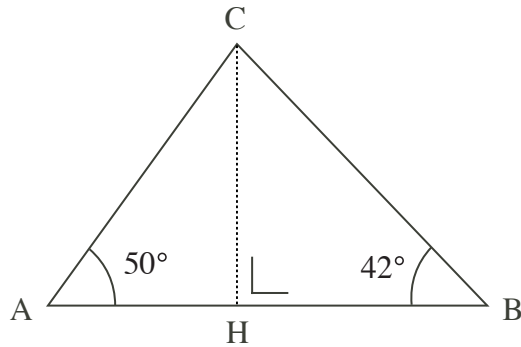
**35.—**



Sachant que  $AD = 6,24$ ,  $CD = 9,11$  et  $\beta = 52,72^\circ$ , calculer les côtés et les angles du triangle ABC.

Rép.  $AB = 13,17$  /  $AC = 11,042$  /  $BC = 11,45$  /  $\alpha = 55,59^\circ$  /  $\gamma = 71,69^\circ$

36.—



Dans un triangle ABC, on connaît :  $AB = 10$  ;  
 $\alpha = 50^\circ$  ;  $\beta = 42^\circ$ . Soit H le pied de la hauteur  
 issue de C.

Calculer  $x = AH$ ,  $y = CH$ ,  $AC$ ,  $BC$  et  $\gamma$ .

Rép.  $AH = 4,304$  /  $CH = 5,13$  /  $AC = 6,695$  /  $BC = 7,665$  /  $\gamma = 88^\circ$

37. Dans un losange ABCD, on donne l'angle  $\alpha = 124^\circ$  et la diagonale  $AC = 42$ . Calculer la longueur des côtés, celle de l'autre diagonale, le rayon du cercle inscrit et l'aire du losange.

Rép. côtés : 44,73 ;  $BD = 78,99$  ; rayon : 18,54 ; aire : 1658,8

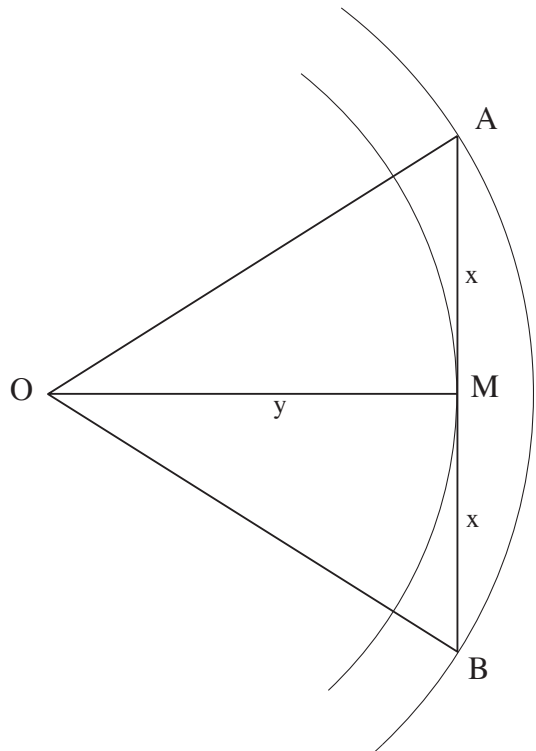
38. Calculer le périmètre d'un polygone régulier convexe à sept côtés inscrit dans un cercle de rayon 2.

Rép. 12,15

39. Un polygone régulier convexe à quinze côtés a une aire égale à 1500.

- Calculer la longueur d'un côté (AB) et le rayon du cercle inscrit (OM).
- Quel est le rayon du cercle circonscrit (OA) ?

Indication : Poser  $x = AM$  et  $y = OM$



Rép. a) 9,22 ; 21,69      b) 22,17

### Exercices

**40.** Un pentagone régulier étoilé est inscrit dans un cercle de rayon 25. Calculer la longueur de son côté.

Rép. 47,55

**41.** Dans un triangle  $ABC$  rectangle en  $C$ , montrer qu'on a les relations :

a)  $\sin \beta \tan \beta = \frac{b^2}{ac}$

b)  $\sin \beta + \cos \beta = \sin \alpha + \cos \alpha$

c)  $\frac{\sin \beta + \cos \alpha}{\cos \beta + \sin \alpha} = \tan \beta$

**42.** Un homme aperçoit un arbre vertical sous un angle de  $38,6^\circ$ . Il recule de 25 m et voit l'arbre sous un angle de  $18,3^\circ$  (on admettra que les yeux de l'observateur et le pied de l'arbre sont au même niveau). Quelle est la hauteur de l'arbre ? A quelle distance du pied de l'arbre l'observateur se trouvait-il au début ?

Rép. 14,12 m ; 17,68 m

**43.** Dans un cercle, une corde sous-tend un arc de  $82^\circ$ . La distance du centre du cercle à cette corde mesure 20 cm. Quelle est la longueur de cette corde ? Quelle est la longueur de l'arc ?

Rép. 34,77 cm ; 37,93 cm

**44.** Dans un cercle, une corde sous-tendant un arc de  $36^\circ$  a une longueur de 12,5 cm. Calculer le rayon  $r$  du cercle et la longueur  $L$  de l'arc.

Rép. 20,23 cm ; 12,71 cm

**46.** Convertir en degrés les angles donnés ci-dessous par leur mesure en radians :

- 1)  $\frac{\pi}{6}$     2)  $\frac{2\pi}{3}$     3)  $2\pi$     4)  $\frac{\pi}{10}$     5)  $\frac{7\pi}{10}$     6)  $\frac{3\pi}{4}$     7) 0,28421    8) 1,43216  
9) 3,14    10)  $\frac{\pi}{3}$     11)  $\frac{6\pi}{5}$     12) 6,2

Rép. 1)  $30^\circ$     2)  $120^\circ$     3)  $360^\circ$     4)  $18^\circ$     5)  $126^\circ$     6)  $135^\circ$     7)  $16,28^\circ$   
8)  $82,06^\circ$     9)  $179,91^\circ$     10)  $60^\circ$     11)  $216^\circ$     12)  $355,23^\circ$

### Exercices

**47.** Convertir en radians les angles donnés ci-dessous par leur mesure en degrés :

- 1)  $45^\circ$       2)  $150^\circ$       3)  $75^\circ$       4)  $315^\circ$       5)  $240^\circ$   
6)  $22,43^\circ$       7)  $124,35^\circ$       8)  $270^\circ$       9)  $300^\circ$       10)  $225^\circ$

Rép. 1)  $\frac{\pi}{4}$     2)  $\frac{5\pi}{6}$     3)  $\frac{5\pi}{12}$     4)  $\frac{7\pi}{4}$     5)  $\frac{4\pi}{3}$     6) 0,3915    7) 2,1703  
8)  $\frac{3\pi}{2}$     9)  $\frac{5\pi}{3}$     10)  $\frac{5\pi}{4}$

**48.** Une tour circulaire de 20 m de diamètre est vue sous un angle horizontal de  $18^\circ$ . A quelle distance du point le plus proche de la tour se trouve-t-on ?

Rép. 53,9 m

**49.** Calculer l'aire d'un losange  $ABCD$  connaissant le rayon du cercle inscrit ( $r = 6$ ) et l'angle en  $A$  ( $\alpha = 42,76^\circ$ ).

Rép. 212,1

**50.** la voûte d'un tunnel routier est un arc de cercle d'angle au centre  $220^\circ$ . Calculer le rayon  $r$  de cet arc pour que la largeur de la route soit de 12 m. Calculer aussi la hauteur maximum  $h$  de la voûte au-dessus du sol.

Rép.  $r = 6,39$  m ;  $h = 8,57$  m

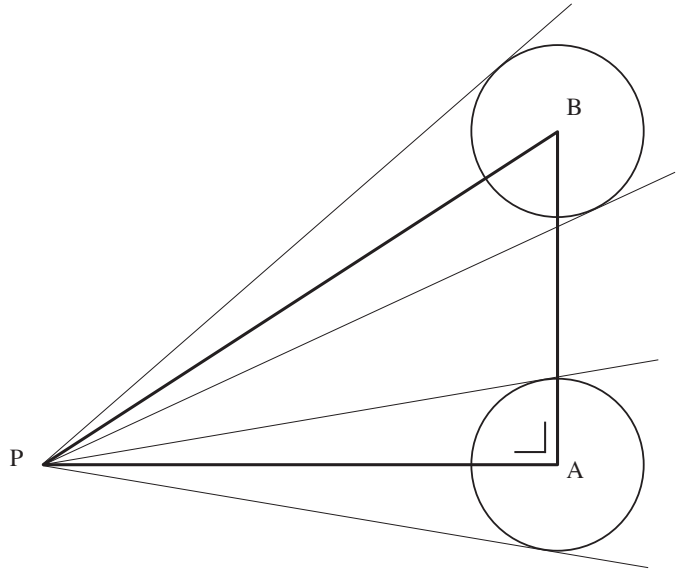
**51.** Deux observateurs, situés à la même altitude, distants de 1350 m, mesurent au même moment la hauteur d'un point remarquable d'un nuage situé entre eux. Ce point est dans le plan vertical contenant les deux observateurs, et les angles d'élévation sont de  $65,4^\circ$  et  $76,5^\circ$ .  
Quelle est la hauteur du nuage ?

Rép. 1934,3 m

### Exercices

**52.** Une boule de 100 cm de diamètre est suspendue au-dessus du sol (centre en  $B$ ). Un homme dont l'oeil est en  $P$  la voit sous un angle de  $3^\circ$ . On fait descendre la boule verticalement jusqu'à ce que son centre soit en  $A$ , au niveau de  $P$ . L'observateur la voit alors sous un angle de  $4^\circ$ .

Calculer la distance  $AB$ .



Rép. 12,63 m

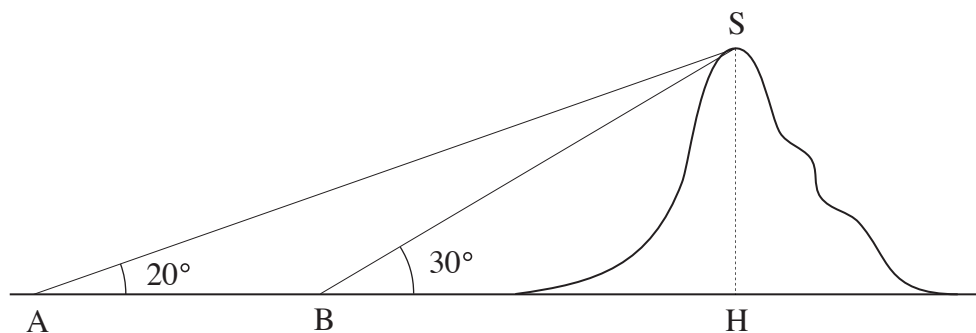
**53.** Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de  $1,5^\circ$ . Quelle est leur distance ? (Rayon de la terre : 6370 km)

Rép. 166,77 km

**54.** Calculer le diamètre d'un cercle sur lequel un arc de  $0,04^\circ$  mesure 0,03 cm.

Rép. 85,94 cm

**55.** De A, l'élévation du sommet S d'une montagne est de  $20^\circ$ . De B, elle est de  $30^\circ$ . Sachant que  $AB = 500$  m (et que A, B et S sont situés dans un même plan vertical), trouver la hauteur SH de la montagne.

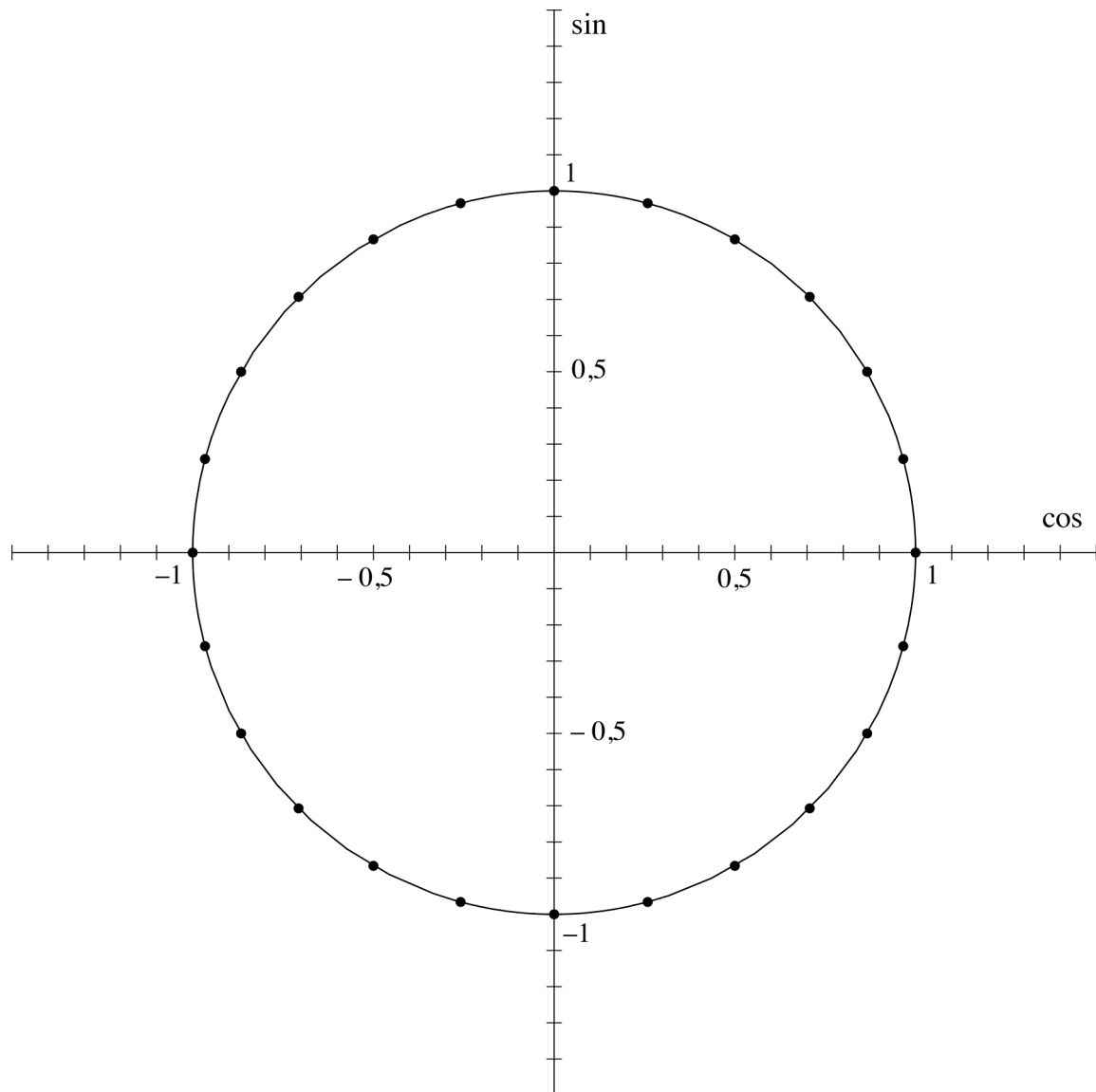


Rép. 492,4 m

### Exercices

**56.** Déterminer graphiquement  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  pour les valeurs suivantes de  $\alpha$  : (contrôler avec la calculatrice)

- |                |                 |                 |                 |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1) $30^\circ$  | 4) $-60^\circ$  | 7) $90^\circ$   | 10) $0^\circ$   |
| 2) $-45^\circ$ | 5) $270^\circ$  | 8) $-180^\circ$ | 11) $360^\circ$ |
| 3) $150^\circ$ | 6) $-210^\circ$ | 9) $135^\circ$  | 12) $300^\circ$ |



**57.** Trouver tous les angles compris entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$  dont :

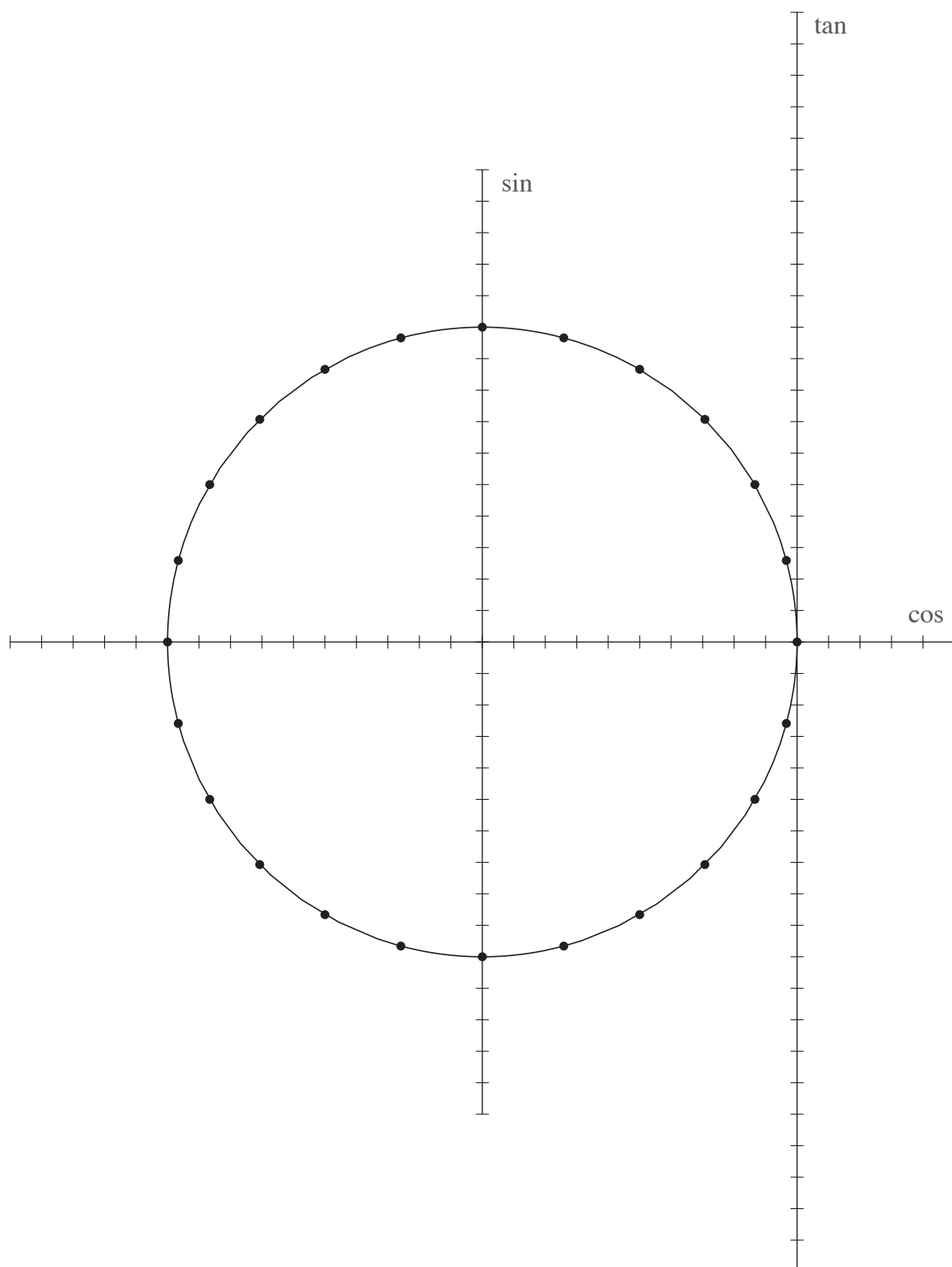
- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a) le sinus égale 0,25 ; -0,25 ; 1 | b) le sinus égale -1 ; -0,5 ; 0    |
| c) le cosinus égale 0,5 ; -0,3 ; 0 | d) le cosinus égale 1 ; -0,5 ; 1,5 |

*Rép.* a)  $14,5^\circ$  ;  $165,5^\circ$  /  $194,5^\circ$  ;  $345,5^\circ$  /  $90^\circ$       b)  $270^\circ$  /  $210^\circ$  ;  $330^\circ$  /  $0^\circ$  ;  $180^\circ$  ;  $360^\circ$   
 c)  $60^\circ$  ;  $300^\circ$  /  $107,5^\circ$  ;  $252,5^\circ$  /  $90^\circ$  ;  $270^\circ$       d)  $0^\circ$  ;  $360^\circ$  /  $120^\circ$  ;  $240^\circ$  / impossible

### Exercices

**58.** Déterminer graphiquement  $\tan \alpha$  pour les valeurs suivantes de  $\alpha$ : (contrôler avec la calculatrice)

- |                |                 |                 |                 |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1) $30^\circ$  | 4) $-60^\circ$  | 7) $90^\circ$   | 10) $0^\circ$   |
| 2) $-45^\circ$ | 5) $270^\circ$  | 8) $-180^\circ$ | 11) $360^\circ$ |
| 3) $150^\circ$ | 6) $-210^\circ$ | 9) $135^\circ$  | 12) $300^\circ$ |



### Exercices

**59.** Trouver tous les angles compris entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$  dont la tangente égale 1 ; 2 ; -1,2 ; 0.

Rép.  $45^\circ$  ;  $225^\circ$  /  $63,4^\circ$  ;  $243,4^\circ$  /  $129,8^\circ$  ;  $309,8^\circ$  /  $0^\circ$  ;  $180^\circ$  ;  $360^\circ$

**60.** Soit  $x$  un angle aigu (compris entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ ). Au moyen du cercle trigonométrique, comparer :

- |                                      |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\sin(-x)$ et $\sin x$            | 5) $\cos(180^\circ - x)$ et $\cos x$ | 9) $\tan(180^\circ + x)$ et $\tan x$ |
| 2) $\cos(-x)$ et $\cos x$            | 6) $\tan(180^\circ - x)$ et $\tan x$ | 10) $\sin(90^\circ - x)$ et $\cos x$ |
| 3) $\tan(-x)$ et $\tan x$            | 7) $\sin(180^\circ + x)$ et $\sin x$ | 11) $\cos(90^\circ - x)$ et $\sin x$ |
| 4) $\sin(180^\circ - x)$ et $\sin x$ | 8) $\cos(180^\circ + x)$ et $\cos x$ | 12) $\cos(90^\circ + x)$ et $\sin x$ |

Rép. 1) opposés 2) égaux 3) opposés 4) égaux 5) opposés 6) opposés  
7) opposés 8) opposés 9) égaux 10) égaux 11) égaux 12) opposés

**61.** Dessiner le graphe de la fonction  $x \mapsto \sin x$  pour  $x$  compris entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ .  
Unité sur l'axe  $Ox$  : 1 carré =  $10^\circ$  ; sur l'axe  $Oy$  : 1 carré = 0,1.

**62.** Dessiner le graphe de la fonction  $x \mapsto \cos x$  pour  $x$  compris entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ .  
Unité sur l'axe  $Ox$  : 1 carré =  $10^\circ$  ; sur l'axe  $Oy$  : 1 carré = 0,1.

**63.** Dessiner le graphe de la fonction  $x \mapsto \tan x$  pour  $x$  compris entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ .  
Unité sur l'axe  $Ox$  : 1 carré =  $10^\circ$  ; sur l'axe  $Oy$  : 5 carrés = 1.

**64.** Déterminer tous les angles  $\alpha$  compris entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$  tels que :

- |                         |                                    |
|-------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sin \alpha = 0,2$  | 6) $\tan \alpha = 1$               |
| 2) $\cos \alpha = -0,7$ | 7) $\sin \alpha = \cos \alpha$     |
| 3) $\sin \alpha = -0,6$ | 8) $\tan \alpha = -1,5$            |
| 4) $\cos \alpha = 0,1$  | 9) $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$ |
| 5) $\sin \alpha = -1$   | 10) $\tan \alpha = 0$              |

Rép. 1)  $11,5^\circ$  ;  $168,5^\circ$  2)  $134,4^\circ$  ;  $225,6^\circ$  3)  $216,9^\circ$  ;  $323,1^\circ$  4)  $84,3^\circ$  ;  $275,7^\circ$   
5)  $270^\circ$  6)  $45^\circ$  ;  $225^\circ$  7)  $45^\circ$  ;  $225^\circ$  8)  $123,7^\circ$  ;  $303,7^\circ$  9)  $135^\circ$  ;  $315^\circ$   
10)  $0^\circ$  ;  $180^\circ$  ;  $360^\circ$

**65.** Au moyen du cercle trigonométrique, sans calculatrice, déterminer :

- |                                      |                                      |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\cos(\pi)$                       | 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ | 3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ | 4) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$  |
| 5) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | 6) $\tan(3\pi)$                      | 7) $\sin(3\pi)$                      | 8) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ |

Rép. 1) -1 2) -1 3) -1 4) 1 5) -1 6) 0 7) 0 8) 0

### Exercices

**66.** Trouver tous les angles compris *entre  $-180^\circ$  et  $+180^\circ$*  dont :

- a) le sinus égale  $-0,3$  ;  $1$  ;  $-1$  ;  $-0,5$  ;  $0$ .
- b) le cosinus égale  $0,5$  ;  $-0,3$  ;  $0$  ;  $1$ .
- c) la tangente égale  $1$  ;  $2$  ;  $-1,2$  ;  $0$ .

*Rép.* a)  $-17,46^\circ$  ;  $-162,54^\circ$  /  $90^\circ$  /  $-90^\circ$  /  $-30^\circ$  ;  $-150^\circ$  /  $-180^\circ$  ;  $0^\circ$  ;  $180^\circ$   
b)  $\pm 60^\circ$  /  $\pm 107,46^\circ$  /  $\pm 90^\circ$  /  $0^\circ$   
c)  $45^\circ$  ;  $-135^\circ$  /  $63,43^\circ$  ;  $-116,57^\circ$  /  $-50,19^\circ$  ;  $129,81^\circ$  /  $-180^\circ$  ;  $0^\circ$  ;  $180^\circ$

**67.** Déterminer les *valeurs exactes* de  $\sin x$ ,  $\cos x$  et  $\tan x$  pour les angles  $x$  donnés ci-dessous :

- 1)  $225^\circ$       2)  $-135^\circ$       3)  $150^\circ$       4)  $\frac{7\pi}{6}$       5)  $\frac{15\pi}{4}$       6)  $-\frac{22\pi}{3}$

*Rép.* 1)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  ;  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  ;  $1$       2)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  ;  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  ;  $1$       3)  $\frac{1}{2}$  ;  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$   
4)  $-\frac{1}{2}$  ;  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $\frac{1}{\sqrt{3}}$       5)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  ;  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ;  $-1$       6)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $-\frac{1}{2}$  ;  $-\sqrt{3}$

**68.** Calculer la *valeur exacte* de : a)  $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \tan^2\left(\frac{11\pi}{6}\right)$       b)  $2 \cos(-570^\circ) \cdot \sin(150^\circ)$

*Rép.*  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  ;  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

**69.** Un observateur aperçoit de l'autre côté d'un canal un arbre vertical, juste en face, sous un angle de  $35^\circ$ . Il se déplace de 30 m le long de la rive et voit maintenant l'arbre sous un angle de  $19^\circ$ . Calculer la largeur  $x$  du canal et la hauteur  $y$  de l'arbre.

*Rép.*  $x = 16,94$  m ;  $y = 11,86$  m

**70.** D'un point de vue situé à 225 m au-dessus du niveau d'un lac, on aperçoit le sommet d'une montagne de la rive opposée sous un angle d'élévation de  $5,13^\circ$ . Du même point de vue, l'image réfléchie du sommet de la montagne par la surface du lac apparaît sous un angle de dépression de  $6,88^\circ$ . Calculer l'altitude de la montagne, sachant que celle du lac est 375 m.

*Rép.* 1908 m

**71.** Deux poulies dont les diamètres sont 122 cm et 88 cm, sont reliées par une courroie de transmission tendue et non croisée. La distance des axes des poulies est 400 cm. Quelle est la longueur de la courroie ?

*Rép.* 1130,6 cm

## Exercices

**72.** Sans machine, calculer :

a)  $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

b)  $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Rép. a)  $\frac{\sqrt{3}-3}{3}$       b)  $\sqrt{3}$

**73.** Simplifier les expressions suivantes :

a)  $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+t\right) + \cos(\pi+t)$

b)  $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right) + \cos(\pi-t) - \cos\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$

Rép. a)  $-2\cos t$       b)  $\sin t$

**74.** Au moyen du théorème du sinus, calculer les angles et les côtés inconnus du triangle ABC :

1)  $AB = 15$  ;  $\alpha = 50^\circ$  ;  $\beta = 30^\circ$

2)  $AC = 4$  ;  $\alpha = 20^\circ$  ;  $\gamma = 130^\circ$

3)  $AB = 5$  ;  $AC = 9$  ;  $\gamma = 30^\circ$

4)  $BC = 16$  ;  $AC = 6$  ;  $\beta = 20^\circ$

Rép. 1)  $\gamma = 100^\circ$  ;  $AC = 7,62$  ;  $BC = 11,67$   
 2)  $\beta = 30^\circ$  ;  $AB = 6,13$  ;  $BC = 2,74$   
 3)  $\beta = 64,16^\circ$  ou  $115,84^\circ$  ;  $\alpha = 85,84^\circ$  ou  $34,16^\circ$  ;  $BC = 9,97$  ou  $5,62$   
 4)  $\alpha = 65,79^\circ$  ou  $114,21^\circ$  ;  $\gamma = 94,21^\circ$  ou  $45,79^\circ$  ;  $AB = 17,50$  ou  $12,57$

**75.** Un homme doit se rendre de A à B dans le brouillard. Progressant à la vitesse de 4,5 km/h, il part de A en ligne droite, en se trompant de  $12^\circ$  dans l'estimation de sa direction. Parvenu à un point C, il corrige son cap de  $36^\circ$  dans le sens convenable, et il lui faut encore 20 minutes pour arriver à B. Calculer la distance AB.

Rép. 4,24 km

**76.** Au moyen du théorème du cosinus, calculer le côté inconnu du triangle ABC :

1)  $AB = 15$  ;  $\alpha = 50^\circ$  ;  $AC = 17$

3)  $AB = 5$  ;  $AC = 12$  ;  $\alpha = 90^\circ$

2)  $AC = 4$  ;  $BC = 13$  ;  $\gamma = 130^\circ$

4)  $BC = 16$  ;  $AB = 6$  ;  $\beta = 20^\circ$

Rép. 1)  $BC = 13,65$       2)  $AB = 15,87$       3)  $BC = 13$       4)  $AC = 10,56$

**77.** Au moyen du théorème du cosinus, calculer les angles du triangle ABC :

1)  $AB = 15$  ;  $BC = 25$  ;  $AC = 17$

2)  $AB = 3$  ;  $BC = 27$  ;  $AC = 28$

Rép. 1)  $\alpha = 102,6^\circ$      $\beta = 41,6^\circ$      $\gamma = 35,8^\circ$       2)  $\alpha = 67,6^\circ$      $\beta = 106,5^\circ$      $\gamma = 5,9^\circ$

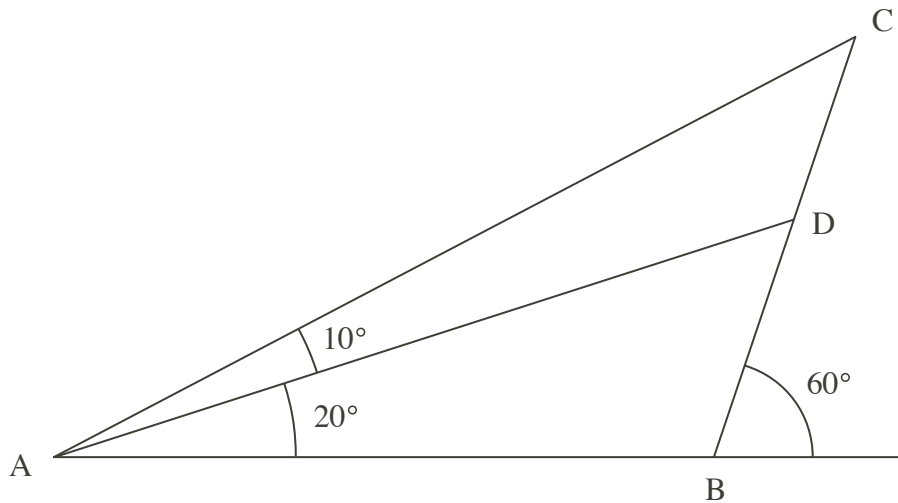
### Exercices

**78.** Calculer la longueur de la bissectrice en  $A$  d'un triangle  $ABC$  dont on donne les trois côtés :

$$BC = 62,5 ; AC = 48,2 ; AB = 37,8$$

*Rép.* 29,32

**79.** Sachant que  $AB = 22,8$ , calculer les longueurs  $BC$ ,  $BD$ ,  $DC$ ,  $AD$  et  $AC$  :



*Rép.*  $BC = 22,8$  ;  $BD = 12,1$  ;  $DC = 10,7$  ;  $AD = 30,7$  ;  $AC = 39,5$

**80.** Calculer les angles et les côtés d'un triangle  $ABC$  tel que  $BC = 1 + \sqrt{3}$ ,  $AC = \sqrt{2}$  et  $\beta = 30^\circ$ .

*Rép.*  $\alpha = 75^\circ$  ou  $105^\circ$  ;  $\gamma = 75^\circ$  ou  $45^\circ$  ;  $AB = 2,732$  ou  $2$

**81.** Calculer le côté  $BC$  d'un triangle  $ABC$  dont on donne les côtés  $AC = \sqrt{2}$ ,  $AB = \sqrt{3}$  et l'angle  $\gamma = 60^\circ$ . *Rép.*  $\beta = 45^\circ$  ;  $BC = 1,93$

**82.** Un observateur se trouve à l'intérieur d'une cour rectangulaire  $ABCD$  en un point  $P$  de la diagonale  $AC$ , à 32 m du point  $A$ . Le côté  $AB$  mesure 65 m, et l'observateur voit le côté  $BC$  sous un angle de  $48,85^\circ$ . Calculer la longueur  $BC$ .

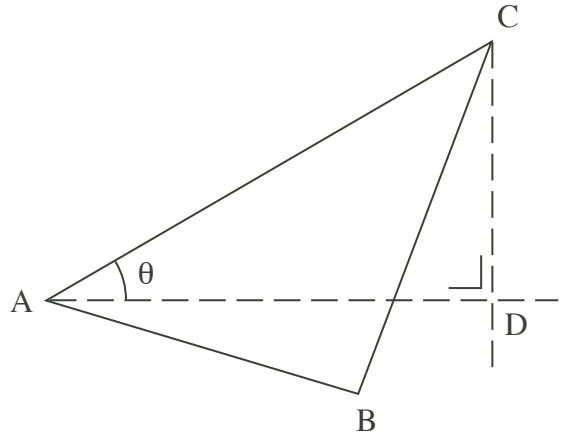
*Rép.* 33,25 m

## Exercices

**83.** Pour déterminer l'altitude du sommet  $C$  d'une montagne, on fait le choix d'une base  $AB$  de 450 m de long. On mesure les angles  $\widehat{BAC} = 35,4^\circ$ ,  $\widehat{ABC} = 105,8^\circ$  ainsi que l'angle d'élévation  $\theta = 23,5^\circ$  sous lequel on voit  $C$  depuis  $A$ .

Quelle est l'altitude de  $C$  si celle de  $A$  est de 920 m ?

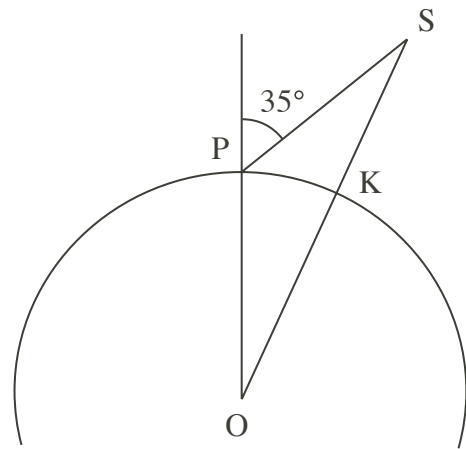
Rép.  $CD = 275,5$  m  
altitude de  $C$  : 1195,5 m



**84.** Un observateur  $P$  voit un satellite  $S$  dans une direction faisant un angle de  $35^\circ$  avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km au-dessus de la surface de la terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur ?

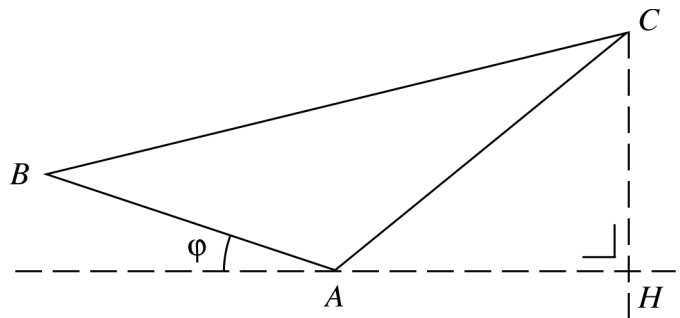
[Rayon terrestre : 6370 km.]

Rép.  $PS = 1182,4$  km



**85.** Pour déterminer l'altitude du sommet  $C$  d'une montagne, on fait le choix d'une base  $AB = 200$  m, située dans un plan vertical passant par  $C$ . On mesure les angles  $\widehat{BAC} = 117,5^\circ$ ,  $\widehat{ABC} = 47,42^\circ$  ainsi que l'angle  $\varphi = 38,3^\circ$  entre  $AB$  et l'horizontale. Quelle est l'altitude de  $C$  si celle de  $A$  (extrémité inférieure de la base) est de 823 m ?

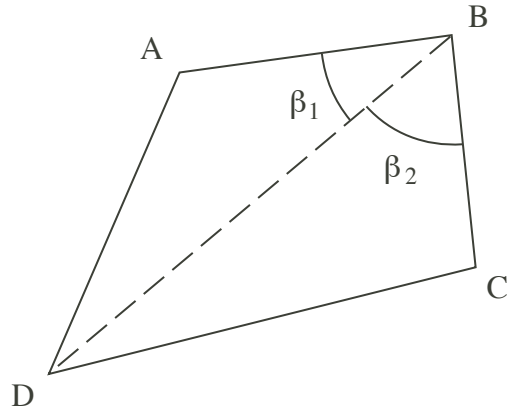
Rép.  $CH = 232$  m ; altitude de  $C$  : 1055 m



## Exercices

**86.** Dans un quadrilatère convexe  $ABCD$ , on connaît  $\alpha = 118,6^\circ$ ,  $\beta = 72,1^\circ$ ,  $AB = 4,7$ ,  $BC = 7,3$  et  $AD = 8,4$ . Calculer  $CD$ .

Rép.  $\beta_1 = 40,24^\circ$   
 $BD = 11,42$   
 $CD = 6,488$



**87.** D'un triangle  $ABC$  isocèle en  $A$ , on donne  $BC = 24$  et  $\alpha = 40^\circ$ . Calculer la longueur de :

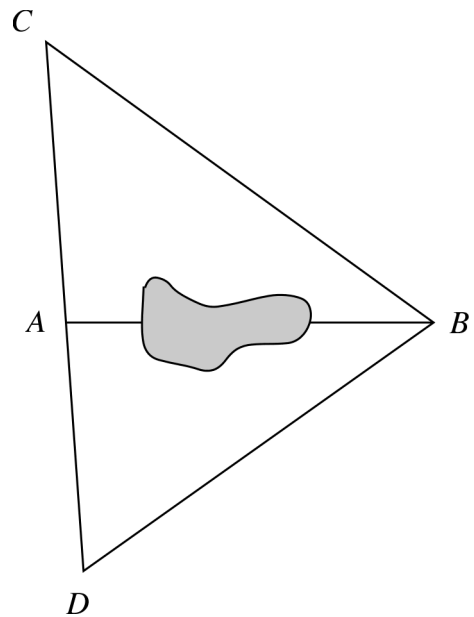
- 1) la médiane issue de  $B$  ;      2) la hauteur issue de  $B$  ;      3) la bissectrice issue de  $B$ .

Rép.  $24,4$  /  $22,55$  /  $23,35$

**88.** Un point  $B$  est inaccessible et invisible d'un point  $A$ . Pour trouver la distance  $AB$ , on a choisi deux points  $C$  et  $D$  alignés avec  $A$ , d'où l'on voit les points  $A$  et  $B$ . On a mesuré les distances  $AD = 432,3$  m et  $AC = 521,8$  m, ainsi que les angles  $\widehat{ADB} = 55,3^\circ$  et  $\widehat{ACB} = 41,6^\circ$ .

Calculer la distance séparant les points  $A$  et  $B$ .

Rép.  $AB = 529,1$  m



**89.** Dans un parallélogramme  $ABCD$ , on connaît les côtés  $AB = 38$  et  $AD = 49$ , ainsi que l'angle en  $A$  :  $\alpha = 78^\circ$ . Calculer la longueur des diagonales  $BD$  et  $AC$ .

Rép.  $BD = 55,41$  ;  $AC = 67,965$

**90.** Calculer l'aire du triangle  $ABC$  :

- 1)  $BC = 70,24$  ;  $\gamma = 30,69^\circ$  ;  $AC = 82,12$   
 2)  $BC = 85,8$  ;  $AB = 57,29$  ;  $\beta = 117,81^\circ$   
 3)  $AC = 33,46$  ;  $\alpha = 142,58^\circ$  ;  $AB = 58,26$

Rép. 1)  $1472,00$       2)  $2173,87$       3)  $592,27$

## Exercices

**91.** Montrer que l'aire  $S$  d'un triangle de côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$  peut s'écrire

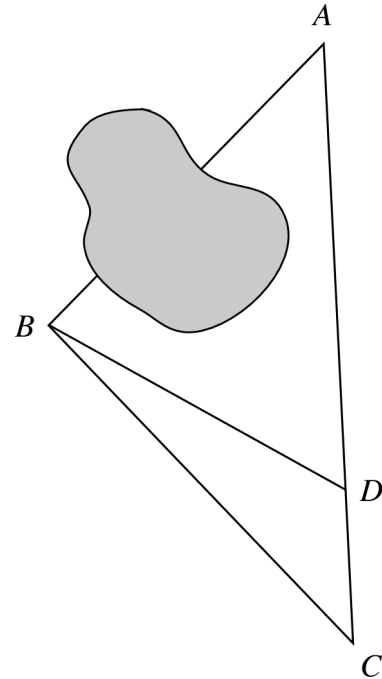
$$S = \frac{abc}{4r}$$

$r$  désignant le rayon du cercle circonscrit.

**92.** Le point  $B$  est inaccessible et invisible du point  $A$ . On a mesuré les distances  $AD = 432$  m et  $DC = 89$  m, ainsi que les angles  $\widehat{ADB} = 55^\circ$  et  $\widehat{ACB} = 42^\circ$ .

Calculer la distance  $AB$ .

Rép.  $AB = 354,28$  m



**93.** D'un quadrilatère convexe  $ABCD$ , on donne les quatre côtés et l'angle en  $A$  :

$$AB = 3,5 ; \quad BC = 5,8 ; \quad CD = 6,2 ; \quad DA = 4,4 ; \quad \alpha = 96,8^\circ$$

Déterminer les autres angles de ce quadrilatère, et calculer son aire.

Rép.  $\beta = 111,13^\circ$  ;  $\gamma = 59,20^\circ$  ;  $\delta = 92,87^\circ$  ; aire : 23,09

**99.** Etablir les identités suivantes à partir des relations trigonométriques fondamentales :

a)  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

b)  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

c)  $3\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha = 3 - \sin^2 \alpha$

d)  $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

e)  $\tan x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos x} + \cos x$

f)  $\tan x = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$

## Exercices

**100.** Etablir les identités suivantes :

- 1)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \beta} = \tan^2 \alpha - \tan^2 \beta$
- 2)  $\sin x \cos x (1 + \tan x)(1 - \cot x) = 1 - 2 \cos^2 x$
- 3)  $(\cos x + \sin x)^2 = 2 - (\cos x - \sin x)^2$
- 4)  $\tan x + \tan y = \tan x \tan y (\cot x + \cot y)$
- 5)  $\frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \cot^2 x \cot^2 y - 1$
- 6)  $\tan t + \frac{\cos t}{1 + \sin t} = \frac{1}{\cos t}$

**101.** Résoudre les équations :

- |                                     |                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\cos x = -\frac{1}{2}$          | 2) $\sin x = 0,8473$              |
| 3) $\tan x = -0,9042$               | 4) $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 5) $\cos x = 1,352$                 | 6) $\cos(2x) = -0,2$              |
| 7) $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 8) $\tan(5x) = 3,492$             |

- Rép.*
- |                                                                                       |                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$                                                | 2) $57,92^\circ + k \cdot 360^\circ; 122,08^\circ + k \cdot 360^\circ$ |
| 3) $-42,12^\circ + k \cdot 180^\circ$                                                 | 4) $-\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$                                      |
| 5) $\emptyset$                                                                        | 6) $\pm 50,77^\circ + k \cdot 180^\circ$                               |
| 7) $-\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ | 8) $14,80^\circ + k \cdot 36^\circ$                                    |

**102.** Résoudre les équations :

- |                                                                        |                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1) $\sin\left(\frac{t}{3}\right) = -\frac{1}{2}$                       | 2) $\cot\left(\frac{3t}{7}\right) = -4,892$                       |
| 3) $\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 4) $\cos\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ |

- Rép.*
- |                                                                     |                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| 1) $-90^\circ + k \cdot 1080^\circ; 630^\circ + k \cdot 1080^\circ$ | 2) $-26,95^\circ + k \cdot 420^\circ$                                  |
| 3) $270^\circ + k \cdot 720^\circ; 450^\circ + k \cdot 720^\circ$   | 4) $247,5^\circ + k \cdot 540^\circ; -112,5^\circ + k \cdot 540^\circ$ |

**103.** Pour les équations suivantes, déterminer la plus petite solution supérieure à  $1000^\circ$ .

- |                   |                   |                  |
|-------------------|-------------------|------------------|
| 1) $\sin x = 0,5$ | 2) $\cos x = 0,5$ | 3) $\tan x = -1$ |
|-------------------|-------------------|------------------|

- Rép.* 1)  $1110^\circ$     2)  $1020^\circ$     3)  $1035^\circ$

## Exercices

**104. Résoudre :**

1)  $3\sin^2 x - \cos^2 x = 1$

2)  $\frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x - 3}{\cos x} = \frac{1}{3}$

3)  $\frac{1}{\cos^2 x} + 3 = 2\tan^2 x$

4)  $\sin x = \sqrt{3}\cos x$

5)  $\cos x - 3\sin x = 0$

6)  $3\cos x + 2\sin x = 0$

*Rép.* 1)  $45^\circ + k \cdot 90^\circ$       2)  $\pm 109,5^\circ + k \cdot 360^\circ$       3)  $\pm 63,4^\circ + k \cdot 180^\circ$   
 4)  $60^\circ + k \cdot 180^\circ$       5)  $18,4^\circ + k \cdot 180^\circ$       6)  $-56,31^\circ + k \cdot 180^\circ$

**105. Résoudre :**

1)  $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

2)  $\cot^2(2x) + 1 = 0$

3)  $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

4)  $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

5)  $3\sin^2 t + \cos^2 t - 2 = 0$

6)  $\tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0$

*Rép.* 1)  $\pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$       2)  $\emptyset$   
 3)  $k \cdot 2\pi; \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$       4)  $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$   
 5)  $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$       6)  $\pm \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi; \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$

**106. Résoudre les équations suivantes en commençant par diviser les deux membres par  $\cos^2 x$  :**

1)  $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$       2)  $\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$

3)  $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$       4)  $(\sqrt{3} - 1)\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + (\sqrt{3} + 1)\sin^2 x = 0$

*Rép.* 1)  $71,57^\circ + k \cdot 180^\circ; -45^\circ + k \cdot 180^\circ$       2)  $45^\circ + k \cdot 180^\circ; -78,69^\circ + k \cdot 180^\circ$   
 3)  $45^\circ + k \cdot 180^\circ; 26,565^\circ + k \cdot 180^\circ$       4)  $45^\circ + k \cdot 180^\circ; 15^\circ + k \cdot 180^\circ$

**107. Résoudre :**

1)  $2\sin x + 3\cot x = 0$

2)  $3 - 4\cos x \sin x - 7\cos^2 x = 0$

3)  $2\sin x + 2\cos x = \frac{1}{\cos x}$

4)  $\cot^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{4}$

*Rép.* 1)  $\pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ$       2)  $63,4^\circ + k \cdot 180^\circ; -33,7^\circ + k \cdot 180^\circ$   
 3)  $67,5^\circ + k \cdot 180^\circ; -22,5^\circ + k \cdot 180^\circ$       4)  $\pm 36,7^\circ + k \cdot 180^\circ$

## Exercices

**108.** Déterminer les zéros et les pôles des fonctions suivantes, entre 0 et  $2\pi$  :

a)  $f(x) = \sin x \cos x$

b)  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

c)  $f(x) = \frac{3\sin x}{(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2}$

d)  $f(x) = \cos(2x)$

e)  $f(x) = \sin(2x)$

f)  $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Rép. a) zéros :  $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$

b) zéros :  $0; \pi; 2\pi$  / pôles :  $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

c) zéros :  $0; \pi; 2\pi$  / pôles :  $\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$

d) zéros :  $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$

e) zéros :  $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$

f) zéros :  $0; 2\pi$  / pôle :  $\pi$

**109.** Sachant que  $\sin x = -\frac{1}{2}$  et  $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$ , calculer  $\cos x$  et  $\tan x$ , sans déterminer  $x$ .

Rép.  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**110.** Sachant que  $\cos x = -\frac{3}{5}$  et  $x \in ]2\pi; 3\pi[$ , calculer  $\sin x$  et  $\tan x$ , sans déterminer  $x$ .

Rép.  $\sin x = \frac{4}{5}$  ;  $\tan x = -\frac{4}{3}$

**111.** Sachant que  $\tan x = \frac{5}{12}$  et  $x \in ]\pi; 2\pi[$ , calculer  $\sin x$  et  $\cos x$ , sans déterminer  $x$ .

Rép.  $\sin x = -\frac{5}{13}$  ;  $\cos x = -\frac{12}{13}$

**112.** Résoudre les équations suivantes :

1)  $\sin(3t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

2)  $\tan\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) = \tan(2t)$

3)  $\cos\left(\frac{2t}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{3t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

4)  $\cot\left(\frac{5t}{8} - \frac{3\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

5)  $\sin\left(\frac{5x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

6)  $\tan\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \cot(3t) = 0$

Rép. 1)  $\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

2)  $\frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{\pi}{3}$

3)  $\frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{12\pi}{13}; \frac{7\pi}{10} + k \cdot \frac{12\pi}{5}$

4)  $\frac{15\pi}{31} + k \cdot \frac{24\pi}{31}$

5)  $\frac{9\pi}{7} + k \cdot \frac{12\pi}{7}; \frac{9\pi}{13} + k \cdot \frac{12\pi}{13}$

6)  $\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

### Exercices

**113.** Résoudre les équations suivantes :

1)  $2 \cos t + 6 \sin t = 6$

2)  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

3)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$

4)  $3 \cos x + 5 \sin x = 2$

5)  $\cos(2x) + 3 \sin(2x) = 2$

6)  $\sin^2(2x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Rép. 1)  $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ ;  $53,13^\circ + k \cdot 360^\circ$

2)  $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

3)  $k \cdot 2\pi$ ;  $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

4)  $-10,9^\circ + k \cdot 360^\circ$ ;  $128,98^\circ + k \cdot 360^\circ$

5)  $61,17^\circ + k \cdot 180^\circ$ ;  $10,398^\circ + k \cdot 180^\circ$

6)  $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ ;  $\frac{7\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$

**114.** A l'aide des formules d'addition et connaissant les valeurs exactes des rapports trigonométriques de  $30^\circ$  et  $45^\circ$ , déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques de  $75^\circ$ .

Rép.  $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$  /  $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$  /  $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

**115.** Au moyen des formules d'addition, établir les *formules de duplication* :

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

**116.** Etablir les *formules de bisection* :

$$\sin^2(t/2) = \frac{1 - \cos t}{2}$$

$$\cos^2(t/2) = \frac{1 + \cos t}{2}$$

$$\tan^2(t/2) = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$$

*Indication :* faire  $t = 2x$  dans la formule  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ .

## Exercices

**117.** Etablir l'identité suivante :

$$\tan(t/2) = \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{1 - \cos t}{\sin t}$$

*Indication :* faire  $t = 2x$  dans la formule  $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ , puis utiliser la formule  $\tan^2(t/2) = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$ .

**118.** Montrer que dans tout triangle  $ABC$ , on a la relation :

$$\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma$$

**119.** Résoudre les équations suivantes :

1)  $\sin(2x) = \tan x$

2)  $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin(2x) = 3$

3)  $\cos(2x) - \sin^2 x = 0$

4)  $\cos(2x) \tan(2x) - \tan x \cos(2x) = 8$

*Rép.* 1)  $k\pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

2)  $\frac{\pi}{3} + k\pi$

3)  $\pm 35,26^\circ + k \cdot 180^\circ$

4)  $82,87^\circ + k \cdot 180^\circ$

**120.** Partager un angle de  $30^\circ$  en deux parties telles que le sinus de la première soit le triple de celui de la seconde.

*Rép.*  $22,63^\circ / 7,37^\circ$

**121.** Partager un angle de  $45^\circ$  en deux parties telles que leurs tangentes soient dans le rapport 5 à 6.

*Rép.*  $20,657^\circ / 24,343^\circ$

**122.** Etablir les identités suivantes :

1)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \sqrt{2} \sin t$

2)  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right) = \sqrt{3} \sin t$

3)  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$

4)  $\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

5)  $\frac{1}{\sin(2x)} + \cot(2x) = \cot x$

6)  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

### Exercices

**123.** Etudier dans l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  le signe des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = 4 \sin x$

2)  $f(x) = \sin(3x)$

3)  $f(x) = 2 \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

4)  $f(x) = \cot\left(\frac{x}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)$

5)  $f(x) = \sin\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right)$

6)  $f(x) = \sin^2 x - \sin x$

7)  $f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin x}$

8)  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$